

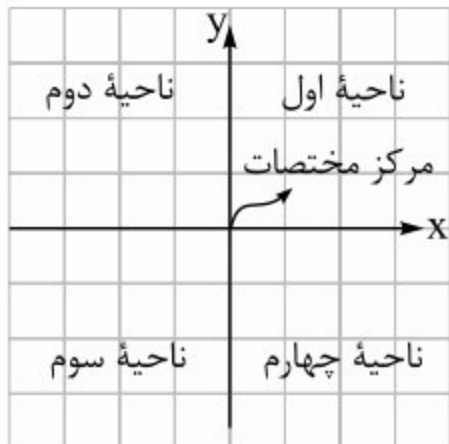
فصل دهم

خطوط معادله‌های خطی

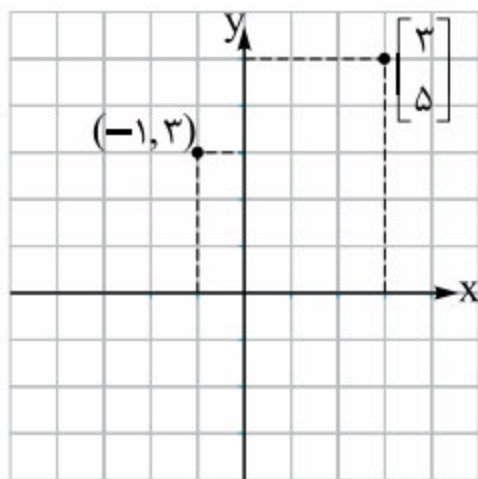
درس اول: معادله خط

در این فصل می‌خواهیم با خط، نمایش جبری و نمایش هندسی آن آشنا شویم. نوشتن معادله خط را یاد بگیریم و براساس آن، ویژگی‌های هر خط را به دست آوریم. برای شروع این درس، نیاز به یادآوری دستگاه مختصات و ویژگی‌های آن داریم. به همین دلیل ابتدا به یادآوری این مبحث می‌پردازیم.

دستگاه مختصات

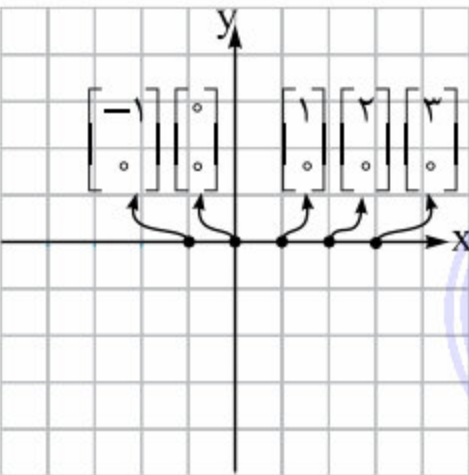


همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، دستگاه مختصات از دو محور عمود بر هم تشکیل شده است. یکی از این محورها، **محور طول‌ها** (همون محور x فودمون) نام دارد و به صورت افقی رسم می‌شود. محور دیگر، **محور عرض‌ها** (محور y) است و به صورت عمودی نمایش داده می‌شود. به محل تقاطع دو محور x و y ، **مبدأ مختصات** می‌گویند. هدف از ابداع دستگاه مختصات، نشان دادن مکان نقطه‌ها در صفحه است.



به این صورت که وضعیت هر نقطه نسبت به مبدأ را با دو عدد نشان می‌دهیم که این دو عدد را **مختصات نقطه** می‌نامیم و به صورت یک زوج مرتب به شکل $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ یا (x, y) نمایش می‌دهیم.

در زوج مرتب $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ یا (x, y) ، x نشان‌دهنده طول نقطه و y نشان‌دهنده عرض نقطه موردنظر در دستگاه مختصات است. به عنوان مثال نمایش نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $(-1, 3)$ در دستگاه مختصات، به صورت روبه‌رو است.

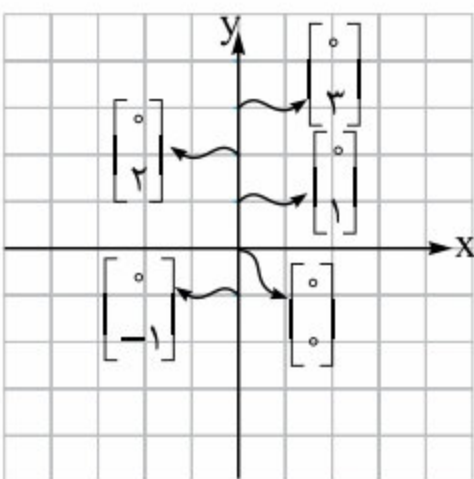


نکته عرض نقاطی که روی محور طول‌ها قرار دارد، برابر صفر است.

مثال m را طوری تعیین کنید که نقطه $A = \begin{bmatrix} 2m+6 \\ 3m-6 \end{bmatrix}$ روی محور طول‌ها باشد. مختصات نقطه A را بنویسید.

پاسخ با توجه به نکته قبل، عرض این نقطه باید صفر باشد، بنابراین داریم: $3m - 6 = 0 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = \frac{6}{3} = 2$

حالا مقدار $m = 2$ را در مختصات نقطه A قرار می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2m+6 \\ 3m-6 \end{bmatrix} \xrightarrow{m=2} \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 6 \\ 3 \times 2 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+6 \\ 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$


نکته طول نقاطی که روی محور عرض‌ها قرار دارد، برابر صفر است.



مثال اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} 2a+1 \\ 3a-2 \end{bmatrix}$ روی محور عرض‌ها باشد. مختصات A را به دست آورید.

پاسخ با توجه به نکته بالا، طول نقطه باید برابر صفر باشد، بنابراین داریم:

$$2a+1=0 \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

حالا با قراردادن مقدار $a = -\frac{1}{2}$ مختصات نقطه را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2a+1 \\ 3a-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{a=-\frac{1}{2}} A = \begin{bmatrix} 2 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \\ 3 \times (-\frac{1}{2}) - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 \\ -\frac{3}{2}-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

نتیجه با توجه به تعریف دستگاه مختصات، روابط زیر در مورد نقاط موجود در چهار ناحیه دستگاه مختصات برقرار است.

$x < 0$	$x > 0$
$y > 0$	$y > 0$
$x < 0$	$x > 0$
$y < 0$	$y < 0$

۱ در ناحیه اول، طول و عرض نقطه‌ها، هر دو عددی مثبت است.

۲ در ناحیه دوم، طول نقطه‌ها منفی، ولی عرض آن‌ها مثبت است.

۳ در ناحیه سوم، طول و عرض نقطه‌ها، هر دو منفی است.

۴ در ناحیه چهارم، نقاط طولی مثبت ولی عرضی منفی دارند.

فاصله بین دو نقطه در دستگاه مختصات: فاصله بین دو نقطه در دستگاه مختصات

برابر طول پاره‌خطی است که آن‌ها را به هم وصل می‌کند. فرض کنید که می‌خواهیم فاصله

بین دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ را به دست بیاوریم. برای این کار از مثلث درست‌داشته

قائم‌الزاویه و رابطه مربوط به آن، یعنی فیثاغورس استفاده می‌کنیم! یعنی خطوطی را مطابق شکل

از نقطه A به موازات محور x ‌ها و از نقطه B به موازات محور y ‌ها امتداد می‌دهیم تا به نقطه

تقاطع آن‌ها یعنی نقطه C برسیم. طول نقطه C برابر طول نقطه B و عرض نقطه C برابر

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

عرض نقطه A است. حالا داریم:

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، $AC = x_C - x_A = x_B - x_A$ و $BC = y_C - y_B = y_A - y_B$ است. با توجه به مقادیر به دست

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

آمده برای AC و BC داریم:

$$\Rightarrow AB^2 = (4-1)^2 + (2-3)^2 = 3^2 + (-1)^2 = 9+1=10 \Rightarrow AB = \sqrt{10}$$

نکته فاصله بین ۲ نقطه $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال می‌دانیم مثلث ABC ، متساوی‌الساقین و مختصات رأس‌های آن به ترتیب $C = \begin{bmatrix} a \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 \\ a \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ است و هم‌چنین

AB و AC ساق‌های آن هستند. مقدار a را به دست آورید.

پاسخ AB و AC ، ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند. بنابراین $AB = AC$. از طرفی اندازه اضلاع AB و AC به ترتیب

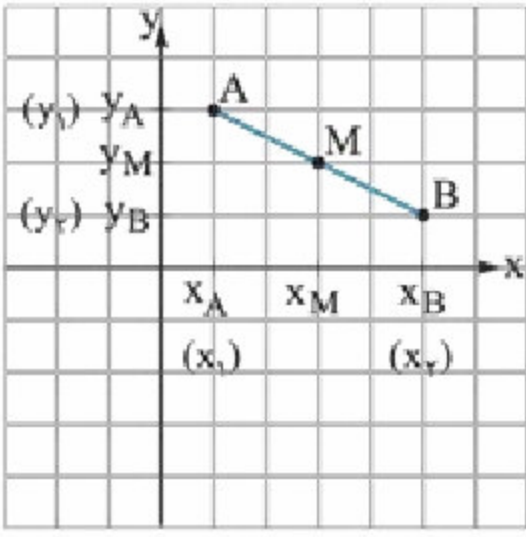
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (a-2)^2}$$

برابر فاصله نقطه A تا نقاط B و C است؛ بنابراین داریم:

$$= \sqrt{(-1)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{1+(a-2)^2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(a-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{a^2 + (-4)^2} = \sqrt{a^2 + 16}$$

$$AB=AC \Rightarrow AB^2=AC^2 \Rightarrow 1+(a-2)^2 = a^2 + 16 \Rightarrow 1+a^2 - 4a + 4 = a^2 + 16 = 5 - 4a + 16 \Rightarrow -4a = 11 \Rightarrow a = -\frac{11}{4}$$



• **مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط:** اگر نقاط $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ دو سر پاره‌خط AB و

M نقطه وسط این پاره‌خط باشد، آن‌گاه مختصات نقطه M از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix}$$

مثال نقاط $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ دو سر پاره‌خط AB هستند. مختصات وسط این پاره‌خط را به دست آورید.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+1}{2} \\ \frac{5+3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} \\ \frac{8}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

پاسخ با توجه به توضیح بیان شده در مورد مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط داریم:

مثال می‌دانیم $M = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ ، نقطه وسط پاره‌خط AB است. اگر $A = \begin{bmatrix} a \\ 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 \\ b \end{bmatrix}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

پاسخ براساس مختصات نقاط A و B، مختصات نقطه وسط آن‌ها را به دست می‌آوریم و برابر مختصات نقطه M قرار می‌دهیم:

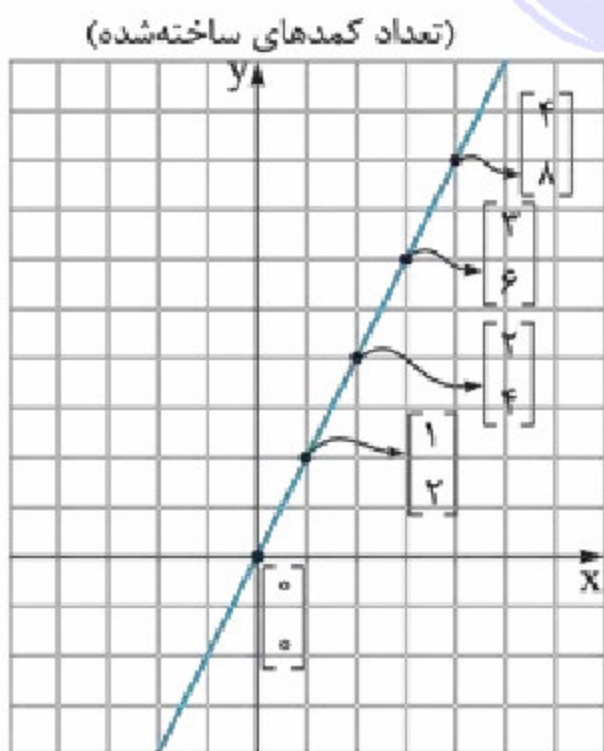
$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+5}{2} \\ \frac{4+b}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \frac{a+5}{2} = 6 &\Rightarrow a+5=12 \Rightarrow a=7 \\ \frac{4+b}{2} = 8 &\Rightarrow 4+b=16 \Rightarrow b=12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a+b=7+12=19$$

• **رابطه خطی:** فرض کنید یک نجار در هر روز، دو کمد می‌سازد. اگر تعداد روزهایی که نجار کار می‌کند را با X و تعداد کمدهای ساخته شده در این

روزها را با Y نمایش دهیم، جدول روبه‌رو به دست می‌آید.

تعداد روزهایی که نجار کار می‌کند (X)	0	1	2	3	4	...
تعداد کمدهای ساخته شده (Y)	0	2	4	6	8	...
$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$...



اگر هر کدام از ستون‌های این جدول را مختصات یک نقطه در دستگاه مختصات در نظر

بگیریم و آن‌ها را روی دستگاه مختصات نمایش دهیم، شکل روبه‌رو حاصل می‌شود.

هم‌چنین اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم و امتداد دهیم، می‌بینیم که همه آن‌ها

در یک راستا قرار دارند و شکل یک خط پدید می‌آید.

همان‌طور که از قبل می‌دانید، هر خط از مجموعه بی‌شمار نقطه به وجود می‌آید. در

شکل روبه‌رو همه نقاط روی خط دارای یک خاصیت مشترک هستند. عرض همه این

نقاط دو برابر طول آن‌ها است. یعنی داریم: $\text{طول} \times 2 = \text{عرض}$.

حالا اگر طول نقطه‌ها را با X و عرض آن‌ها را با Y نمایش دهیم، رابطه بالا به صورت $Y = 2X$ نوشته می‌شود. این رابطه نمایانگر همه نقطه‌های

روی صفحه است که عرض آن‌ها، دو برابر طولشان است. به رابطه $Y = 2X$ ، معادله خط نمایش داده شده می‌گویند.

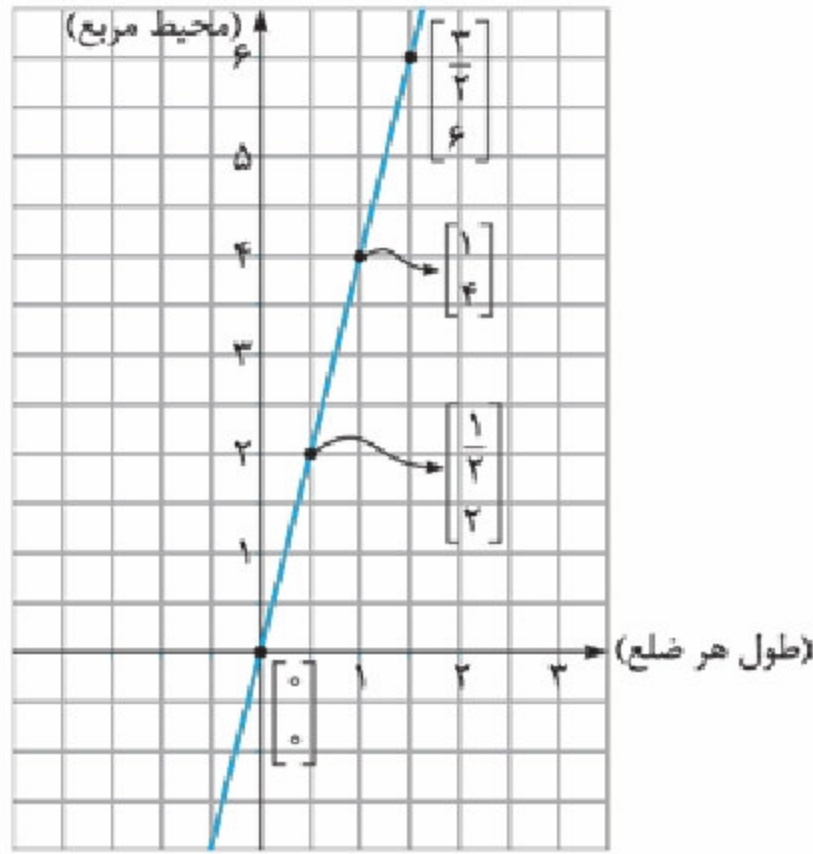
نتیجه اگر رابطه بین دو متغیر (مانند X، Y) به گونه‌ای باشد که وقتی نقاط به دست آمده از آن رابطه را روی دستگاه مختصات رسم

می‌کنیم، شکل یک خط به دست بیاید، به آن رابطه، رابطه خطی می‌گوییم.

مثال اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نمایش دهیم، آیا رابطه x و y خطی است؟

پاسخ با توجه به توضیحات بیان شده داریم:

x (طول ضلع مربع)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$...
y (محیط مربع)	0	$4 \times \frac{1}{2} = 2$	$4 \times 1 = 4$	$4 \times \frac{3}{2} = 6$...
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$...



اگر هر کدام از ستون‌های جدول به دست آمده را به عنوان مختصات یک نقطه در نظر بگیریم، شکل روبه‌رو به دست می‌آید: همان‌طور که می‌بینید، شکل به دست آمده، یک خط را نشان می‌دهد. بنابراین رابطه بین طول ضلع مربع و محیط آن، رابطه‌ای خطی است که به صورت $y = 4x$ نمایش داده می‌شود. (چون عرض همه نقاط این خط، 4 برابر طول آن‌ها است.)

مثال معادله $y = -x + 5$ چند پاسخ دارد؟

پاسخ این معادله شبیه معادله‌هایی که تا حالا حل کرده‌ایم، نیست؛ زیرا، معادله‌های قبلی همگی یک متغیر داشتند (مثلاً $0 = 2x - 1$). اما این معادله 2 متغیر دارد (y, x) ؛ برای حل چنین معادله‌هایی باید به جای یکی از متغیرها، یک عدد ثابت قرار دهیم و مقدار متغیر دیگر را براساس آن

به دست بیاوریم. مثلاً اگر x را برابر 1 قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$y = -x + 5 \xrightarrow{x=1} y = -1 + 5 \Rightarrow y = 4 \xrightarrow{\text{پاسخ معادله}} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

حالا اگر به جای x ، عدد 2 را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$y = -x + 5 \xrightarrow{x=2} y = -2 + 5 \Rightarrow y = 3 \xrightarrow{\text{پاسخ معادله}} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

آقا اجازه! معادله‌های قبلی (معادله‌های یک متغیره) فقط یک جواب داشتند، اما برای این معادله تا حالا دو جواب آوردیم! چرا؟

کاملاً فرقت درسته! بچه‌ها معادله‌های دو متغیره پر فلاف معادله‌های تک متغیره بی شمار جواب دارن. مثلاً تو این معادله شما اگر x رو برابر صفر قرار بدین، $y = 5$

می‌شه و کلی جواب دیگه مثل جواب‌های زیر رو می‌تونین براش به دست بیارین:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}, \dots$$

آقا اجازه! پس این تساوی (یعنی $y = -x + 5$) به اتفاده؟

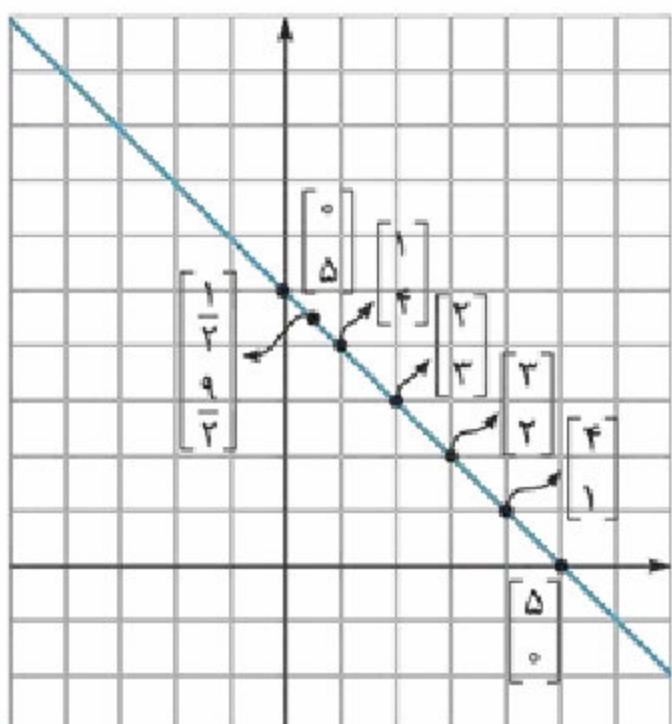
نه بچه‌ها! به هیچ وجه. درسته که این تساوی بی شمار جواب داره، اما به ازای همه مقادیر x و y برقرار

نیست. مثلاً آگه $x = 5$ و $y = 10$ باشه $10 \neq -5 + 5$. آگه پاسخ‌های به دست اومده برای معادله بالا رو،

روی دستگاه مختصات نشون بدیم، شکل روبه‌رو به دست میاد!

همون‌طور که می‌بینید همه پاسخ‌های این معادله روی یک خط قرار دارن و از طرف دیگه همه نقاط این خط پاسخ

این معادله هستن. بنابراین این رابطه، قطعی است.



نتیجه هر معادله به صورت $y = ax + b$ ، معادله یک خط است. زیرا در صورتی که تمام پاسخ‌های آن معادله را به صورت نقطه روی دستگاه مختصات نمایش دهیم، شکل یک خط به دست می‌آید. به همین دلیل می‌گوییم x و y با هم رابطه خطی دارند. معادله $y = ax + b$ بی‌شمار جواب دارد، اما اتحاد نیست.

به عنوان مثال، $y = x + 2$ ، معادله یک خط راست است که $a = 1, b = 2$.

با توجه به نتیجه بالا، رابطه‌هایی مانند $y = 2x - 3$ ، $y = \frac{1}{5}x + 2$ و $y = 3$ ، همگی معادله یک خط راست هستند، ولی رابطه‌های $y = x^2 + 1$ یا $y = \frac{1}{x} - 1$ معادله خط نیستند.

نمایش یک خط روی دستگاه مختصات

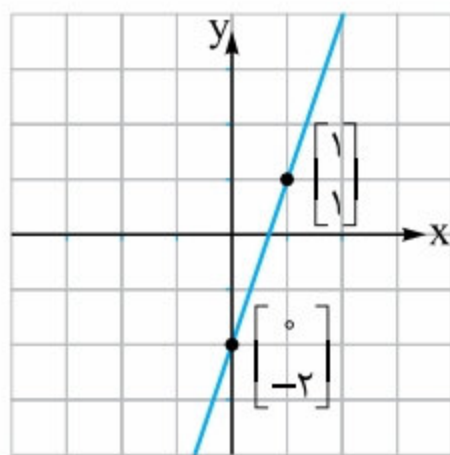
گاهی وقت‌ها معادله یک خط را داریم و باید نمایش هندسی آن را به دست آوریم (یعنی نمودار اون رو رسم کنیم). برای انجام چنین کاری، کافی است به وسیله معادله خط، ابتدا مختصات دو نقطه دلخواه از خط را به دست آوریم، سپس آن دو نقطه را روی دستگاه مختصات مشخص کرده و به هم وصل کنیم و از دو طرف امتداد دهیم. به این روش، نقطه‌یابی می‌گویند.

مثال خط $y = 3x - 2$ را روی دستگاه مختصات رسم کنید.

پاسخ کافی است مختصات دو نقطه دلخواه از این خط را به دست آوریم.

مثلاً یک بار x را برابر صفر و یک بار برابر ۱ قرار می‌دهیم:

x	۰	۱
$y = 3x - 2$	$3 \times 0 - 2 = -2$	$3 \times 1 - 2 = 1$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



حالا این دو نقطه را روی دستگاه مختصات نمایش داده و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم:

تشخیص قرار داشتن یک نقطه روی خط: فرض کنید می‌خواهیم بدانیم که آیا نقطه‌ای مانند $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد یا نه؟ برای این کار، کافی است مختصات نقطه داده‌شده را به جای x و y در رابطه خط قرار دهیم. اگر تساوی برقرار بود (یا اصطلاحاً نقطه در معادله خط صدق کرد)، می‌گوییم این نقطه روی خط داده‌شده قرار دارد. در غیر این صورت نقطه داده‌شده روی خط نیست. در این مثال نیز داریم:

$$\text{نقطه } \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ روی خط } y = 2x + 1 \text{ قرار دارد.} \Rightarrow 7 = 2 \times 3 + 1 \Rightarrow 7 = 7$$

نتیجه اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ روی خط $y = ax + b$ قرار داشته باشد، آن‌گاه با قراردادن $x = m$ و $y = n$ در معادله $y = ax + b$ ، باید تساوی برقرار باشد. یعنی خواهیم داشت:

$$n = am + b$$

مثال الف) اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} a-2 \\ a+1 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 3x + 5$ باشد، مقدار a کدام است؟

ب) آیا این خط از نقطه $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند؟

پاسخ الف) با توجه به نتیجه بالا داریم:

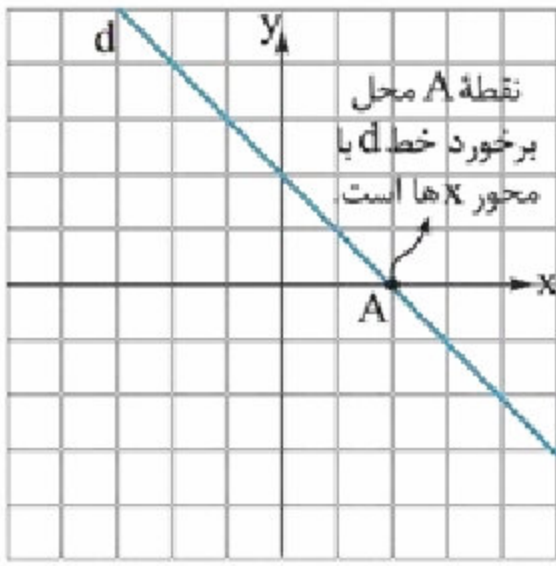
$$y = 3x + 5 \xrightarrow{\substack{x=a-2 \\ y=a+1}} a+1 = 3(a-2) + 5 \Rightarrow a+1 = 3a-6+5$$

$$\Rightarrow a+1 = 3a-1 \Rightarrow 2 = 3a-a \Rightarrow 2 = 2a \Rightarrow a = 1$$

ب) زمانی خط از یک نقطه عبور می‌کند که آن نقطه روی خط قرار داشته باشد. بنابراین داریم:

$$y = 3x + 5 \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=5}} 5 = 3 \times 1 + 5 \Rightarrow 5 = 3 + 5 \Rightarrow 5 \neq 8$$

بنابراین خط $y = 3x + 5$ از نقطه $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ عبور نمی‌کند. یا به بیان دیگر نقطه B روی خط $y = 3x + 5$ قرار ندارد.



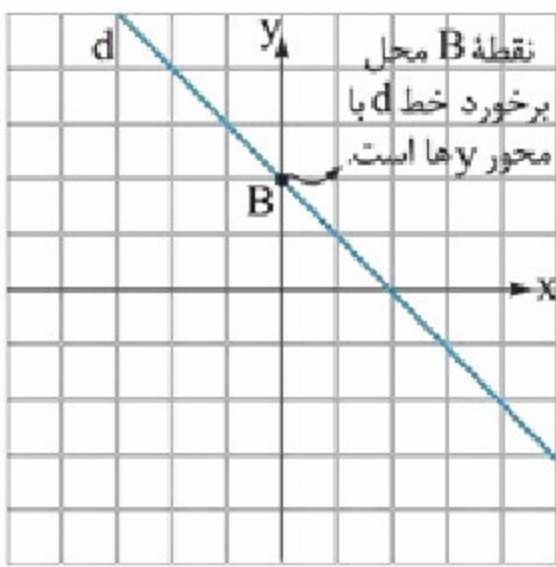
• **پیدا کردن مختصات نقطه برخورد یک خط با محور xها:** همان‌طور که در شکل روبه‌رو

می‌بینید، عرض نقطه برخورد خط d با محور x ها برابر صفر است. بنابراین برای پیدا کردن محل برخورد هر خط دلخواه با محور x ها، کافی است، y را برابر صفر قرار دهیم تا مقدار x به دست آید.

مثال مختصات محل برخورد خط $y = 5x - 2$ با محور x ها را به دست آورید.

پاسخ باید مقدار y را برابر صفر قرار دهیم تا طول محل برخورد این خط با محور x ها به دست بیاید:

$$y = 5x - 2 \xrightarrow{y=0} 0 = 5x - 2 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{مختصات محل برخورد با محور } x \text{ها: } \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$



• **پیدا کردن مختصات محل برخورد یک خط با محور yها:** همان‌طور که در شکل روبه‌رو

مشاهده می‌کنید، طول نقطه محل برخورد خط d با محور y ها برابر صفر است. بنابراین برای به دست آوردن مختصات محل برخورد هر خط با محور y ها، کافی است x را برابر صفر قرار دهیم تا مقدار y به دست بیاید.

مثال مختصات محل برخورد خط $y = 5x - 2$ با محور x ها را به دست آورید.

پاسخ باید مقدار x را برابر صفر قرار دهیم تا عرض نقطه محل برخورد این خط با محور y ها به دست بیاید:

$$y = 5x - 2 \xrightarrow{x=0} y = 5 \times 0 - 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \text{مختصات محل برخورد با محور } y \text{ها: } \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

مثال از برخورد خط $y = 2x - 4$ با محورهای مختصات، یک مثلث درست شده است. مساحت آن را به دست آورید.

پاسخ ابتدا باید مختصات نقاط محل برخورد این خط با دو محور x و y را به دست آوریم:

$$\text{مختصات نقطه محل برخورد خط با محور } x \text{ها: } y = 2x - 4 \xrightarrow{y=0} 0 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

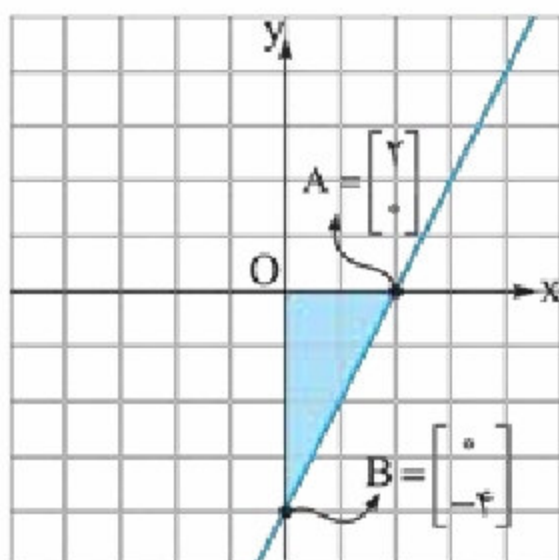
$$\text{مختصات نقطه محل برخورد خط با محور } x \text{ها: } A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{مختصات نقطه محل برخورد خط با محور } y \text{ها: } y = 2x - 4 \xrightarrow{x=0} y = 2 \times 0 - 4 \Rightarrow y = -4$$

$$\text{مختصات نقطه محل برخورد خط با محور } y \text{ها: } B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

حالا به راحتی می‌توانیم مساحت مثلث OAB را محاسبه کنیم:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} OA \times OB = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$



پرسش‌های تشریحی

۱ به هر یک از سؤالات زیر پاسخ مناسب دهید.

۱ اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} m+1 \\ m-1 \end{bmatrix}$ روی محور طول‌ها باشد، مقدار m چه قدر است؟

۲ اگر نقطه $B = \begin{bmatrix} 2m-4 \\ 3m+6 \end{bmatrix}$ روی محور عرض‌ها باشد، مقدار m چه قدر است؟

۳ اگر نقطه $C = \begin{bmatrix} 3m+1 \\ 2m-5 \end{bmatrix}$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، مقدار m چه قدر است؟

۴ اگر نقطه $D = \begin{bmatrix} 2m-6 \\ 2m+22 \end{bmatrix}$ روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم باشد، مقدار m چه قدر است؟

۲ در هر یک از قسمت‌های زیر، مقدار m را تعیین کنید.

۱ اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} m+5 \\ 2m+9 \end{bmatrix}$ در ناحیه سوم باشد، آن‌گاه حدود m را بیابید.

۲ اگر نقطه $B = \begin{bmatrix} m-3 \\ 3m-12 \end{bmatrix}$ در ناحیه چهارم باشد، آن‌گاه حدود m را بیابید.

۳ برای هر یک از قسمت‌های زیر، پاسخ مناسب بنویسید.

۱ مختصات نقطه وسط پاره‌خطی که دو نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -13 \\ 17 \end{bmatrix}$ را به هم وصل می‌کند، به دست آورید.

۲ نقطه‌ای به طول ۸ روی محور طول‌ها و نقطه دیگری به عرض ۴ روی نیمساز ناحیه دوم را به هم وصل می‌کنیم. مختصات نقطه وسط پاره‌خط واصل را به دست آورید.

۴ اگر بدانیم نقطه $M = \begin{bmatrix} m \\ 3-n \end{bmatrix}$ وسط پاره‌خط واصل بین نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} 2m-2 \\ 5-2n \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m+6 \\ 4+n \end{bmatrix}$ است، آن‌گاه مختصات نقطه M را پیدا کنید.

۵ فاصله‌های خواسته‌شده را بدست آورید.

۱ فاصله نقطه $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ از مبدأ مختصات چه قدر است؟

۲ فاصله دو نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -11 \\ 2 \end{bmatrix}$ چه قدر است؟

۶ اگر فاصله دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 3+m \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4-m \end{bmatrix}$ برابر $5\sqrt{2}$ واحد باشد، مقدار m را تعیین کنید.

۷ مثلث ABC به مختصات $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

۱ ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲ طول میانه BM چه قدر است؟

۳ طول ارتفاع CH چه قدر است؟

۸ شمعی در حال سوختن است. در هر دقیقه ۲ سانتی‌متر از طول شمع کم می‌شود. جدول زیر را کامل کنید.

زمان (دقیقه) x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
طول شمع (cm) y	۲۰					

۱ پس از ۷ دقیقه، چند سانتی‌متر از شمع باقی مانده است؟

۲ رابطه بین زمان و طول شمع (y و x) را بنویسید.



۹ اگر طول ضلع یک مکعب را با x و حجم آن را با y نمایش دهیم:

۱ چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟

$$(x) \text{ ضلع } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \dots \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow y = \dots\dots$$

$$(y) \text{ حجم}$$

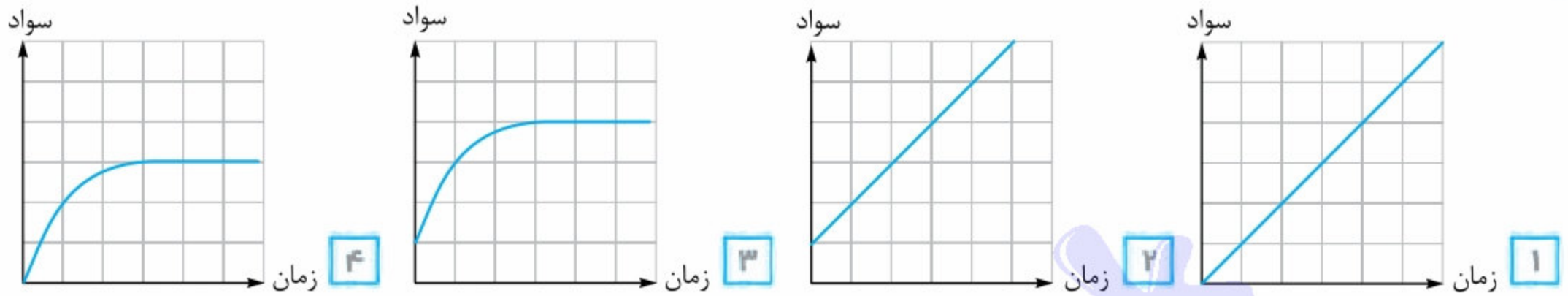
۲ اگر طول یال‌های یک مکعب مستطیل برابر x ، $2x$ و $3x$ واحد باشند و مساحت کل آن را با y نمایش دهیم، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟

۱۰ طول یک فنر ۲۰ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه $y = 0.9x + 20$ پیدا می‌شود.

۱ اگر وزنه‌ای ۵ کیلوگرمی به فنر وصل کنیم، طولش چه قدر می‌شود؟

۲ پس از وصل کردن یک وزنه، فنر ۱۸ سانتی‌متر کشیده شده، وزنه چند کیلوگرم بوده است؟

۱۱ کدام نمودار سطح سواد یک انسان از هنگام تولد تا زمان مرگ را به درستی نشان می‌دهد؟ چرا؟



۱۲ پنج پاسخ مختلف برای معادله $y = -2x + 6$ بنویسید.

$$\begin{cases} x = \dots\dots \\ y = \dots\dots \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dots\dots \\ y = \dots\dots \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dots\dots \\ y = \dots\dots \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dots\dots \\ y = \dots\dots \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dots\dots \\ y = \dots\dots \end{cases}$$

آیا این تساوی، اتحاد است؟ چرا؟

۱۳ نمودار خط با معادله‌های زیر را رسم کنید.

۱ $y = x + 2$

۲ $y = -2x + 1$

۳ $y = 3x$

۴ $y = -\frac{3}{4}x + 2$

۵ $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

۱۴ معادله خطوط زیر را بنویسید.

۱ معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و مبدأ مختصات عبور می‌کند.

۲ معادله خطی که از نقطه $\begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix}$ و مبدأ مختصات عبور می‌کند، به صورت $y = \frac{3}{4}x + c$ است. مقادیر a و c را به دست آورید.

۱۵ تعیین کنید که نقاط داده‌شده روی خطوط داده‌شده در هر قسمت قرار دارند یا نه.

۱ آیا نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی خط $2x + y = 4$ قرار دارد؟

۲ آیا نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ روی خط $2x - 3y - 2 = 0$ قرار دارد؟

۳ سه نقطه مختلف روی خط $x + \frac{y}{4} = 3$ بنویسید.

۱۶ در هر یک از قسمت‌های زیر، مختصات نقاط موردنظر را بدست آورید.

۱ مختصات نقطه‌ای به طول ۳ را روی خط $y = 3x - 2$ پیدا کنید.

۲ مختصات نقطه‌ای به عرض ۲- را روی خط $2y - \frac{x}{3} = 1$ پیدا کنید.

۱۷ به هر یک از سؤالات زیر پاسخ مناسب دهید.

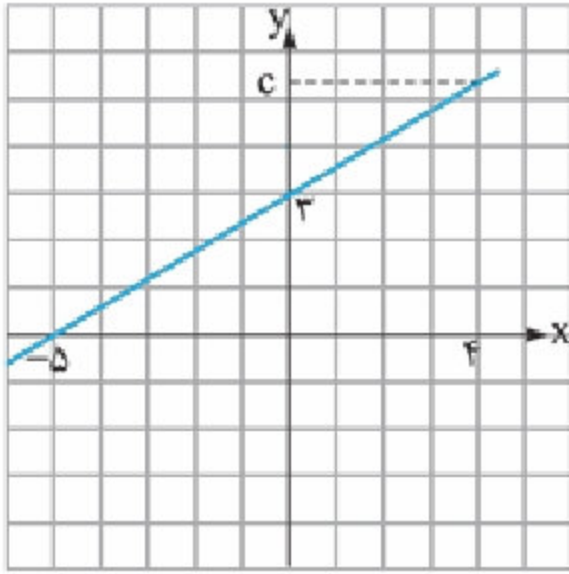
۱ مختصات محل برخورد خط $y = 3x + 15$ با محورهای مختصات را پیدا کنید.

۲ مساحت مثلثی که خط $x - 2y = 4$ با محورهای مختصات می‌سازد را به دست آورید.

۱۸ برای هر یک از بخش‌های زیر، پاسخ مناسب ارائه دهید.

۱ اگر بدانیم خط $ax + 3y = a + 3$ از نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، آن‌گاه نقطه‌ای به طول ۲ روی این خط بیابید.

۲ اگر بدانیم خط $ax - by = 4$ محور طول‌ها را در نقطه -2 و محور عرض‌ها را در نقطه ۶ قطع می‌کند، آن‌گاه نقطه‌ای به عرض ۳ روی این خط، چه طولی دارد؟



۱۹ اگر معادله خط مقابل به صورت $y = ax + b$ باشد، آن‌گاه مقدار عددی c چه قدر است؟

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱ نقطه $A = \begin{bmatrix} 2a-3 \\ b+4 \end{bmatrix}$ روی محور طول‌ها و نقطه $B = \begin{bmatrix} 2a+4 \\ 2b-5 \end{bmatrix}$ روی محور عرض‌ها قرار دارند، نقطه $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ در کدام ناحیه قرار می‌گیرد؟
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۲ اگر نقطه $\begin{bmatrix} m-2 \\ m-5 \end{bmatrix}$ در ناحیه دوم محورهای مختصات قرار داشته باشند، حدود m کدام است؟
 (۱) $m < 2$ (۲) $m > 5$ (۳) $2 < m < 5$ (۴) هیچ‌کدام

۳ در ناحیه اول محورهای مختصات قرار دارد. اگر بدانیم دو برابر فاصله A تا محور عرض‌ها با سه برابر فاصله A تا محور طول‌ها برابر است، آن‌گاه مقدار m برابر است با:
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴ اگر نقطه $M = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ وسط پاره‌خط AB باشد که $A = \begin{bmatrix} a+3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2b+1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه ab برابر است با:
 (۱) -56 (۲) -42 (۳) -28 (۴) 14

۵ مثلث ABC به مختصات $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. طول میانه AM چه قدر است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -11 \end{bmatrix}$ و M نقطه وسط پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه عمودمنصف AM ، پاره‌خط AB را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟
 (۱) $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2/5 \\ 8 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 8 \\ 2/5 \end{bmatrix}$

۷ دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 2\alpha+1 \\ 3\alpha-2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4\alpha-3 \\ 5\alpha-6 \end{bmatrix}$ را به هم وصل می‌کنیم. اگر M نقطه وسط پاره‌خط AB ، روی محور طول‌ها قرار داشته باشد، آن‌گاه اندازه پاره‌خط AM چه قدر است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{7}$

۸ x و y با هم رابطه خطی دارند. در جدول، به جای ؟ چه عددی قرار می‌گیرد؟

x	۱	۲	-۳
y	۵	?	-۷

(۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

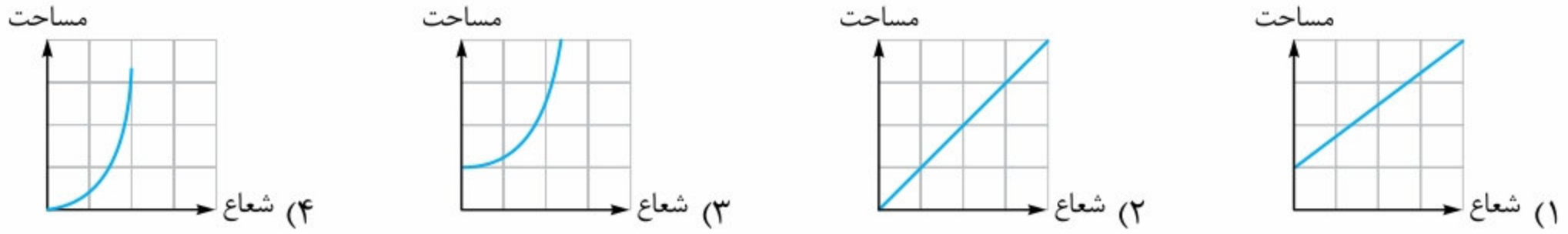


۹ اگر x و y رابطه خطی داشته باشند و بدانیم $y = (\frac{m}{3} + 1)x^2 - (2n + 8)x^2 - nx + m$ ، آن‌گاه به ازای $x = 1$ ، مقدار عددی y برابر کدامیک از گزینه‌های زیر می‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) ۷

(نمونه دولتی - آذربایجان شرقی - ۹۷ - ۹۶)

۱۰ کدامیک از نمودارهای زیر، رابطه بین شعاع و مساحت دایره را نشان می‌دهد؟



۱۱ تعداد نقاط به مختصات طبیعی روی خط $x + y = 1397$ برابر است با:

- (۱) ۱۳۹۷ تا (۲) ۱۳۹۶ تا (۳) ۱۳۹۸ تا (۴) بی‌شمار نقطه

۱۲ x و y اعداد طبیعی هستند، به طوری که $x < 40$ و $y \geq 3$. تعداد نقاط $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ روی خط به معادله $y = -\frac{x}{4} + 8$ چقدر است؟

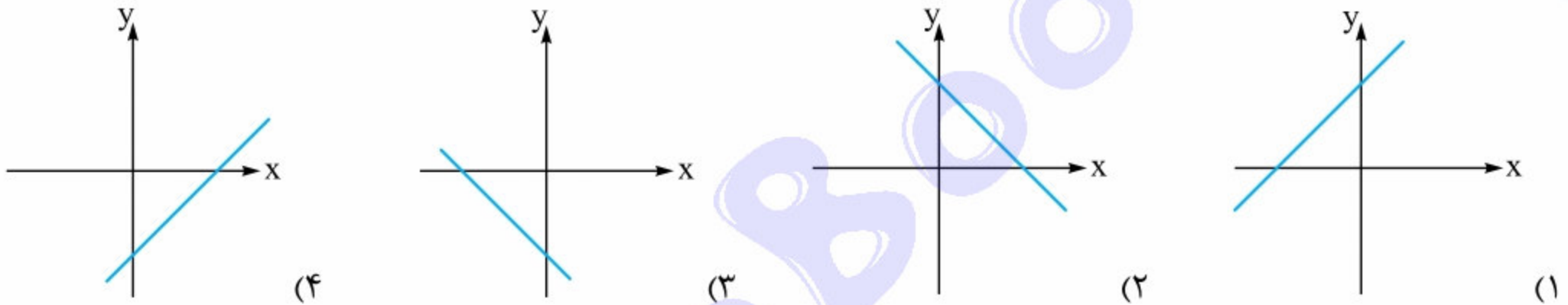
- (۱) ۴ تا (۲) ۵ تا (۳) ۶ تا (۴) ۷ تا

۱۳ کدامیک از معادله‌های زیر، معادله یک خط راست است؟

- (۱) $x^2 = y^2 + 2$ (۲) $y = \frac{x}{3}(x-1)$ (۳) $3x - \frac{5y}{2} = 7$ (۴) $x + y = a$ (متغیر a)

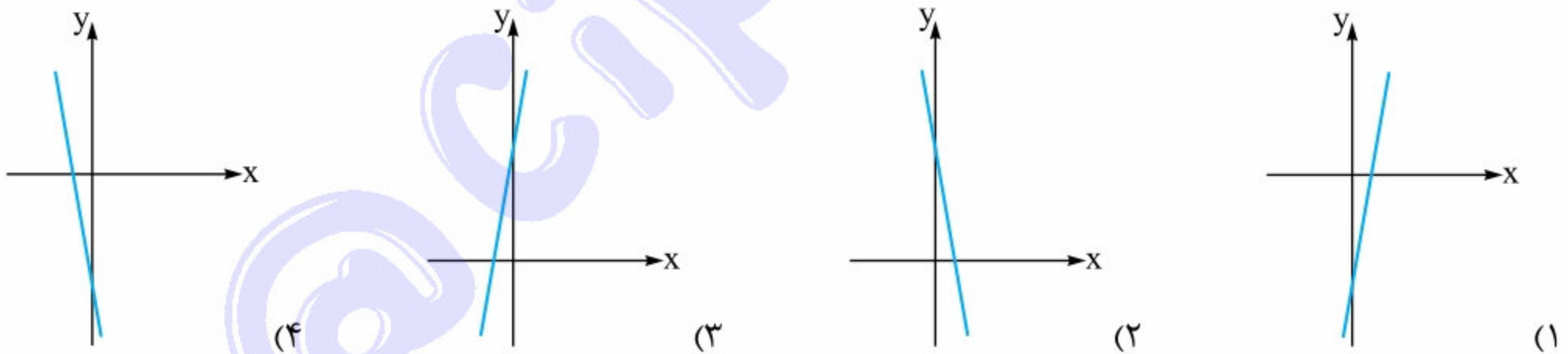
(نمونه دولتی - لرستان - ۹۷ - ۹۶)

۱۴ کدامیک از گزینه‌های زیر می‌تواند نمودار خط به معادله $y = x - 2$ باشد؟



(نمونه دولتی - کردستان - ۹۷ - ۹۶)

۱۵ کدامیک از گزینه‌های زیر می‌تواند نمودار خط به معادله $\frac{2}{5}y + \frac{5}{2}x = 1$ باشد؟



(نمونه دولتی - گیلان - ۹۷ - ۹۶)

۱۶ نمودار خط $y = \frac{2+x}{3}$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

(نمونه دولتی - سمنان - ۹۷ - ۹۶)

۱۷ مساحت مثلثی که خط $2x + 4y = 12$ با محورهای مختصات می‌سازد، کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۱۸

۱۸ کدامیک از خطوط زیر از مبدأ مختصات عبور می‌کند؟

- (۱) $y = x - 1$ (۲) $2y = 3x + 2$ (۳) $2x - 3y = 0$ (۴) $3y - 2x = 1$

۱۹ معادله خط مقابل برابر کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) $36y = 5x$

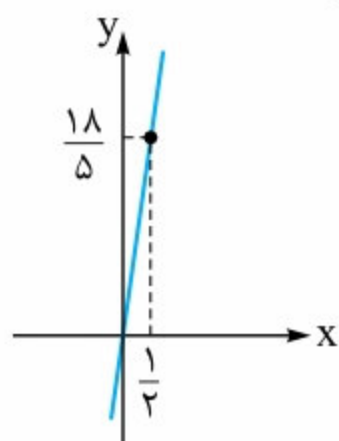
(۲) $y = \frac{18}{5}x + \frac{1}{2}$

(۳) $5y = 36x$

(۴) $5x = 9y$

۲۰ اگر خط $y + 3m = (m + 2)x + 9$ از مبدأ مختصات عبور کند، آن‌گاه مقدار m برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۲۱ کدام یک از نقاط زیر روی خط $2y - 5x = 7$ قرار ندارد؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$

۲۲ اگر نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ روی خط به معادله $y = ax + 3$ قرار داشته باشد، آن گاه کدام یک از نقاط زیر روی همین خط واقع است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

۲۳ عرض نقطه‌ای از خط به معادله $y = \frac{3}{4}x - 4$ که طول آن برابر ۲۱ می‌باشد، برابر است با:

- (۱) ۱۷ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۲۱

(نمونه دولتی - قم - ۹۷ - ۹۶)

۲۴ خط $x + 3y - 1 = 0$ از نقطه $\begin{bmatrix} 2a+1 \\ 1-a \end{bmatrix}$ می‌گذرد. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۵ می‌دانیم دو نقطه $\begin{bmatrix} 2a-1 \\ 3b+1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3a+1 \\ 5 \end{bmatrix}$ روی خط به معادله $y = 2x + 21$ قرار دارند. حاصل $a + b$ چه قدر است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۲۶ خط به معادله $2x + 4y - 20 = 0$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. طول پاره خط AB چه قدر است؟

- (۱) ۵ (۲) $5\sqrt{3}$ (۳) $5\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{7}$

۲۷ خط $d: mx + (m-3)y = 9$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع می‌کند. این خط محور عرض‌ها را در چه عرضی قطع می‌کند؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) -۶

۲۸ خط به معادله $d: 2kx + (3k-1)y = 12 - 6k$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -۳ قطع می‌کند. نقطه‌ای به طول ۳ روی این

خط چه عرضی دارد؟

- (۱) $2/4$ (۲) $-2/4$ (۳) $4/8$ (۴) $-4/8$

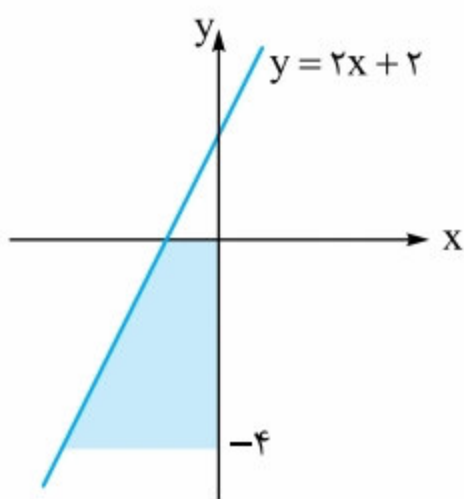
۲۹ می‌دانیم خط به معادله $ax + 4y = 20$ با محورهای مختصات، یک مثلث متساوی‌الساقین در ناحیه دوم می‌سازد. در این صورت نقطه‌ای

به عرض ۴ روی این خط، چه طولی دارد؟

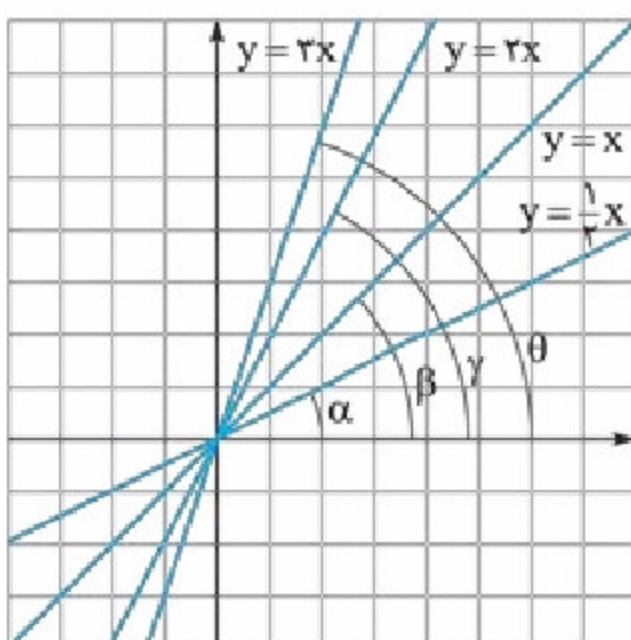
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۳۰ با توجه به شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی برابر است با:

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶



درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ



به شکل روبه‌رو نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید، در این شکل خط‌های $y = x$ ، $y = \frac{1}{2}x$ ، $y = 2x$ و $y = 3x$ رسم شده‌اند. همه این خط‌ها یک خاصیت مشترک دارند. همگی آن‌ها از مبدأ مختصات عبور کرده‌اند. به عبارت دیگر مقدار b (در رابطه $y = ax + b$) در همه این خط‌ها برابر صفر است و فرم کلی این خط‌ها به صورت $y = ax$ است.

نتیجه $y = ax$ ، صورت کلی خط‌هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

بعد از بیان وجه اشتراک خط‌های شکل روبه‌رو، می‌توانیم برویم سراغ تفاوت این چهار خط با هم! 😊

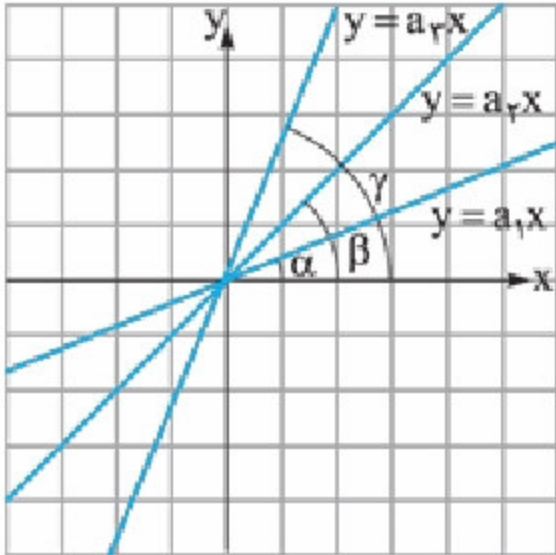
همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، تفاوت این ۴ خط در زاویه هر یک از آن‌ها با جهت مثبت محور x ها است. (راستی اسم زاویه‌های فطحی شکل بالا با محور x ها این‌طور می‌شود! آلفا؛ α ، بتا؛ β ، گاما؛ γ ، تتا؛ θ ، فیلی فاربین! مگه نه! 😊) مقدار این زاویه‌ها با مقدار a مربوط به هر خط متناسب

است. یعنی داریم:

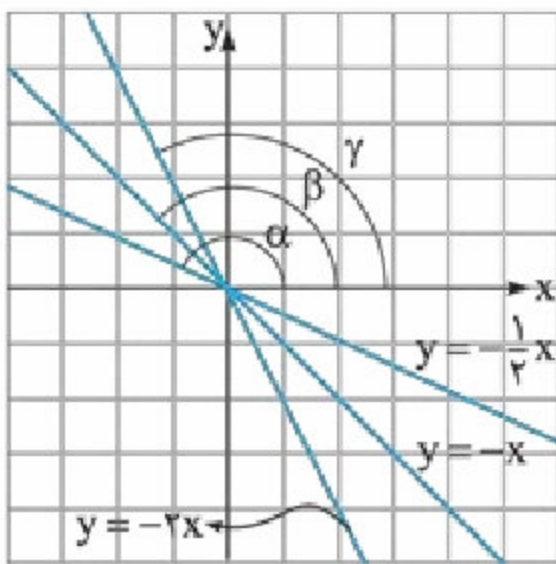
$$y=3x \quad y=x \quad y=2x \quad y=\frac{1}{2}x$$

$$3 > 2 > 1 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta > \gamma > \beta > \alpha$$

تعریف در معادله $y = ax + b$ ، عدد a ، شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر a ، زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها تغییر می‌کند و در حالت کلی داریم:



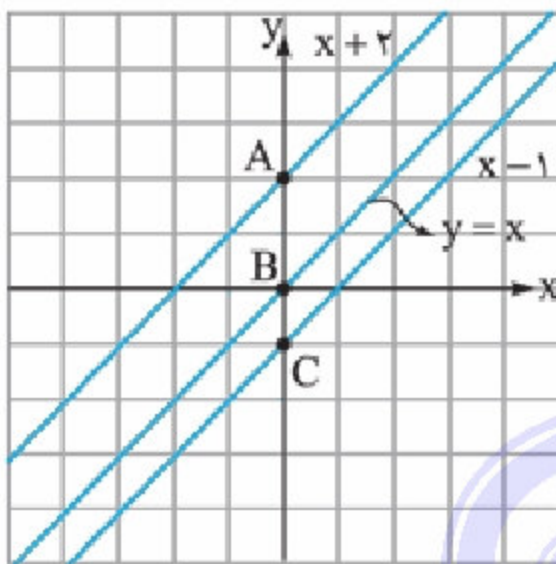
۱ اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه زاویه خط با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ای حاده است و با افزایش مقدار a ، اندازه این زاویه افزایش می‌یابد. یعنی داریم: $a_3 > a_2 > a_1 > 0 \Leftrightarrow \gamma > \beta > \alpha > 0$



۲ اگر $a < 0$ باشد، آن‌گاه زاویه خط با جهت مثبت محور y ها، زاویه‌ای منفرجه است و با افزایش a ، این زاویه افزایش می‌یابد. به عنوان مثال برای شکل روبه‌رو داریم:

$$0 > -\frac{1}{2} > -1 > -2 \Leftrightarrow \alpha > \beta > \gamma > 90^\circ$$

عرض از مبدأ



به شکل روبه‌رو نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید، شیب هر سه خط با هم برابر است ($a = 1$). تفاوت این سه خط در محل برخورد آن‌ها با محور y ها است (یعنی نقاط A ، B و C). هم‌چنین تفاوت رابطه‌های مربوط به این سه خط هم تنها در مقدار b آن‌ها است. یعنی داریم:

$$y = x + 2 \quad y = x + 0 \quad y = x - 1$$

$$b = 2 \quad b = 0 \quad b = -1$$

عرض نقطه A ، ۲ واحد بالاتر از مبدأ، عرض نقطه B روی مبدأ و عرض نقطه C ، ۱ واحد پایین‌تر از مبدأ قرار دارد که متناسب با مقدار b در هر یک از این خط‌ها است.

تعریف در معادله خط $y = ax + b$ ، عدد b نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌ها (یا همون y ها) است. به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

آقا اجازه! ممل بر فورده فط با محور طول‌ها اسم قاصی ندارد!

بله، داره! به طول ممل بر فورده فط با محور طول‌ها، طول از مبدأ می‌گن!

نوشتن معادله خط

برای نوشتن معادله یک خط، براساس اطلاعات مسئله، سه راه کلی وجود دارد:

۱- **نوشتن معادله خط با دانستن شیب و عرض از مبدأ آن:** اگر در صورت مسئله شیب و عرض از مبدأ خط مشخص شده باشد، به راحتی با جایگزین کردن آن‌ها در رابطه $y = ax + b$ ، معادله خط موردنظرمان به دست می‌آید. (البته فیلی بعیده تو امتحان سوال به این سادگی بدن! 😊)

مثال معادله خطی را بنویسید که شیب آن برابر ۵ و عرض آن از مبدأ آن برابر -۷ باشد.

پاسخ کافی است در معادله خط، a را برابر ۵ و b را برابر -۷ قرار دهیم (به همین راحتی 😊):

$$y = ax + b \xrightarrow[b=-7]{a=5} y = 5x - 7$$

• **۲- نوشتن معادله خط با دانستن شیب آن خط و یک نقطه از آن:** در این حالت معادله خطی براساس شیب داده شده می‌نویسیم و به جای عرض از مبدأ، b را قرار می‌دهیم. در درس اول یاد گرفتیم که اگر نقطه‌ای روی یک خط قرار داشته باشد، آن‌گاه اگر طول و عرض آن نقطه را در معادله آن خط قرار دهیم، باید دو طرف معادله با هم برابر باشند. این کار را در معادله خط به دست آمده انجام می‌دهیم تا بتوانیم مقدار b را به دست آوریم. **با به مثال همه‌پیز روشن می‌شه!**

مثال معادله خطی را بنویسید که شیب آن برابر -2 باشد و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ عبور کند.

پاسخ در صورت مسئله شیب خط موردنظر و یک نقطه از خط مشخص شده است. بنابراین داریم:

$$y = ax + b \xrightarrow{a=-2} y = -2x + b$$

حالا مختصات نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ را در معادله $y = -2x + b$ قرار می‌دهیم تا مقدار b به دست بیاید.

$$y = -2x + b \xrightarrow[\substack{x=3 \\ y=5}]{} 5 = -2 \times 3 + b \Rightarrow 5 = -6 + b \Rightarrow b = 5 + 6 = 11 \Rightarrow y = -2x + 11$$

• **۳- نوشتن معادله خط با دانستن مختصات دو نقطه از آن:** اگر در صورت سؤال، مختصات دو نقطه از یک خط را بدهند، می‌توانیم معادله خط گذرنده از آن دو نقطه را بنویسیم. به این صورت که به وسیله رابطه زیر ابتدا شیب خط موردنظر (یعنی a) را به دست می‌آوریم. سپس معادله خطی با شیب به دست آمده را می‌نویسیم و به جای عرض از مبدأ، b را قرار می‌دهیم. سپس مختصات یکی از دو نقطه بیان شده در صورت سؤال را به دلخواه در معادله به دست آمده قرار می‌دهیم تا مقدار b به دست بیاید.

نکته اگر خطی از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ بگذرد، شیب این خط از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ عبور کند.

پاسخ با توجه به این که در صورت سؤال، مختصات دو نقطه از خط مشخص شده است، ابتدا شیب خطی که از این دو نقطه عبور می‌کند

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 5}{7 - 3} = \frac{5}{4}$$

را به دست می‌آوریم:

$$y = ax + b \xrightarrow{a=\frac{5}{4}} y = \frac{5}{4}x + b$$

حالا براساس شیب به دست آمده، معادله خط را می‌نویسیم:

مختصات یکی از نقطه‌های A و B را به دلخواه (مثلاً نقطه A) در معادله خط به دست آمده قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{5}{4}x + b \xrightarrow[\substack{x=3 \\ y=5}]{} 5 = \frac{5}{4} \times 3 + b \Rightarrow 5 = \frac{15}{4} + b \Rightarrow b = 5 - \frac{15}{4} = \frac{20 - 15}{4} \Rightarrow b = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$$

نوشتن معادله خط‌های موازی

اگر شیب دو خط با هم برابر باشد، آن‌گاه آن خط‌ها با هم موازی هستند. به عبارت دیگر شرط موازی بودن دو خط، برابری شیب آن‌ها است.

مثال معادله خطی را بنویسید که موازی با خط $y = -3x - 7$ باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ با توجه به توضیحات بالا، شیب خط موردنظر برابر -3 است، بنابراین داریم:

$$y = ax + b \xrightarrow{a=-3} y = -3x + b \xrightarrow[\substack{x=4 \\ y=2}]{} 2 = -3 \times 4 + b \Rightarrow 2 = -12 + b \Rightarrow b = 12 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow y = -3x + 14$$

نوشتن معادله خط‌های عمود بر هم

برای نوشتن معادله دو خط عمود بر هم، باید به این نکته توجه کرد که اگر شیب خط اول برابر a_1 و شیب خط دوم برابر a_2 باشد و بدانیم این دو خط بر هم عمود هستند، آن‌گاه حاصل ضرب شیب‌های دو خط برابر -1 می‌شود، یعنی داریم:

$$a_1 \times a_2 = -1$$

$$-3 \times \frac{1}{3} = -1$$

به عنوان مثال خط‌های $y = -3x + 1$ و $y = \frac{1}{3}x - 2$ بر هم عمودند، زیرا:

مثال معادله خطی را بنویسید که بر خط $y = \frac{2}{5}x - 2$ عمود باشد و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ با توجه به این که دو خط بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها باید برابر با -1 شود، اگر شیب خط دوم برابر a باشد، داریم:

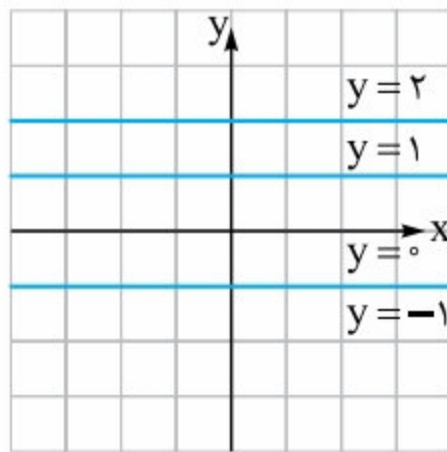
$$\frac{2}{5} \times a = -1 \Rightarrow a = -1 \times \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow y = ax + b \xrightarrow{a = -\frac{5}{2}} y = -\frac{5}{2}x + b$$

حالا مختصات نقطه $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ را درون معادله خط به دست آمده قرار می‌دهیم تا مقدار b به دست آید:

$$y = -\frac{5}{2}x + b \xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=3}} 3 = -\frac{5}{2} \times 0 + b \Rightarrow b = 3 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 3$$

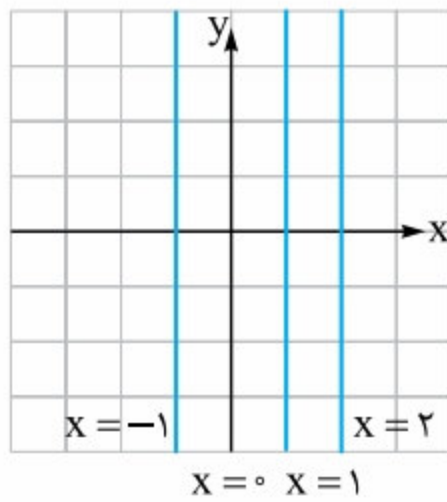
نوشتن معادله خط‌های خاص

تا این‌جا کار با نحوه نوشتن معادله خط بر اساس اطلاعات گوناگونی که مسئله در اختیار ما قرار می‌دهد، آشنا شدیم. اما بعضی از خط‌ها دارای معادله‌های خاص هستند. خط‌های موازی با محور طول‌ها (یا محور عرض‌ها) از این دسته هستند. در این قسمت به بررسی آن‌ها می‌پردازیم:



خط‌های موازی با محور طول‌ها: همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، سه خط موازی و یک خط موازی محور x ها است. توجه داشته باشید که شیب همه این خط‌ها برابر صفر است.

نکته همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، معادله خط منطبق بر محور x ها به صورت $y = 0$ است.

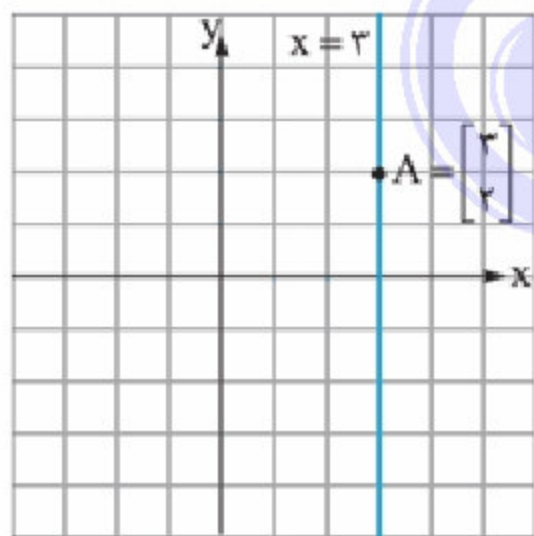


خط‌های موازی با محور عرض‌ها: در شکل روبه‌رو سه خط موازی و یک خط منطبق بر محور y ها رسم شده‌اند. ویژگی مشترک هر یک از این خط‌ها این است که طول نقاط آن‌ها ثابت است و فقط عرض آن‌ها تغییر می‌کند. به همین دلیل برای نمایش این خط‌ها از صورت کلی $x = a$ استفاده می‌کنیم. مثلاً $x = 1$ معادله خطی است که طول همه نقطه‌های آن برابر 1 و موازی محور y ها است. توجه داشته باشید که شیب همه این خط‌ها تعریف نشده است.

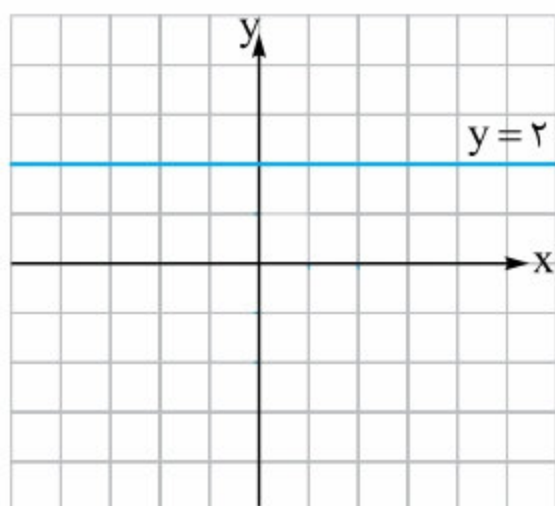
نکته همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، معادله خط منطبق بر محور y ها به صورت $x = 0$ است.

مثال معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند و موازی محور عرض‌ها است.

پاسخ با توجه به توضیحات بالا، طول این خط باید ثابت و برابر 3 باشد. بنابراین معادله خط موردنظر به صورت $x = 3$ است و نمودار آن به صورت روبه‌رو است.



مثال اگر بدانیم معادله $(m-2)x + (m-1)y = 2$ ، نمایانگر خطی موازی محور طول‌ها است، آن‌گاه مقدار m را به دست آورده و خط مورد نظر را رسم کنید.



پاسخ با توجه به توضیحات بیان‌شده، صورت کلی خط موردنظر به صورت $y = a$ است.

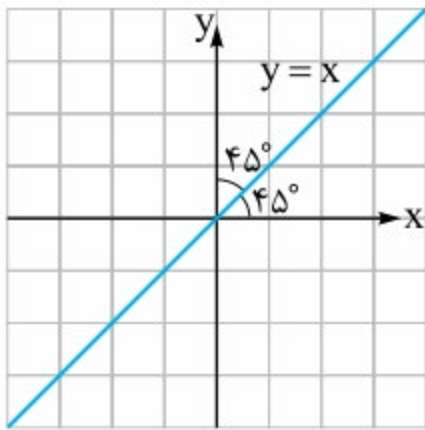
بنابراین باید ضریب x (یعنی $m-2$) برابر صفر شود:

$$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

حالا داریم:

$$(m-2)x + (m-1)y = 2 \xrightarrow{m=2} (2-2)x + (2-1)y = 2 \Rightarrow y = 2$$

نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات

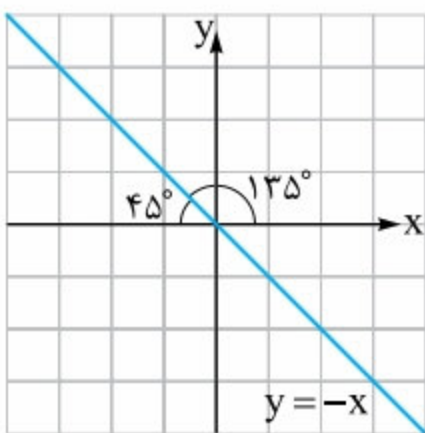


خط $y = x$ نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است. زیرا زاویه آن با محور x ‌ها و y ‌ها، 45° است. ویژگی مشترک نقاط روی این خط این است که طول و عرض هر یک از این نقطه‌ها با هم برابر است.

مثال نقطه $A = \begin{bmatrix} a-1 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$ روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد. a کدام است؟

پاسخ با توجه به توضیحات بیان‌شده، طول و عرض این نقطه باید با هم برابر باشند. بنابراین داریم:

$$a-1 = \frac{a}{3} \xrightarrow{\times 3} 3(a-1) = 3\left(\frac{a}{3}\right) \Rightarrow 3a-3 = a \Rightarrow 3a-a = 3 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$



نیمساز ربع دوم و چهارم دستگاه مختصات

خط $y = -x$ نیمساز ربع دوم و چهارم دستگاه مختصات است. ویژگی مشترک نقطه‌های روی این خط این است که طول و عرض این نقطه‌ها قرینه یکدیگر هستند. یعنی

هر نقطه دلخواه روی این خط را می‌توان به صورت $A = \begin{bmatrix} -m \\ m \end{bmatrix}$ نمایش داد.

مثال نقطه $A = \begin{bmatrix} a-1 \\ a+2 \end{bmatrix}$ روی نیمساز ربع دوم و چهارم قرار دارد. a کدام است؟

پاسخ با توجه به توضیحات بیان‌شده، طول و عرض این نقطه باید قرینه یکدیگر باشند، بنابراین داریم:

$$a-1 = -(a+2) \Rightarrow a-1 = -a-2 \Rightarrow a+a = -2+1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

صورت کلی معادله خط

تا این‌جا کار معادله همه خط‌هایی که دیدیم و نوشتیم به صورت $y = ax + b$ بودند. به این فرم از نوشتن معادله خط، فرم استاندارد معادله خط گفته می‌شود. اما معادله‌های خط را می‌توان به صورت $Ax + By = C$ نیز نمایش داد. به این فرم از نمایش معادله خط، صورت کلی معادله خط می‌گویند. برای

تبدیل صورت کلی معادله خط به فرم استاندارد آن، به صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم: $Ax + By = C \Rightarrow By = -Ax + C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$

مثال شیب و عرض از مبدأ خط $5x + 3y = 7$ کدام است؟

پاسخ باید صورت کلی معادله خط داده‌شده را به فرم استاندارد آن تبدیل کنیم، بنابراین داریم:

$$5x + 3y = 7 \Rightarrow 3y = -5x + 7 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$$

بنابراین شیب این خط برابر $-\frac{5}{3}$ و عرض آن برابر $\frac{7}{3}$ است.

فاصله یک نقطه از یک خط

فرض کنید می‌خواهیم فاصله نقطه $A = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ را از خط $Ax + By + C = 0$ به دست بیاوریم. (هواستون باشد که تمام جمله‌های خط باید سمت چپ

$$d = \frac{|Am + Bn + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

باشند و سمت راست معادله خط باید صفر باشد). اگر این فاصله را با d نشان دهیم، آن‌گاه داریم:

مثال فاصله نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ از خط $3x - 4y = 5$ کدام است؟

پاسخ با توجه به توضیحات بالا، ابتدا معادله خط را به صورت بیان‌شده در می‌آوریم (یعنی همه جمله‌ها سمت چپ تساوی برود و سمت راست تساوی صفر شود) و سپس از رابطه بیان‌شده برای به دست آوردن پاسخ استفاده می‌کنیم:

$$3x - 4y = 5 \Rightarrow 3x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow d = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 - 12 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-11|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$



پرسش‌های تشریحی

۲۰ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

- ۱ در معادله خط $y = ax + b$ ، عدد a و عدد b نام دارد.
- ۲ با تغییر a در معادله خط $y = ax + b$ ، زاویه خط با تغییر می‌کند.
- ۳ در معادله خط $y = ax + b$ ، عدد b محل برخورد نمودار با محور را نشان می‌دهد.
- ۴ اگر زاویه‌ای که یک خط با محور طول‌ها می‌سازد، بیشتر از 90° باشد، آن‌گاه شیب خط است.
- ۵ خط $x = a$ موازی محور و خط $y = b$ موازی محور است. ($a, b \neq 0$)
- ۶ شیب خط واصل از نقطه $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ از رابطه به دست می‌آید.

۲۱ در هر یک از موارد زیر، شیب و عرض از مبدأ معادله خط داده‌شده را تعیین کنید.

۱ $y = 2x - 3$

۲ $y = \frac{3}{2}x$

۳ $2x + y - 4 = 0$

۴ $\frac{x}{3} + 3y = 7$

۵ $2(x + \frac{1}{3}) + 5(y - 1) = \frac{2}{3}$

۲۲ اگر شیب و عرض از مبدأ خط $y = (2m - 3)x + (3n - 1)$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ باشند، آن‌گاه:

۱ مقادیر عددی m و n را به دست آورید.

۲ خط $y = mx + n$ را رسم کنید.

۳ محل برخورد این خط با محورهای مختصات را مشخص کنید.

۲۳ به هر یک از پرسش‌های زیر، پاسخ مناسب دهید.

۱ اگر شیب خط $y = (3m + 2)x - 2m + 1$ برابر ۴ باشد، آن‌گاه عرض از مبدأ آن چه قدر است؟

۲ اگر عرض از مبدأ خط $(m + 1)y - 2(m - 2)x - 4 = 0$ برابر ۱- باشد، آن‌گاه شیب خط چه قدر است؟

۲۴ معادله خطی را بنویسید که:

۱ شیب آن برابر ۳ و عرض از مبدأ آن برابر ۵ باشد.

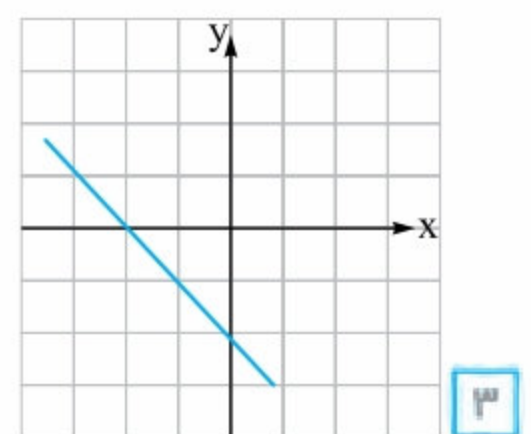
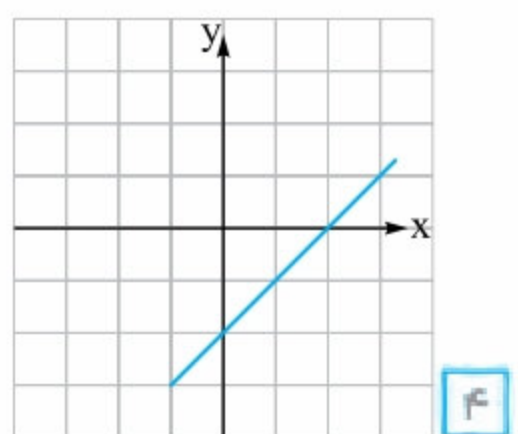
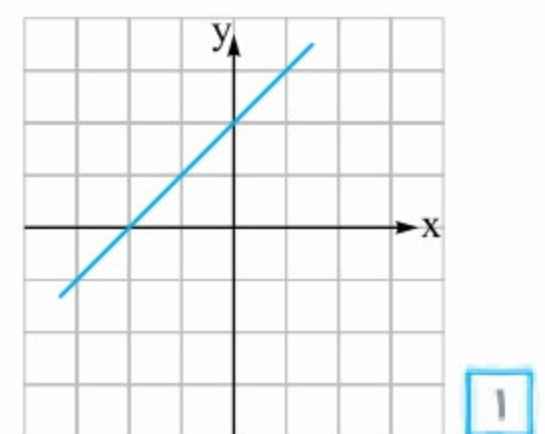
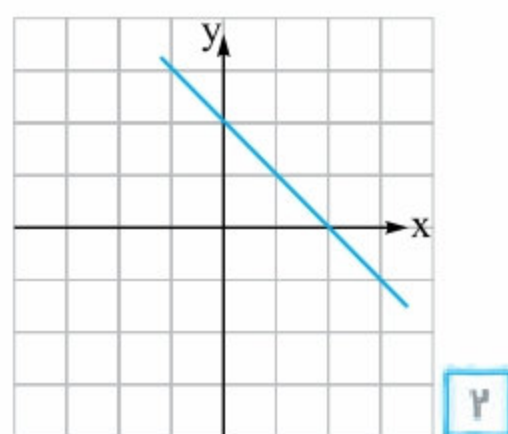
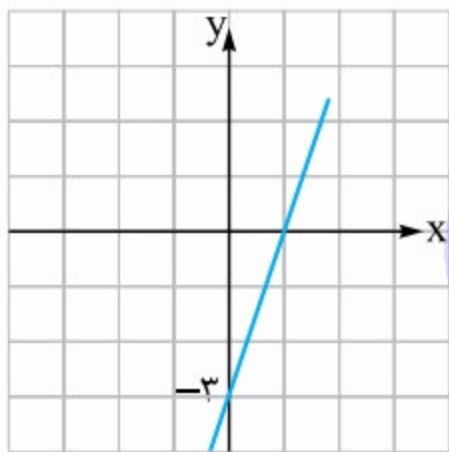
۲ شیب آن دو برابر عرض از مبدأش باشد و مجموع شیب و عرض از مبدأ آن برابر ۹ واحد باشد.

۳ شیب آن برابر $-\frac{2}{3}$ باشد و محور y ها را در نقطه ۴ قطع کند.

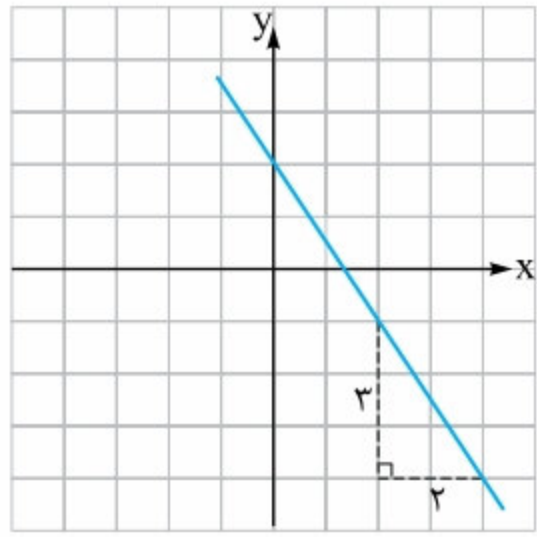
۴ شیب آن برابر ۳ و شکل نمودار آن به صورت مقابل باشد.

۵ شیب آن برابر ۴ بوده و از مبدأ مختصات عبور کند.

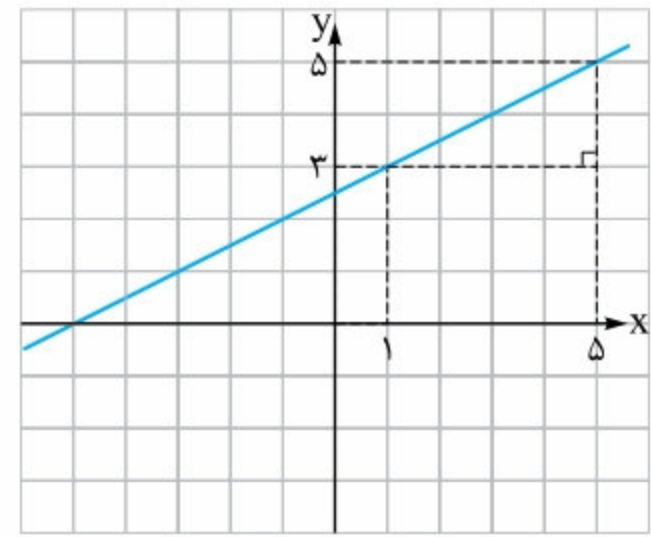
۲۵ در هر یک از حالت‌های زیر، علامت شیب و عرض از مبدأ خط رسم‌شده را تعیین کنید.



۲۶ در هر یک از حالت‌های زیر، شیب خط داده‌شده را محاسبه کنید.



۲



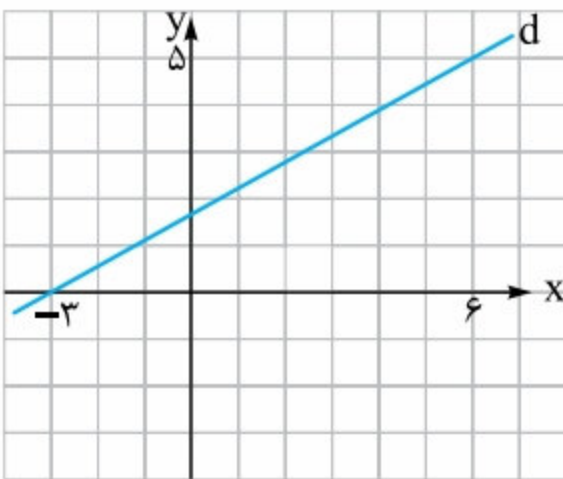
۱

۲۷ شیب هر یک از خطوط زیر را به دست آورید.

۱ شیب خط گذرا از دو نقطه $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۶ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۷ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۲ شیب خط گذرا از دو نقطه $\begin{bmatrix} ۲a \\ a \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۶b \\ ۳b \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۳ با توجه به شکل مقابل، شیب خط d را محاسبه کنید.



۲۸ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱ اگر شیب خط گذرا از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} m+۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ m-۳ \end{bmatrix}$ برابر ۵ باشد، آن‌گاه مقدار m چه قدر است؟

۲ اگر شیب خط گذرا از نقاط $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a \\ ۲a \end{bmatrix}$ برابر شیب خط گذرا از دو نقطه $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۲a \\ a \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مقدار a برابر چه عددی است؟

۲۹ اگر سه نقطه $A = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} a \\ ۲a \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۱۱ \end{bmatrix}$ روی یک خط راست قرار داشته باشند، آن‌گاه مختصات نقطه B را به دست آورید.

۳۰ برای هر یک از سؤالات زیر، پاسخ مناسب ارائه دهید.

۱ خط‌های $y = -۱$ و $x = ۳$ را رسم کنید.

۲ محل تقاطع این دو خط، چه نقطه‌ای است؟

۳ زاویه بین این دو خط چه قدر است؟

۴ معادله محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید.

۳۱ مساحت شکل محدود به چهار خط $x = ۱$ ، $y = -۲$ ، $x = -۳$ و $y = ۴$ را به دست آورید.

۳۲ در هر یک از قسمت‌های زیر ابتدا a را تعیین کرده و سپس خط موردنظر را رسم کنید.

۱ می‌دانیم نقطه $\begin{bmatrix} ۳a-۱ \\ ۲a+۱ \end{bmatrix}$ روی خط $x = ۵$ است. خط $y = ۲a + ۱$ را رسم کنید.

۲ می‌دانیم $\begin{bmatrix} ۳a+۴ \\ ۵a-۷ \end{bmatrix}$ روی خط $y = -۱۷$ قرار دارد. خط $x = ۳a + ۴$ را رسم کنید.

۳۳ معادله خطوط خواسته‌شده در هر قسمت را بنویسید.

۱ معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ عبور کرده و موازی محور x ها باشد.

۲ معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ عبور کرده و موازی محور y ها باشد.

۳۴ برای هر یک از قسمت‌های زیر، معادله خط مناسب بنویسید.

۱ معادله خطی را بنویسید که بر خط $y = 3$ عمود بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ عبور کند.

۲ معادله خطی را بنویسید که بر خط $x = -2$ عمود بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ عبور کند.

۳ معادله خطی را بنویسید که در نقطه 10 بر محور عرض‌ها عمود است.

۴ معادله خطی را بنویسید که در نقطه -3 بر محور طول‌ها عمود است.

۳۵ به هر یک از سوالات زیر، پاسخ مناسب دهید.

۱ اگر بدانیم خط $(m+2)x - (m-3)y = 5$ موازی محور x ها است، آن‌گاه این خط محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۲ اگر خط $(m-3)x + (2m+6)y = 3$ بر خط $y = 3m$ عمود باشد، آن‌گاه نقطه تقاطع این دو خط، چه نقطه‌ای است؟

۳۶ در هر کدام از قسمت‌های زیر تعیین کنید که خطوط داده‌شده موازی هستند یا خیر.

۱ $y = 2x + 3$, $y = 2x - 5$

۲ $2x + 3y = 4$, $-6y = 9 + 4x$

۳ $x - 2y - \frac{1}{3} = 0$, $2x - y + \frac{1}{4} = 0$

۴ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $x - \frac{2}{3}y - 4 = 0$

۳۷ در هر یک از بخش‌های زیر، مقدار m را تعیین کنید.

۱ اگر دو خط $y = 2x + 1$ و $y = (\frac{m}{2} - 3)x + 5$ با هم موازی باشند، مقدار عددی m چند است؟

۲ اگر دو خط $2x - 3y - 3 = 0$ و $mx - (m-3)y = 7$ با هم موازی باشند، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۳۸ با توجه به شرایط هر قسمت، مقدار m را به دست آورید.

۱ اگر دو خط $y = -\frac{1}{3}x + 5$ و $y = (2m-1)x + 4$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه مقدار عددی m چه قدر است؟

۲ دو خط $mx + y = 1$ و $4y - mx = 2$ بر هم عمودند. مقادیر قابل قبول برای m را به دست آورید.

۳۹ برای هر یک از بخش‌های زیر، معادله خط مناسب بنویسید.

۱ معادله خطی را بنویسید که شیب آن برابر 2 بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ عبور کند.

۲ معادله خطی را بنویسید که عرض از مبدأ آن برابر -3 بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$ نیز عبور کند.

۴۰ معادله خطی بنویسید که:

۱ از دو نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ عبور کند.

۲ نقطه‌ای به طول 3 روی محور طول‌ها و نقطه‌ای به عرض -4 روی محور عرض‌ها را به هم وصل می‌کند.

۳ نقطه‌ای به عرض 4 روی نیمساز ناحیه اول و سوم را به نقطه‌ای به طول 7 روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم وصل می‌کند.

۴ از مبدأ مختصات و محل برخورد دو خط $x = 3$ و $y = -4$ عبور می‌کند.

۴۱ معادله خطی بنویسید که:

۱ با خط $2y - 4x = 5$ موازی بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ عبور کند.

۲ بر خط $3x - 9y = 4$ عمود بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ عبور کند.

۴۲ سه نقطه $A = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

۱ ثابت کنید این سه نقطه، یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند.

۲ معادله وتر این مثلث را بنویسید.

۴۳ اگر عمودمنصف خط واصل بین نقاط $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$ از نقطه $\begin{bmatrix} 10 \\ a \end{bmatrix}$ عبور کند، آن‌گاه مقدار عددی a چند است؟

۴۴ مثلث ABC به مختصات $A = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

معادله میانه وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۳۱ شیب خط به معادله $\frac{4-3y}{5} = -3x$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۲ عرض از مبدأ خط $-\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y = 0$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) $\frac{8}{10}$ (۲) $\frac{8}{7}$
(۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۳۳ اگر عرض از مبدأ خط $(m-2)x + y = 3x - 2my + 3$ برابر -3 باشد، مقدار m چه قدر است؟ (نمونه دولتی - یزد - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) -1 (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) -4

۳۴ مقدار a چه قدر باشد تا عرض از مبدأ خط $-4 + 3ax + 4a^2y + a^2 = 0$ برابر ۲ باشد؟ (نمونه دولتی - ایلام - ۹۶ - ۹۵)

- (۱) $\pm \frac{2}{3}$ (۲) $\pm \frac{4}{9}$ (۳) $\pm \frac{3}{2}$ (۴) $\pm \frac{9}{4}$

۳۵ اگر شیب خط $(2a+1)y - 3ax = 14$ برابر $\frac{9}{y}$ باشد، آن‌گاه عرض از مبدأ آن برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۶ حاصل مجموع شیب و عرض از مبدأ $\frac{3}{y}(x+2y) - \frac{5}{3}(x+6y) = 6$ ، چند است؟ (نمونه دولتی - زنجان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $-\frac{35}{42}$ (۲) $\frac{35}{42}$ (۳) $-\frac{37}{42}$ (۴) $\frac{37}{42}$

۳۷ شیب خطی مثبت و عرض از مبدأ آن منفی است. این خط از کدام ناحیه مختصاتی نمی‌گذرد؟ (نمونه دولتی - مازندران - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۸ شیب خطی منفی و عرض از مبدأ آن مثبت است. این خط از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟ (نمونه دولتی - سمنان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۹ زاویه بین خطی با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه‌ای تند است و عرض از مبدأ این خط مثبت است. چنین خطی از کدام یک از نقاط زیر

اصلاً عبور نمی‌کند؟ (نمونه دولتی - گلستان - ۹۷ - ۹۶)

(۱) $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$

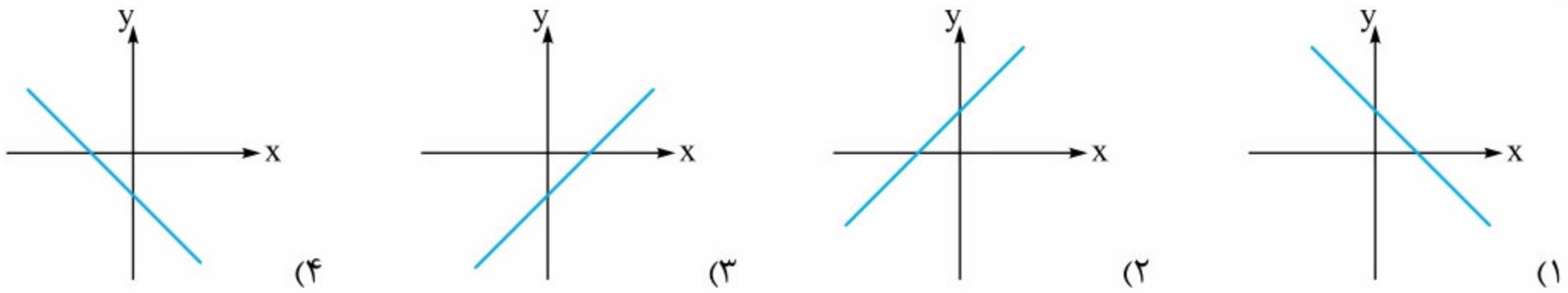
(۳) $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

۴۰ کدام یک از خطوط زیر شامل نقطه‌ای با طول مثبت و عرض منفی نیست؟

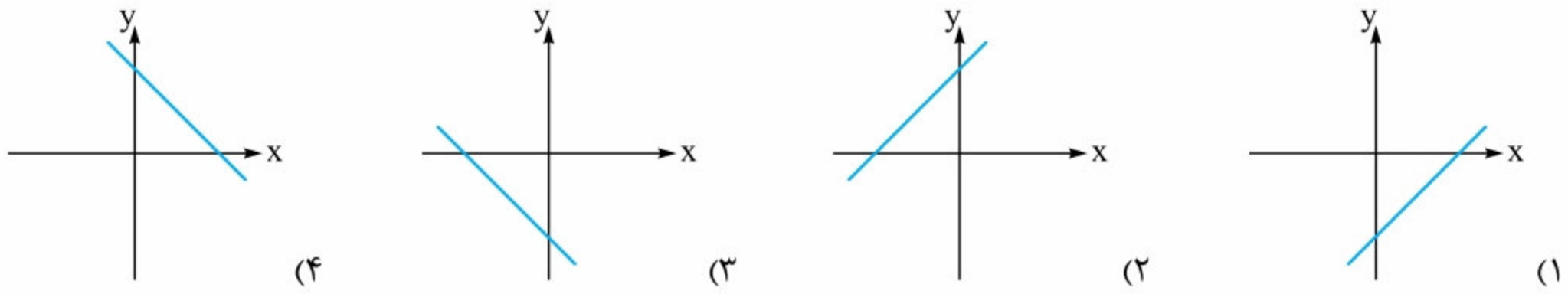
- (۱) $y = 2x + 3$ (۲) $y = 2x - 3$ (۳) $y = -2x + 3$ (۴) $y = -2x - 3$



۴۱ در معادله خط $ax + by + c = 0$ ، اگر $ab > 0$ و $bc < 0$ ، نمودار خط به کدام صورت خواهد بود؟ (نمونه دولتی - چهارمسال و بختیاری - ۹۷ - ۹۶)



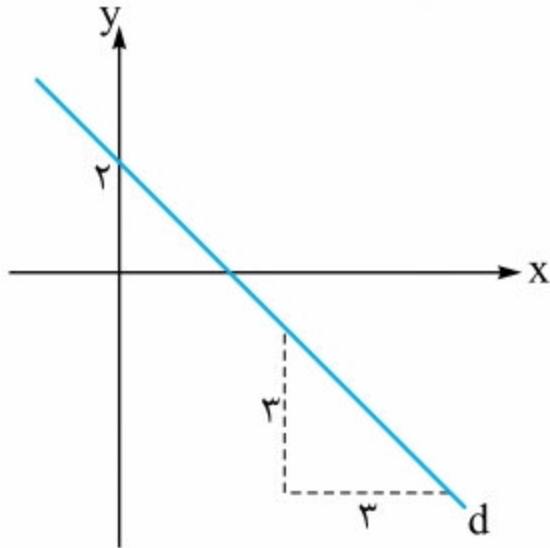
۴۲ در معادله خط $ax - by = 10$ ، می‌دانیم که $ab > 0$ و $a + b < 0$ است. نمودار این خط شبیه کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی - کوهلیویه و پویر احمد - ۹۷ - ۹۶)



۴۳ خطی به معادله $y = -m^2x + m^2 + 1$ به ازای هر $m (m \neq 0)$ ، از کدام ناحیه مختصاتی عبور نمی‌کند؟ (نمونه دولتی - قزوین - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) ناحیه ۱ (۲) ناحیه ۲ (۳) ناحیه ۳ (۴) ناحیه ۴

۴۴ با توجه به شکل، معادله خط d کدام است؟ (نمونه دولتی - آذربایجان شرقی - ۹۷ - ۹۶)



- (۱) $d: x + y = -2$
 (۲) $d: x = 2y - 2$
 (۳) $d: y - x = 2$
 (۴) $d: y + x - 2 = 0$

۴۵ اگر قرینه خط $y = ax + b$ را نسبت به محور عرض‌ها رسم کنیم، شیب و عرض از مبدأ چه تغییری می‌کند؟ ($a, b \neq 0$)

(نمونه دولتی - مازندران - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) شیب و عرض از مبدأ هر دو ثابت می‌ماند.
 (۲) شیب و عرض از مبدأ هر دو قرینه می‌شود.
 (۳) شیب ثابت می‌ماند و عرض از مبدأ قرینه می‌شود.
 (۴) شیب قرینه شده و عرض از مبدأ ثابت می‌ماند.

(نمونه دولتی - سیستان و بلوچستان - ۹۷ - ۹۶)

۴۶ شیب خطی که بردار $\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ روی آن قرار دارد، چه قدر است؟

- (۱) -۴ (۲) ۷ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $-\frac{7}{4}$

۴۷ شیب خطی که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2a+1 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، برابر ۳ است. a برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۸ خط d از نقطه N به مختصات $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ و از نقطه M که روی محور عرض‌ها است، می‌گذرد. اگر شیب خط d برابر $\frac{1}{3}$ باشد، عرض نقطه M کدام است؟ (نمونه دولتی - کرمانشاه - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

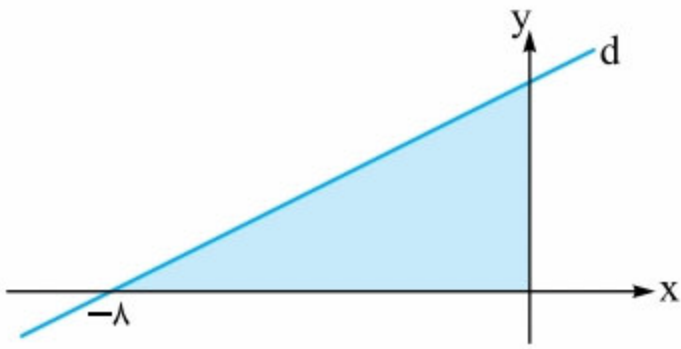
۴۹ نقاط $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \end{bmatrix}$ چه نوع مثلثی می‌سازند؟

- (۱) متساوی‌الاضلاع (۲) متساوی‌الساقین (۳) قائم‌الزاویه (۴) هیچ‌کدام

۵۰ اگر سه نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix}$ روی یک خط قرار داشته باشند، آن‌گاه مقدار عددی x چه قدر است؟

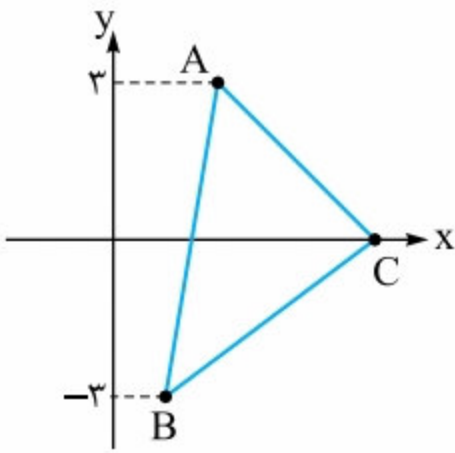
- (۱) $\frac{2}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{4}{8}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۵۱ خط d محور x ها را در نقطه $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$ قطع کرده است. اگر مساحت قسمت رنگ‌شده ۱۶ باشد، شیب خط d چه قدر است؟ (نمونه دولتی - قم - ۹۷ - ۹۶)



- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۲

۵۲ با توجه به شکل زیر، اگر بدانیم شیب خط AB برابر ۶ و شیب خط AC برابر -۲ است، آنگاه شیب خط BC کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۲
- (۳) $\frac{5}{6}$
- (۴) $\frac{6}{5}$

۵۳ معادله خط گذرا از نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ که موازی محور y ها است، برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) $x = -2$
- (۲) $x = 5$
- (۳) $y = -2$
- (۴) $y = 5$

۵۴ معادله خطی که از نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ بگذرد و بر خط $y = -2$ عمود باشد، کدام است؟ (نمونه دولتی - ایلام - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $x = 3$
- (۲) $x = -3$
- (۳) $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
- (۴) $y = -2x + 4$

۵۵ دو خط $x = m$ و $y = n$ یکدیگر را در نقطه $\begin{bmatrix} 3m+8 \\ m^2-n \end{bmatrix}$ قطع می‌کنند. مجموع فواصل این نقطه از محورهای مختصات چه قدر است؟

- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۰
- (۳) ۸
- (۴) ۶

۵۶ خط d به معادله $ax + y + c = 0$ از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و با محور x ها موازی است. کدام گزینه مقادیر a و c را به درستی نشان می‌دهد؟

(نمونه دولتی - فراسان رضوی - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $a = 0$ و $c = 3$
- (۲) $a = 1$ و $c = -3$
- (۳) $a = 1$ و $c = 2$
- (۴) $a = 0$ و $c = 2$

۵۷ مساحت شکلی که از برخورد چهار خط $x = 2$ ، $x = -1$ ، $y = 3$ و $y = -2$ به دست می‌آید، برابر است با: (نمونه دولتی - فارس - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $\frac{7}{5}$
- (۲) ۱۵
- (۳) ۲۰
- (۴) $\frac{10}{5}$

۵۸ اگر خط $2y - ax = 5$ با خط $y + 2 = 5$ موازی باشد، مقدار a چه قدر است؟ (نمونه دولتی - مازندران - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) -۴
- (۲) -۲
- (۳) صفر
- (۴) ۲

۵۹ خط $3x - y = x$ ، کدام یک از خط‌های زیر را قطع نمی‌کند؟ (نمونه دولتی - اصفهان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $-7y = 14x - 3$
- (۲) $15y = -7x + 14$
- (۳) $7y = 14x + 13$
- (۴) $7x - 14y = 3$

۶۰ شیب خط موازی با $\frac{5 - 2x + 3y}{3} = \frac{x}{4}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{12}{11}$
- (۲) $\frac{11}{12}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{3}{2}$

۶۱ خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 3a-5 \\ a+1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a-2 \\ a-4 \end{bmatrix}$ می‌گذرد، با خط $y = 3x - 7$ موازی می‌باشد. مقدار a کدام است؟ (نمونه دولتی - کرمان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{7}{3}$
- (۳) ۹
- (۴) -۶

۶۲ مقدار m چه عددی باشد تا خط به معادله $2y + (m - 3)x = 1$ با خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد، موازی شود؟

(نمونه دولتی - گیلان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) -۱
- (۲) ۵
- (۳) -۵
- (۴) ۱



۶۳ به ازای چه مقدار a ، دو خط $3x + ay = -7$ و $ax + 9y = 3$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند؟ (نمونه دولتی - فوزستان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ± 3 (۴) ۹

۶۴ ضلع AB از مستطیل $ABCD$ ، روی خط به معادله $2x + 3y = 5$ قرار دارد. کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند برابر با معادله خطی باشد که ضلع BC ، روی آن قرار می‌گیرد؟

- (۱) $y = \frac{3}{2}x - 7$ (۲) $y = -\frac{3}{2}x + 11$ (۳) $y = \frac{2}{3}x - 6$ (۴) $y = -\frac{2}{3}x + 10$

۶۵ خط d از نقطه‌های A و B می‌گذرد و با خط $9x + 6y = 7$ موازی است. اگر بخواهیم در صفحه مختصات از نقطه A به B برویم، باید m واحد به سمت راست و n واحد به سمت بالا برویم. اگر m و n عدد اول باشند، آن‌گاه $m + n$ برابر است با: (نمونه دولتی - فراسان رضوی - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۶۶ زاویه بین دو خط $2ax + (a + 3)y = 5$ و $(6a - 1)y - 3ax = 7$ برابر 90° می‌باشد. مقدار عددی a کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{3}$ (۲) $\frac{3}{17}$ (۳) $-\frac{3}{17}$ (۴) $-\frac{17}{3}$

۶۷ کدام یک از خطوط زیر با دو خط $y = 2x + 3$ و $2y + 5x = -1$ تشکیل مثلث می‌دهد؟

- (۱) $2y - 4x = 5$ (۲) $6y = 8 - 15x$ (۳) $x - \frac{y}{2} = 1$ (۴) $\frac{2}{5}y + 3 = 2x$

۶۸ مقدار m چه قدر باشد تا خط $3y - 5x + 3m - 2 = -6$ از مبدأ بگذرد؟ (نمونه دولتی - مرکزی - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۶۹ شیب خطی -2 است. اگر به طول هر نقطه روی این خط، 3 واحد اضافه کنیم، به عرض آن چند واحد اضافه شود تا نقاط حاصل نیز روی همین خط قرار گیرند؟ (نمونه دولتی - مازندران - ۹۶ - ۹۵)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۶ (۴) -۶

۷۰ عرض از مبدأ خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟ (نمونه دولتی - سمنان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{11}{3}$ (۳) $\frac{19}{3}$ (۴) $-\frac{19}{3}$

۷۱ خطی داریم که از نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ و محل برخورد دو خط $x = 2$ و $y = -3$ می‌گذرد. عرض از مبدأ این خط چند است؟

(نمونه دولتی - آذربایجان غربی - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۷۲ خط d از دو نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند. مساحت مثلثی که خط d با محورهای مختصات می‌سازد، چه قدر است؟

- (۱) $14/4$ (۲) $16/9$ (۳) $12/1$ (۴) $8/1$

۷۳ نقطه $A = \begin{bmatrix} 3a-1 \\ 5a+11 \end{bmatrix}$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم و نقطه $B = \begin{bmatrix} b \\ 2b+6 \end{bmatrix}$ روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد. معادله خطی

که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، در کدام گزینه آمده است؟

(۱) $17y - 21x = 76$ (۲) $17y + 21x = 76$

(۳) $21y - 17x = 76$ (۴) $21y + 17x = 76$

۷۴ معادله خطی گذرا از نقطه‌ای به طول -3 روی نیمساز ناحیه دوم که بر خطی به معادله $2y + x = 5$ عمود است، به شکل کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) $y - 2x = 9$ (۲) $y - 2x = 6$ (۳) $x + 2y = 9$ (۴) $x + 2y = 6$

۷۵ معادله خطی که از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ عبور کند و بر خط $2y + 6x = 3$ عمود باشد، برابر کدام گزینه است؟

(۱) $y = \frac{x}{3}$ (۲) $y = \frac{x}{3} - 1$ (۳) $y = \frac{x}{3} - 2$ (۴) $y = \frac{x}{3} + 2$



۷۶ به ازای چه مقداری از a ، نقطه $M = \begin{bmatrix} -6a \\ a+3 \end{bmatrix}$ روی خطی قرار دارد که محور عرض‌ها را در -1 قطع کند و موازی خط مبدأ گذری باشد

که از نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند؟
(نمونه دولتی - کردستان - ۹۷ - ۹۶)

(۱) ۲ (۲) -2 (۳) $\frac{4}{11}$ (۴) $-\frac{5}{9}$

۷۷ مثلث ABC به مختصات $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. معادله میانه AM برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) $y = 2x - 6$ (۲) $y = -2x - 9$ (۳) $y = -2x + 6$ (۴) $y = 2x - 3$

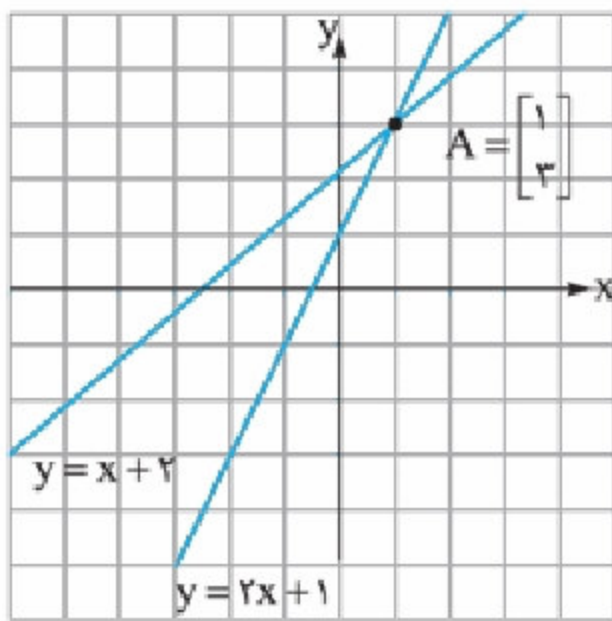
۷۸ نقطه‌ای به طول -2 را روی نیمساز ناحیه سوم در نظر بگیرید که به نقطه‌ای به عرض 5 روی محور عرض‌ها وصل شده است. عمودمنصف خط واصل بین این دو نقطه محور طول‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

(۱) $4y + 14x = 7$ (۲) $14y + 4x = 17$ (۳) $4x - 14y = 17$ (۴) $14x - 4y = 17$

درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی

در این درس می‌خواهیم با دستگاه معادله‌های خطی و نحوه حل آن‌ها آشنا شویم. برای شروع این درس، ابتدا به بحث در مورد نقطه تقاطع دو خط می‌پردازیم.

مثال نقطه تقاطع دو خط $y = 2x + 1$ و $y = x + 2$ را به وسیله رسم آن‌ها به دست آورید.



پاسخ شکل هر کدام از این خط‌ها را به طور دقیق روی یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا نقطه تقاطع خط‌ها به دست بیاید. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، این دو خط در نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ همدیگر را قطع می‌کنند. یکی از راه‌های به دست آوردن نقطه تقاطع دو خط، رسم آن‌ها است که به آن روش ترسیمی می‌گویند.

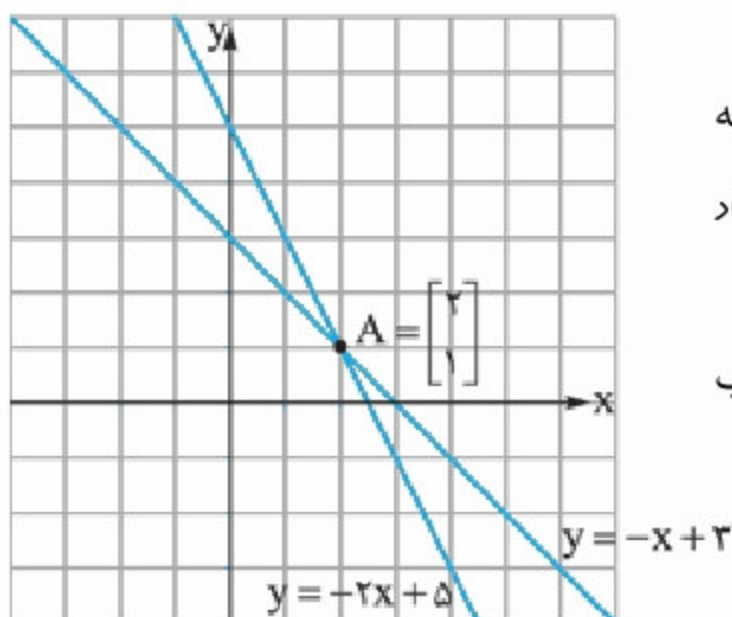
ویژگی نقطه تقاطع دو خط

در درس اول به بررسی جواب‌های یک معادله خط پرداختیم. یاد گرفتیم که همه نقاط روی یک خط، جواب معادله مربوط به آن هستند و به همین دلیل هر خط بی‌شمار جواب دارد. مثلاً نقاط $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ همگی جواب‌های معادله $y = 2x + 1$ و نقاطی مانند $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ،

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ جواب‌های معادله $y = x + 2$ هستند.

اما در میان تمام این جواب‌ها، تنها نقطه تقاطع این دو خط (یعنی نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$) جواب مشترک آن‌ها است و یا به عبارت دیگر تنها نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ در معادله هر دو خط صدق می‌کند.

مثال پاسخ مشترک دو معادله $y = -x + 3$ و $y = -2x + 5$ کدام است؟



پاسخ با توجه به توضیحات بالا باید نقطه تقاطع دو خط را به وسیله رسم آن‌ها به دست آوریم. (البته راه‌های دیگری هم برای به دست آوردن نقطه تقاطع دو خط وجود دارد که بعداً یاد می‌گیریمشون! 😊)

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، نقطه تقاطع دو خط و جواب مشترک دو معادله خط داده شده است.

دستگاه معادله‌های خطی

اگر معادله دو یا چند خط را در داخل آکولاد «}» و زیر هم بنویسیم، یک دستگاه معادله‌های خطی درست کرده‌ایم. پاسخ این دستگاه مختصات نقطه‌ای است که باعث برقراری تساوی به طور هم‌زمان، در همه معادله‌های خط‌های موجود در دستگاه می‌شود. به بیان دیگر، محل تقاطع

دو یا چند خط درون دستگاه، پاسخ دستگاه است. به عنوان مثال عبارت $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$ یک دستگاه معادله‌های خطی است و جواب این

دستگاه هم، همان‌طور که در مثال قبل دیدیم، نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ است. البته برای حل دستگاه معادله‌های خطی، راه‌های دیگری نیز وجود دارد که در ادامه به توضیح آن‌ها می‌پردازیم.

اما قبل از شروع توضیح این روش، باید ۲ نکته را یاد بگیریم:

نکته ۱ اگر تمام ضرایب‌های عددی یک معادله را در یک عدد ضرب کنیم، آن معادله تغییر نمی‌کند. به عنوان مثال دو معادله $x + y = 1$ و $2x + 2y = 2$ ، هر دو معادله یک خط را نشان می‌دهند. (آگه شک دارین، هر دو تا فط روی یک دستگاه مفتحات رسم کنین 😊)

۲ اگر در یک دستگاه معادله، طرف‌های راست تساوی‌ها را با هم، و طرف‌های چپ را نیز با هم جمع کنیم، تساوی بین آن‌ها برقرار می‌ماند. به عنوان مثال داریم:

$$+ \begin{cases} 2 = 2 \\ 5 = 5 \\ 7 = 7 \end{cases} + \begin{cases} x = x \\ 2x = 2x \\ 3x = 3x \end{cases} + \begin{cases} 1 \text{ kg} + 1 \text{ kg} = 2 \text{ kg} \\ 1 \text{ kg} = 1 \text{ kg} \\ 1 \text{ kg} + 1 \text{ kg} + 1 \text{ kg} = 2 \text{ kg} + 1 \text{ kg} \end{cases}$$

این دو نکته، اساس روش حذفی در حل دستگاه معادله‌های خطی را تشکیل می‌دهند.

حل دستگاه معادله‌های خطی به روش حذفی

برای حل دستگاه معادله‌های خطی به روش حذفی مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

- معادله‌های خط دستگاه را به صورت کلی معادله خط (یعنی $Ax + By = C$) می‌نویسیم.
 - با ضرب اعداد مناسب در یک یا هر دو معادله، ضرایب یکی از دو متغیر x یا y را در دو معادله، قرینه هم می‌کنیم.
 - دو معادله را با هم جمع می‌کنیم. چون ضرایب یکی از دو متغیر x یا y قرینه هم هستند، در این مرحله یک متغیر حذف می‌شود و معادله‌ای با یک متغیر باقی می‌ماند.
 - معادله باقی‌مانده را حل کرده و مقدار متغیر موجود در آن را مشخص می‌کنیم. مقدار به دست آمده برای این متغیر را در یکی از دو معادله خط دستگاه به دلخواه قرار می‌دهیم تا مقدار متغیر دیگر به دست آید.
- حالا برای این که خوب این روش را یاد بگیریم، یک مثال با این روش حل می‌کنیم. 😊

مثال دستگاه معادله‌های خطی $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ را به روش حذفی حل کنید.

پاسخ با توجه به مراحل بیان‌شده برای حل دستگاه به روش حذفی داریم:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$$

مرحله ۱ معادله‌های داده‌شده را به صورت کلی معادله خط می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ \times 3 \quad -3x + y = -1 \end{cases}$$

مرحله ۲ ضرب عدد مناسب در معادله‌ها (برای قرینه‌کردن ضرایب یکی از متغیرها):

$$\Rightarrow + \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -9x + 3y = -3 \\ \hline -7x = 2 \end{cases}$$

مرحله ۳ جمع طرف‌های چپ و راست دو معادله خط:

$$-7x = 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{7}$$

مرحله ۴ حل معادله باقی‌مانده:

$$-3x + y = -1 \xrightarrow{x = -\frac{2}{7}} -3 \times \left(-\frac{2}{7}\right) + y = -1 \Rightarrow \frac{6}{7} + y = -1 \Rightarrow y = -\frac{13}{7}$$

مرحله ۵ به دست آوردن مقدار متغیر دیگر:

حل دستگاه معادله‌های خطی به روش جایگزینی

برای حل دستگاه معادله‌های خطی به روش جایگزینی، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

- ۱ با توجه به معادله‌های دستگاه، یکی از معادله‌ها را انتخاب کرده و مقدار یکی از متغیرها را بر حسب متغیر دیگر به دست می‌آوریم.
- ۲ مقدار به دست آمده برای متغیر را در معادله دیگر جای‌گذاری می‌کنیم تا به معادله‌ای با یک متغیر برسیم.
- ۳ معادله یک‌متغیره به دست آمده را حل می‌کنیم و مقدار متغیر آن را به دست می‌آوریم.
- ۴ مقدار به دست آمده برای متغیر را در یکی از معادله‌های دستگاه به دلخواه قرار می‌دهیم تا مقدار متغیر دیگر به دست بیاید.

مثال دستگاه معادله‌های خطی $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 7x - 2y = 8 \end{cases}$ را به روش جایگزینی حل کنید.

پاسخ مراحل بیان شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

مرحله ۱ $2x - y = 5 \Rightarrow y = 2x - 5$

مرحله ۲ $7x - 2(2x - 5) = 8 \Rightarrow 7x - 4x + 10 = 8$

مرحله ۳ $\Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

مرحله ۴ $2x - y = 5 \xrightarrow{x = -\frac{2}{3}} 2 \times (-\frac{2}{3}) - y = 5 \Rightarrow -\frac{4}{3} - y = 5 \Rightarrow y = -\frac{19}{3}$

مثال در انتخابات نمایندگی مجلس در یک شهر، دو کاندیدا شرکت کردند و در مجموع ۳۴۰۹ رأی جمع کردند. در انتها کاندیدای اول با اختلاف ۱۲۵ رأی پیروز شد. هر یک از کاندیداها چند رأی آورده‌اند؟

پاسخ اگر تعداد رأی کاندیدای اول را با x و تعداد رأی کاندیدای دوم را با y نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x + y = 3409 \\ x - y = 125 \end{cases}$$

$$2x = 3534 \Rightarrow x = 1767$$

$$x - y = 125 \xrightarrow{x = 1767} 1767 - y = 125 \Rightarrow y = 1767 - 125 = 1642$$

مثال مقادیر x و y را به گونه‌ای تعیین کنید که تساوی $3^{3-x-y} = 5^{3x+2y-2}$ برقرار باشد.

پاسخ براساس مطالبی که در فصل ۴ یاد گرفتیم، می‌دانیم این تساوی زمانی برقرار است که توان دو عدد برابر صفر باشد. یعنی: $3^\circ = 5^\circ = 1$. بنابراین داریم:

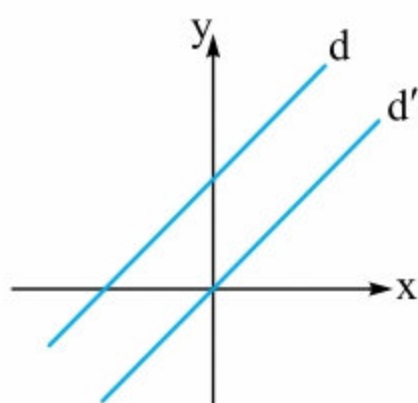
$$\begin{cases} 3 - x - y = 0 \\ 3x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -6 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$x = -4 \Rightarrow x + y = 3 \xrightarrow{x = -4} -4 + y = 3 \Rightarrow y = 7$$

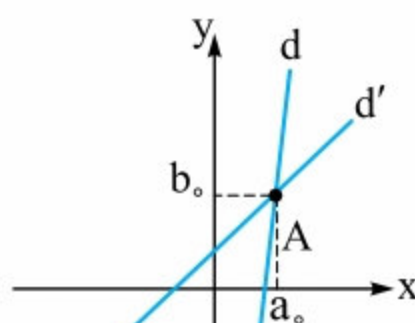
تعداد جواب‌های یک دستگاه معادله خط:

آقا اجازه! دستگاه معادله خط همیشه فقط یک جواب دارد؟

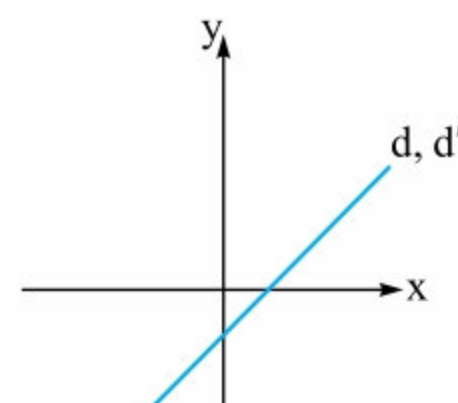
نه بچه‌ها! بستگی به وضعیتی دارد که دو خط دستگاه معادله‌ی خطی نسبت به هم دارند. آنگاه دو خط موازی باشند، دستگاه جواب ندارد، دستگاه تنها یک جواب دارد و اگر دو خط بر هم منطبق باشند، دستگاه بی‌شمار جواب دارد. یعنی ۳ حالت کلی برای تعداد جواب‌های یک دستگاه معادله خطی داریم:



دستگاه جواب ندارد.



دستگاه یک جواب دارد. $(A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix})$



دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{cases}$$

برای دستگاه معادله خطی روبه‌رو داریم:

۱ اگر $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ ، دو خط متقاطع‌اند و دستگاه تنها یک جواب دارد.

مثال دستگاه معادله خطی $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$ چند جواب دارد؟

دستگاه تنها یک جواب دارد. $\Rightarrow \frac{3}{1} \neq \frac{-2}{5}$

پاسخ با توجه به نکته بالا داریم:

۲ اگر $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ ، آن‌گاه دو خط با هم موازی بوده و دستگاه جواب ندارد.

مثال دستگاه معادله خطی $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$ چند جواب دارد؟

$\Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{5}{12}$

پاسخ ابتدا نسبت بین ضرایب عددی دو معادله خط را محاسبه می‌کنیم:

این دو خط با هم موازی‌اند و بنابراین این دستگاه جواب ندارد.

۳ اگر $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ ، آن‌گاه دو خط دستگاه بر هم منطبق هستند و بنابراین تمام نقاط خط‌ها پاسخ این دستگاه هستند. به همین دلیل دستگاه بی‌شمار پاسخ دارد.

مثال m را به گونه‌ای تعیین کنید که دستگاه $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x - \frac{5}{2}y = m \end{cases}$ بی‌شمار پاسخ داشته باشد.

پاسخ برای این که این دستگاه بی‌شمار پاسخ داشته باشد، باید دو خط بر هم منطبق باشند. بنابراین داریم:

$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{-1}{-\frac{5}{2}} = \frac{5}{m} \Rightarrow \frac{5}{m} = \frac{2}{5} \Rightarrow m = \frac{5 \times 5}{2} = 12\frac{1}{2}$

پرسش‌های تشریحی

۴۵ دستگاه‌های زیر را به کمک روش حذفی حل کنید.

۱ $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$

۲ $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

۳ $\begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

۴ $\begin{cases} 3(x - y) - 2y = 5 \\ 2(x + y) + x = 19 \end{cases}$

۴۶ دستگاه‌های زیر را به کمک روش جایگزینی حل کنید.

۱ $\begin{cases} x - 4y = 4 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$

۲ $\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{y-5}{3} = 6 \\ x - y = 7 \end{cases}$

۳ $\begin{cases} \frac{x}{3} - 3y = 10 \\ \frac{y}{4} + x = \frac{9}{4} \end{cases}$

۴۷ اگر $x = 1$ و $y = 2$ جواب دستگاه $\begin{cases} ax - by = -1 \\ (a-1)x + 2by = 10 \end{cases}$ باشد، آن‌گاه a و b چه مقادیری دارند؟

$3^{2x+y-9} = 5^{3y+x-17}$

۴۸ یک جواب برای x و y طوری تعیین کنید که تساوی روبه‌رو برقرار باشد.

۴۹ محل تقاطع دو خط $x + 2y = 5$ و $y - 3x = -1$ را بیابید.

۵۰ معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $y = 2x + 5$ و $2y - 5x = 11$ عبور کرده و شیب آن برابر ۳ باشد.

۵۱ نقطه مشترکی که دسته خطوط $(m-1)x + (2m+6)y = 16$ از آن می‌گذرند را بیابید.

۵۲ معادله خط عمود بر خط $y = -\frac{x}{4} + 5$ که از نقطه مشترک دسته خطوط $m(x+2y) - (2x+y) = 6$ عبور می‌کند را به دست آورید.

۵۳ تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر را تعیین کنید.

$$1 \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 6x + 9y = 11 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ 0/25y = 1 - 0/75x \end{cases}$$

۵۴ به هر یک از سؤالات زیر، پاسخ مناسب دهید.

۱ اگر دستگاه $\begin{cases} ax + 3y = 4 \\ 5x - by = 8 \end{cases}$ جواب نداشته باشد، آن‌گاه دو جواب متفاوت برای a و b مثال بزنید.

۲ می‌دانیم $\begin{cases} mx - (n - 3)y = 7 \\ 3x + 8y = 28 \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد. مقادیر m و n را به دست آورید.

۵۵ طول مستطیلی از چهار برابر عرض آن یک واحد کم‌تر است. اگر محیط این مستطیل ۲۸ واحد باشد، آن‌گاه مساحت آن چند واحد است؟

۵۶ در یک جنگل کوچک و عجیب فقط گوسفند و کانگورو وجود دارد. اگر تعداد حیوانات مجموعاً ۳۰ تا و تعداد کل پاهای آن‌ها برابر ۸۴ تا باشد، چند کانگورو و چند گوسفند در این جنگل زندگی می‌کنند؟

۵۷ سن پدر علی از دو برابر سن علی ۶ سال بیشتر است. اگر علی و پدرش مجموعاً ۵۴ سال داشته باشند، آن‌گاه اختلاف سن آن‌ها چه قدر است؟

۵۸ مثلث ABC به مختصات $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ داده شده است. مختصات مرکز ثقل (محل برخورد میانه‌ها) این مثلث را پیدا کنید.

۵۹ فاصله نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ از خط $x + 2y = 2$ را به دست آورید.

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۷۹ جواب دستگاه زیر را حساب کرده‌ایم. حاصل xy کدام است؟

$$\begin{cases} 2x - y = 11 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$$

(۱) ۱۲
(۲) -۱۲
(۳) ۶
(۴) -۶

۸۰ اگر نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ جواب دستگاه معادله زیر باشد، آن‌گاه حاصل $a + b$ برابر کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} ax + by = 5 \\ 2ax - 3by = 11 \end{cases}$$

(۱) ۵
(۲) ۵/۱
(۳) ۵/۲
(۴) ۵/۳

۸۱ اگر x و y اعداد صحیح باشند که $2^{3x+y-9} = 5^{x-2y+4}$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{2^{x+y}}{x-y}$ برابر است با:

(۱) ۱۶ (۲) -۳۲ (۳) ۳۲ (۴) -۱۶

(نمونه دولتی - مرکزی - ۹۷ - ۹۶)

۸۲ مختصات محل تقاطع دو خط $x = \frac{1}{5}y$ و $3y + 5x = 6$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

(۱) $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

۸۳ از نقطه برخورد $x = 2y$ و $x - y = -2$ ، خطی موازی محور طول‌ها رسم می‌کنیم. عرض از مبدأ این خط کدام است؟

(۱) ۲
(۲) -۱

(۱) -۲
(۳) ۱

(نمونه دولتی - فوژستان - ۹۷ - ۹۶)



۸۴ اگر دو خط $ay - 2x + 14 = 0$ و $3y = x + b$ یکدیگر را در نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ قطع کنند، مقدار عددی $a - b$ برابر است با:

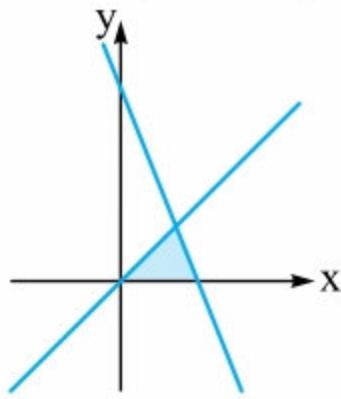
- (۱) ۱۳
(۲) -۳
(۳) ۳
(۴) -۱۳
- (نمونه دولتی - اصفهان - ۹۷ - ۹۶)

۸۵ دو خط $2x + y - 2 = 0$ و $(m - 1)x - 2y = 0$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول یک قطع می‌کنند. مقدار m کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۳
- (نمونه دولتی - قم - ۹۶ - ۹۵)

۸۶ در شکل زیر، ناحیه رنگی مرز مشترک بین خطوط $x = y$ ، $y = -3x + 4$ و محور x ها می‌باشد. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

(نمونه دولتی - فراسان شمالی - ۹۷ - ۹۶)



- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{4}{9}$
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۸۷ محل برخورد دو خط دستگاه $\begin{cases} x + ay = 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases}$ روی خط $x + 2y = 2$ واقع شده است. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) -۴
(۳) ۳
(۴) -۳
- (نمونه دولتی - آذربایجان شرقی - ۹۷ - ۹۶)

۸۸ اگر سه خط $d_1: x - 2y = 2$ ، $d_2: 2x + y = 7$ و $d_3: mx - 3y = 3$ در یک نقطه همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه شیب خط d_3 کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

۸۹ دو خط $d_1: y = mx - 20$ و $d_2: 2y + \frac{m}{3}x = 5$ یکدیگر را روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قطع می‌کنند. m برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

۹۰ شیب خطی که از محل برخورد دو خط به معادله‌های $y = 3x - 5$ و $y = -x + 3$ می‌گذرد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند، کدام است؟

(نمونه دولتی - فراسان رضوی - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۲
(۴) -۲

۹۱ معادله خطی که از نقطه برخورد دو خط $y = x + 2$ و $y = 2x + 3$ بگذرد و با خط $2x - y = 0$ موازی باشد، کدام است؟

(نمونه دولتی - کهگیلویه و بویر احمد - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $y - x = 1$

- (۲) $2y + x = 0$

- (۳) $y - 2x = 3$

- (۴) $y - 2x = -1$

۹۲ معادله خطی که از محل برخورد دو خط $3x - 2y = 5$ و $4x + 3y - 1 = 0$ گذشته و عرض از مبدأ آن -۳ باشد، کدام است؟

(نمونه دولتی - تهران - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $y = 2x - 3$

- (۲) $y = -2x - 3$

- (۳) $y - 2x = 3$

- (۴) $y + 2x = 3$

۹۳ معادله خطی که از محل تلاقی دو خط $y = 3x - 1$ و $y + x - 4 = 0$ و از مبدأ مختصات می‌گذرد، کدام است؟

(نمونه دولتی - گیلان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $y = -\frac{11}{5}x$

- (۲) $y = -\frac{5}{11}x$

- (۳) $y = \frac{5}{11}x$

- (۴) $y = \frac{11}{5}x$

۹۴ معادله خطی که از نقطه برخورد دسته خطوط به معادله $(m + 1)x + (m - 2)y = 2m + 5$ عبور می‌کند و موازی خط $2y - x = 7$ است، برابر کدام یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟

- (۱) $2y + x + 1 = 0$

- (۲) $2y - x + 1 = 0$

- (۳) $2y - x - 5 = 0$

- (۴) $2y - x + 5 = 0$

۹۵ معادله‌های دایره‌ای از رابطه $(m+1)x + (m+2)y = m-5$ به دست می‌آید. مرکز این دایره کدام یک از نقاط زیر است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -7 \\ 6 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -7 \\ -6 \end{bmatrix}$

(نمونه دولتی - قم - ۹۷ - ۹۶)

۹۶ کدام دستگاه بی‌شمار جواب دارد؟

(۱) $\begin{cases} 2y = 3 - 6x \\ \frac{y}{2} + 3x = 5 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -\frac{1}{3}y = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{5} \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} 5 - 2y = 3x \\ 4y + 6x = 10 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} 2x - 7 = y \\ 3y - \frac{7}{2} = \frac{2}{3}x \end{cases}$

(نمونه دولتی - تهران - ۹۷ - ۹۶)

۹۷ دستگاه زیر به ازای چه مقداری از m جواب ندارد؟

(۱) -3 و 1 (۲) -1 و 3 (۳) ± 3 (۴) ± 1

$\begin{cases} x + my = -1 \\ mx + 9y = 4 \end{cases}$

(نمونه دولتی - تهران - ۹۷ - ۹۶)

۹۸ به ازای کدام یک از مقادیر زیر برای a ، دستگاه خطی زیر بی‌شمار جواب دارد؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) -1 (۳) 2 (۴) 1

$\begin{cases} (2a+1)x + 2y = 70 \\ y = -\frac{a}{2}x + 35 \end{cases}$

۹۹ سن آرش از سه برابر سن شهاب یک سال کم‌تر است و اختلاف سن آن‌ها ۱۵ سال می‌باشد. شهاب چند سال دارد؟

(۱) 7 (۲) 8 (۳) 9 (۴) 10

۱۰۰ محیط یک مستطیل ۷۲ واحد است. اگر از طول آن ۸ واحد کم کنیم، به یک مربع تبدیل می‌شود. عرض این مستطیل کدام است؟

(نمونه دولتی - کردستان - ۹۷ - ۹۶)

(۱) 22 (۲) 14 (۳) 16 (۴) 18

۱۰۱ یوفوها موجوداتی هستند که در سیاره کوچک خیلی سبز زندگی می‌کنند. هر یوفو یک سر دارد که روی سرش یا سه چشم قرار دارد یا پنج چشم. اگر تعداد سرهای کل یوفوها برابر ۱۷۰ تا و تعداد کل چشم‌های آن‌ها ۶۱۰ تا باشد، اختلاف تعداد سه چشم‌ها و پنج چشم‌ها چه قدر است؟

(۱) 60 (۲) 65 (۳) 70 (۴) 75

۱۰۲ وزن یک گوی آبی از ۳ برابر وزن یک گوی قرمز، ۹ کیلوگرم کم‌تر است. اگر وزن چهار گوی آبی و یک گوی قرمز روی هم ۱۶ کیلوگرم باشد، مجموع وزن یک گوی آبی و یک گوی قرمز چند کیلوگرم است؟

(نمونه دولتی - اردبیل - ۹۷ - ۹۶)

(۱) 3 (۲) 4 (۳) 7 (۴) 12

۱۰۳ شادی مقداری پول دارد. پول شادی همان قدر از ۱۵۰ تومان کم‌تر است که پول تارا از ۱۵۰ تومان بیشتر است. اگر تارا پنج برابر شادی پول داشته باشد، آن‌گاه چه قدر به شادی پول بدهد تا پولشان یکسان شود؟

(۱) 120 تومان (۲) 115 تومان (۳) 105 تومان (۴) 100 تومان

۱۰۴ موسی و عیسی تعدادی توپ دارند. در ابتدا موسی به عیسی به تعداد توپ‌های عیسی، توپ می‌دهد و سپس عیسی دو برابر تعداد توپ‌های موسی (در حال حاضر) به او توپ می‌دهد. اکنون هر یک ۲۴ توپ دارند. موسی در ابتدا چند توپ داشته است؟

(۱) 20 (۲) 24 (۳) 28 (۴) 32

۱۰۵ اگر دستگاه معادلات زیر را حل کنیم، نتیجه می‌گیریم $a+b+c$ برابر است با:

(۱) 5 (۲) 10 (۳) 15 (۴) 20

$\begin{cases} 2a - b = 5 \\ 3b - c = 7 \\ 3c - a = 8 \end{cases}$



۱۰۶ با توجه به دستگاه زیر، حاصل $(x-y)^{-1}$ کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$$

(۱) $-۰/۲۵$ (۲) $-۰/۵$
 (۳) $-۰/۷۵$ (۴) $-۱/۲۵$

۱۰۷ اگر بدانیم $a < b$ ، آن‌گاه پس از حل دستگاه مقابل، نتیجه می‌گیریم $a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b$ برابر است با:

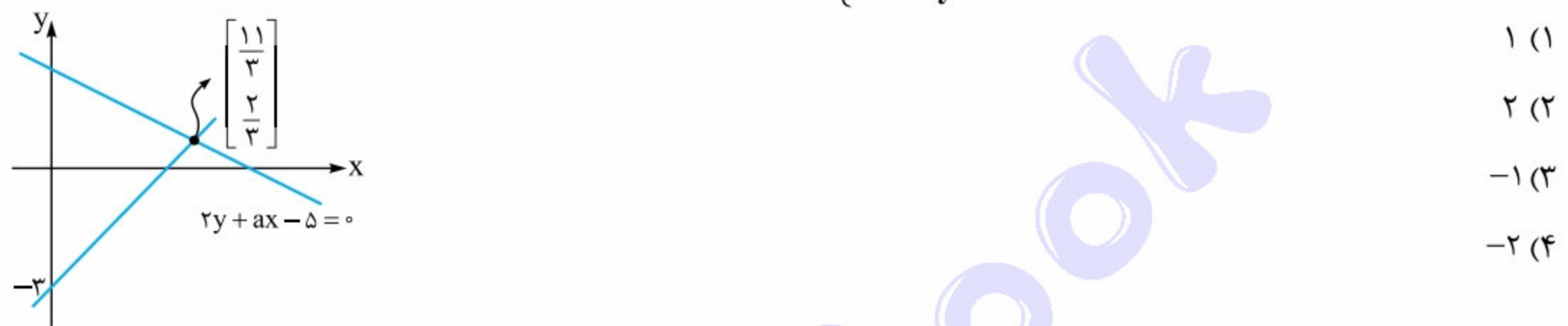
$$\begin{cases} a(a-b) = 29 \\ b(a-b) = 20 \end{cases}$$

(۱) ۸ (۲) -۸
 (۳) ۲۷ (۴) -۲۷

۱۰۸ به ازای چند مقدار طبیعی x ، نمودار خط $y = 3x + 5$ پایین‌تر از خط $4x + y = 30$ قرار می‌گیرد؟

(۱) ۲ (۲) ۳
 (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰۹ شکل زیر مربوط به دستگاه معادله خطوط $\begin{cases} 2y + ax - 5 = 0 \\ bx + cy = 3 \end{cases}$ است. در این صورت حاصل $a + b + c$ برابر است با:



۱۱۰ دو ضلع از یک متوازی‌الاضلاع بر دو خط به معادلات $2x + 5y = 4$ و $3x - 2y = 5$ قرار دارند. اگر نقطه $A = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ مختصات یکی از رئوس این متوازی‌الاضلاع باشد، اگر قطری که از رأس A می‌گذرد را در نظر بگیریم، معادله خط گذرنده از این قطر کدام است؟

(۱) $x - 2y = -3$ (۲) $y - 2x = 2$
 (۳) $2y - 3x = 1$ (۴) $x - 2y = -1$

پس نقطه وسط این دو نقطه برابر است با:

$$N = \begin{bmatrix} \frac{-4+8}{2} \\ \frac{4+0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۴

چون M وسط پاره خط AB است، پس داریم:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \frac{2m-2+m+6}{2} \\ \frac{5-2n+4+n}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3m+4}{2} \\ \frac{9-n}{2} \end{bmatrix}$$

بنابراین مختصات نقطه به دست آمده باید با مختصات نقطه

$$\begin{bmatrix} \frac{3m+4}{2} \\ \frac{9-n}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ 3-n \end{bmatrix} \quad \text{برابر باشد، پس داریم:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3m+4}{2} = m \Rightarrow 3m+4=2m \\ \Rightarrow 3m-2m=-4 \Rightarrow m=-4 \\ \frac{9-n}{2} = 3-n \Rightarrow 9-n=2(3-n) \\ \Rightarrow 9-n=6-2n \Rightarrow 2n-n=6-9 \Rightarrow n=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} -4 \\ 3-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۵

۱ فاصله $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$\sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

۲ فاصله دو نقطه برابر است با:

$$\begin{aligned} \sqrt{(-11-1)^2 + (2-7)^2} &= \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

پاسخ ۶

فاصله دو نقطه داده شده برابر است با:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta - (3+m))^2 + (4-m-2)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta - 3 - m)^2 + (2-m)^2} = \sqrt{(2-m)^2 + (2-m)^2} \\ &= \sqrt{2(2-m)^2} \end{aligned}$$

از طرفی فاصله این دو نقطه برابر $5\sqrt{2}$ یا همان $\sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$ است، پس باید داشته باشیم:

$$\sqrt{2(2-m)^2} = \sqrt{50} \Rightarrow 2(2-m)^2 = 50 \Rightarrow (2-m)^2 = 25$$

پاسخ پرسش‌های تشریحی

پاسخ ۱

۱ عرض $A = \begin{bmatrix} m+1 \\ m-1 \end{bmatrix}$ باید برابر صفر باشد، پس داریم:

$$m-1=0 \Rightarrow m=1$$

۲ طول نقطه $\begin{bmatrix} 2m-4 \\ 3m+6 \end{bmatrix}$ باید برابر صفر باشد، پس داریم:

$$2m-4=0 \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow m=2$$

۳ چون $C = \begin{bmatrix} 3m+1 \\ 2m-5 \end{bmatrix}$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم است،

پس باید داشته باشیم:

$$3m+1=2m-5 \Rightarrow 3m-2m=-1-5 \Rightarrow m=-6$$

۴ طول و عرض نقطه $\begin{bmatrix} 2m-6 \\ 2m+22 \end{bmatrix}$ باید قرینه هم باشند، پس داریم:

$$2m+22 = -(2m-6) \Rightarrow 2m+22 = -2m+6$$

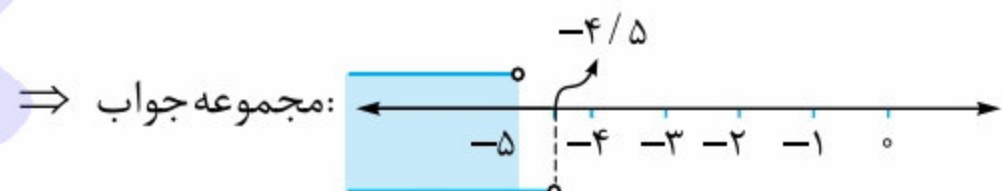
$$\Rightarrow 4m = -16 \Rightarrow m = -4$$

پاسخ ۲

۱ طول و عرض نقطه A باید هر دو منفی باشند، پس داریم:

$$m+5 < 0 \Rightarrow m < -5$$

$$2m+9 < 0 \Rightarrow 2m < -9 \xrightarrow{(\div 2)} m < -4.5$$

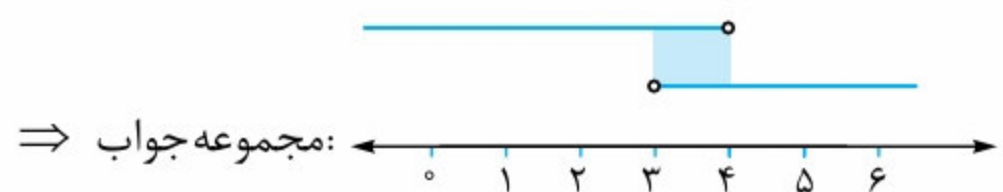


پس با توجه به شکل نتیجه می‌گیریم m باید کم‌تر از -5 باشد، یعنی $m < -5$.

۲ طول B مثبت و عرض آن منفی است، پس داریم:

$$m-3 > 0 \Rightarrow m > 3$$

$$3m-12 < 0 \Rightarrow 3m < 12 \Rightarrow m < 4$$



پس m باید بین دو عدد 3 و 4 باشد، یعنی $3 < m < 4$.

پاسخ ۳

۱ مختصات نقطه وسط برابر است با:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-13+3}{2} \\ \frac{17+7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

۲ نقطه به طول 8 روی محور طول‌ها برابر $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ و نقطه روی نیمساز

ناحیه ۲ و ۴ به عرض 4، برابر $\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ است.

پاسخ ۹

۱ می‌دانیم حجم هر مکعب به طول یال a برابر است با a^3 .

پس داریم:

$$(x) \text{ ضلع } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2^3=8 \\ 3^3=27 \end{bmatrix}$$

$$(y) \text{ حجم } \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4^3=64 \\ 5^3=125 \\ 6^3=216 \end{bmatrix} \Rightarrow y = x^3$$

۲ مساحت کل مکعب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = 2(x \times 2x + x \times 3x + 2x \times 3x)$$

$$\Rightarrow y = 2(2x^2 + 3x^2 + 6x^2) \Rightarrow y = 2(11x^2) \Rightarrow y = 22x^2$$

پاسخ ۱۰

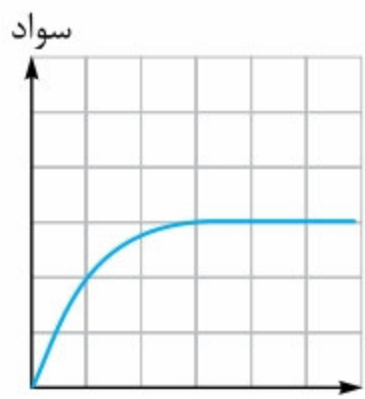
۱ با توجه به رابطه $y = 0/9x + 20$ ، وقتی وزنه‌ای به جرم 5 kg را به فنر ببندیم، طول آن برابر می‌شود با:

$$y = 0/9 \times 5 + 20 \Rightarrow y = 4/5 + 20 \Rightarrow y = 24/5 \text{ cm}$$

۲ فرض کنید وزنه m کیلوگرمی به فنر وصل کرده‌ایم. در این صورت طول فنر برابر $38 = 20 + 18$ سانتی‌متر می‌شود، پس باید داشته باشیم:

$$38 = 0/9x + 20 \Rightarrow 18 = 0/9 \times x \Rightarrow x = 20 \text{ kg}$$

پاسخ ۱۱



انسان تازه متولد شده بی‌سواد است و تا زمان مرگ می‌تواند سواد کسب کند، اما پس از مرگ سطح سواد او دیگر رشد نمی‌کند! پس شکل مربوط به سطح سواد تا زمان مرگ، به صورت مقابل است:

پاسخ ۱۲

با توجه به معادله داده شده، با مقداردهی به x ، مقادیر مختلف y را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \times 0 + 6 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \times 1 + 6 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \times 2 + 6 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \times 3 + 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \times 4 + 6 = -2 \end{cases}$$

رابطه داده شده اتحاد نیست؛ چون به ازای هر x و y دلخواه برقرار نیست.

پاسخ ۱۳

به کمک نقطه‌یابی، نمودار هر معادله را رسم می‌کنیم:

$$y = x + 2 \quad 1$$

	A	B
$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 2 = 2$	0	-2
$x = -2 \Rightarrow y = -2 + 2 = 0$	2	0

جدول مختصات \Rightarrow

$$\sqrt{\quad} \rightarrow |2 - m| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 - m = 5 \Rightarrow m = 2 - 5 \\ \Rightarrow m = -3 \\ \text{یا} \\ 2 - m = -5 \Rightarrow m = 2 + 5 \\ \Rightarrow m = 7 \end{cases}$$

پاسخ ۷

۱ ثابت می‌کنیم $AC = BC$. طول‌های این دو پاره‌خط برابرند با:

$$\left. \begin{aligned} |AC| &= \sqrt{(2-1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} \\ |BC| &= \sqrt{(-4-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26} \end{aligned} \right\}$$

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است. $\Rightarrow AC = BC$

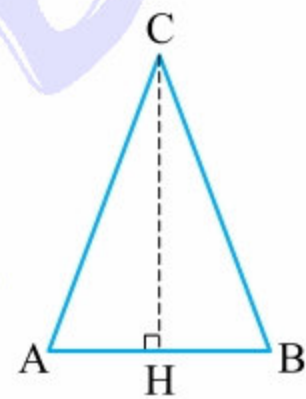
۲ ابتدا توجه کنید که مختصات نقطه M وسط AC برابر است با:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_C}{2} \\ \frac{y_A + y_C}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \frac{2+1}{2} \\ \frac{5+0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

پس طول پاره‌خط BM برابر است با:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} &= \sqrt{\left(\frac{3}{2} - (-4)\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{121+9}{4}} = \frac{\sqrt{130}}{2} \end{aligned}$$

۳ دقت کنید که مثلث ABC در رأس C



متساوی‌الساقین است، پس ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر رأس C بر هم منطبق‌اند. یعنی ارتفاع CH همان میانه AB است. حالا

دقت کنید که مختصات نقطه وسط AB

برابر است با:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2-4}{2} \\ \frac{5+1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

پس طول ارتفاع CH (میانه) برابر می‌شود با:

$$\sqrt{(1-(-1))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

پاسخ ۸

چون در هر دقیقه 2 cm از طول شمع کم می‌شود، پس بعد از

۱ دقیقه طول شمع برابر $20 - 2 = 18 \text{ cm}$ ، پس از ۲ دقیقه برابر

$20 - 2 \times 2 = 16 \text{ cm}$ و ... می‌شود.

X زمان (دقیقه)	0	1	2	3	4	5
Y طول شمع (cm)	20	18	16	14	12	10

۱ پس از ۷ دقیقه طول شمع برابر است با:

$$20 - 7 \times 2 = 20 - 14 = 6 \text{ cm}$$

۲ اگر x دقیقه زمان بگذرد، $2x$ سانتی‌متر از طول اولیه شمع کم

می‌شود، پس داریم: $y = 20 - 2x$ طول شمع پس از x دقیقه

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$$

۵

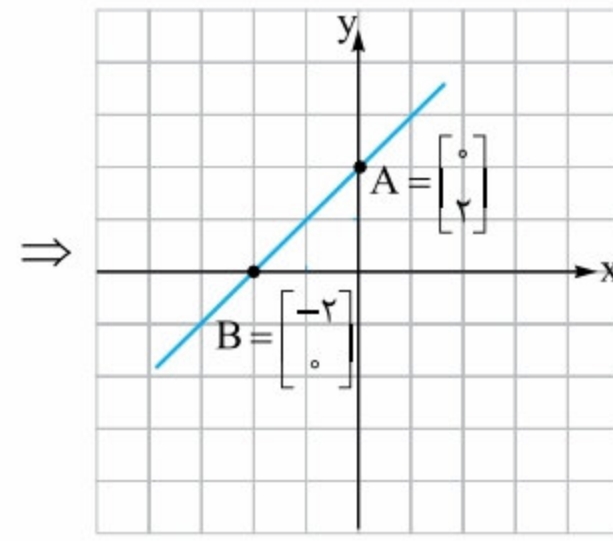
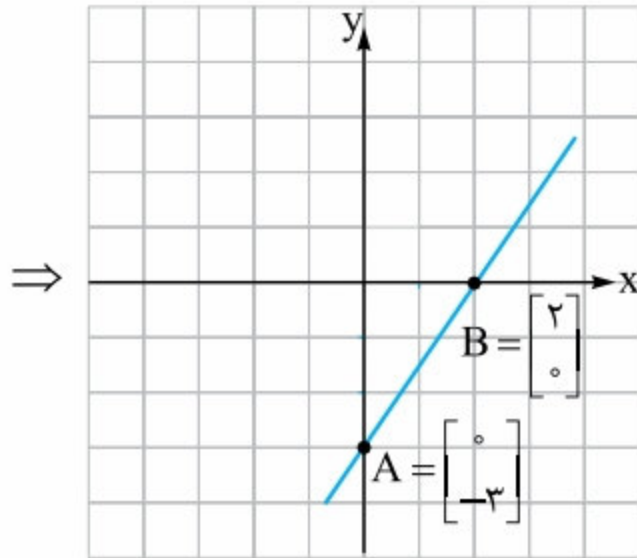
$$x=0 \Rightarrow \frac{0}{2} - \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 0 - \frac{y}{3} = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = -3$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{0}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$$

	A	B
x	0	2
y	-3	0

جدول مختصات:

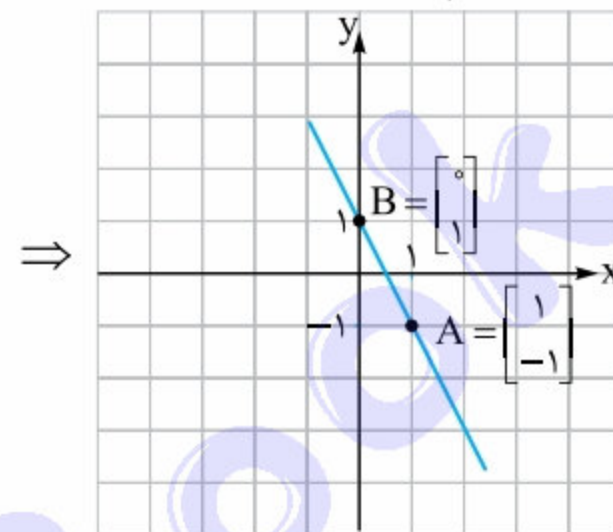


$$y = -2x + 1$$

$$\left. \begin{aligned} x=1 &\Rightarrow y = -2 \times 1 + 1 = -2 + 1 = -1 \\ x=0 &\Rightarrow y = -2 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned} \right\}$$

	A	B
x	1	0
y	-1	1

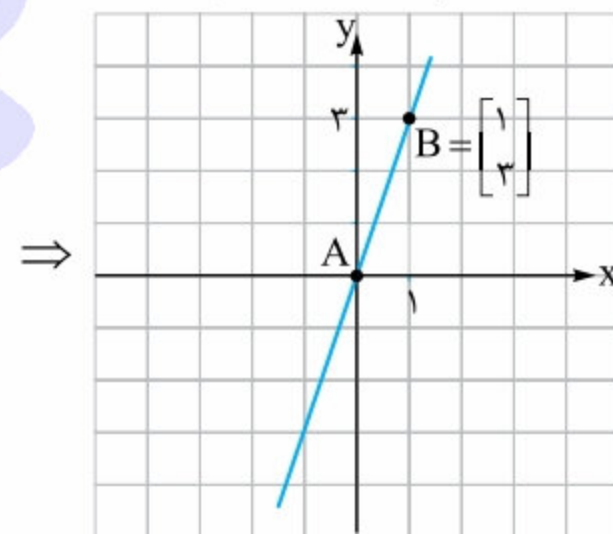
جدول مختصات:



$$y = 3x$$

	A	B
x	0	1
y	0	3

جدول مختصات:

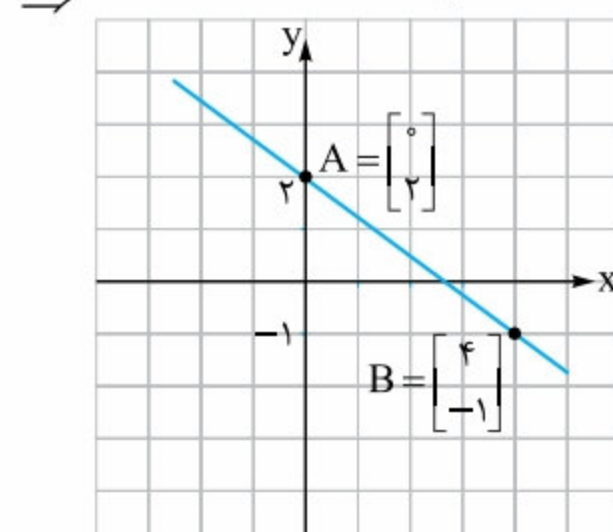


$$y = -\frac{3}{4}x + 2$$

$$\left. \begin{aligned} x=0 &\Rightarrow y = -\frac{3}{4} \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2 \\ x=4 &\Rightarrow y = -\frac{3}{4} \times 4 + 2 = -3 + 2 = -1 \end{aligned} \right\}$$

	A	B
x	0	4
y	2	-1

جدول مختصات:



پاسخ ۱۴

۱ می‌دانیم معادله خطوطی که از مبدأ مختصات عبور می‌کنند، به صورت $y = ax$ است. حالا چون خط مورد نظر از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ هم عبور می‌کند، پس با جای گذاری نقطه در معادله داریم:

$$y = ax \text{ روی } \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 5 = 2a \Rightarrow a = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{معادله خط } y = \frac{5}{2}x$$

۲ اولاً دقت کنید که چون $y = \frac{3}{2}x + c$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس $c = 0$. دوماً چون نقطه $\begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد، پس نتیجه می‌گیریم:

$$y = \frac{3}{2}x \text{ روی } \begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 = \frac{3}{2}a \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

پاسخ ۱۵

در هر قسمت با قراردادن مقادیر عددی به جای x و y ، درستی معادله را بررسی کرده و بودن یا نبودن نقطه روی خط را تعیین می‌کنیم:

۱ توجه کنید که مقدار عددی عبارت $2x + y$ به ازای $x = 1$ و $y = 2$ برابر است با:

$$2 \times 1 + 2 = 4$$

پس این نقطه روی خط مورد نظر قرار دارد.

۲ اگر در معادله داده شده قرار دهیم $x = 3$ و $y = 5$ ، آن‌گاه داریم:

$$2x - 3y - 2 = 0 \Rightarrow 2 \times 3 - 3 \times 5 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 6 - 15 - 2 = 0 \Rightarrow -11 = 0 \quad \times$$

که تناقض است، پس نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ روی خط $2x - 3y - 2 = 0$ قرار ندارد.



پاسخ ۱۸

۱ چون $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ روی $ax + 3y = a + 3$ قرار دارد، پس داریم:

$$-3a + 3 \times 5 = a + 3 \Rightarrow -3a + 15 = a + 3$$

$$\Rightarrow -4a = 3 - 15 \Rightarrow -4a = -12 \Rightarrow a = 3$$

پس معادله خط به صورت $3x + 3y = 6$ درمی‌آید، بنابراین مختصات نقطه‌ای به طول ۲ روی این خط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = 2 \Rightarrow 3 \times 2 + 3y = 6 \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow \text{مختصات نقطه} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲ نقاط $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ روی خط مورد نظر قرار دارند، پس داریم:

$$1 \quad -2a - b \times 0 = 4 \Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow a = -2$$

$$2 \quad a \times 0 - b \times 6 = 4 \Rightarrow -6b = 4 \Rightarrow b = -\frac{4}{6} \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

پس معادله خط داده شده به صورت $-2x + \frac{2}{3}y = 4$ درمی‌آید، بنابراین مختصات نقطه‌ای به عرض ۳ روی این خط نیز برابر است با:

$$y = 3 \Rightarrow -2x + \frac{2}{3} \times 3 = 4 \Rightarrow -2x + 2 = 4$$

$$\Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{نقطه مورد نظر} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۱۹

با توجه به شکل می‌توان فهمید که نقطه‌های $\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی خط داده شده قرار دارند، پس داریم:

$$\text{روی خط} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 = a \times 0 + b \Rightarrow b = 3$$

$$\text{روی خط} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = -5 \times a + 3 \Rightarrow -3 = -5a \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

بنابراین معادله خط به صورت $y = \frac{3}{5}x + 3$ است، بنابراین

مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ c \end{bmatrix}$ روی این خط به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$y = \frac{3}{5}x + 3 \text{ روی} \begin{bmatrix} 4 \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow c = \frac{3}{5} \times 4 + 3$$

$$\Rightarrow c = \frac{12}{5} + 3 \Rightarrow c = \frac{12 + 15}{5} \Rightarrow c = \frac{27}{5}$$

پاسخ ۲۰

۱ شیب - عرض از مبدأ

۲ جهت مثبت محور طول‌ها

۳ عرض‌ها

۴ جهت مثبت - منفی

۵ عرض‌ها - طول‌ها

$$6 \quad \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

۳ به جای x و y مقدارهای مختلفی قرار می‌دهیم، به طوری که

در معادله خط صدق کنند:

$$x = 0 \Rightarrow 0 + \frac{y}{2} = 3 \Rightarrow \frac{y}{2} = 3 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow$$

نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ روی خط است.

$$y = 0 \Rightarrow x + \frac{0}{2} = 3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$$

نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی خط است.

$$x = 2 \Rightarrow 2 + \frac{y}{2} = 3 \Rightarrow \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$$

نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی خط است.

پاسخ ۱۶

۱ کفایت در معادله داده شده، به جای x مقدار عددی ۳ را قرار داده و مقدار عددی y را محاسبه کنیم:

$$x = 3 \Rightarrow y = 3 \times 3 - 2 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow \text{مختصات نقطه} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

۲ کفایت در معادله $2y - \frac{x}{3} = 1$ ، به جای y مقدار عددی -2 را قرار داده و x را به دست آوریم:

$$2 \times (-2) - \frac{x}{3} = 1 \Rightarrow -4 - \frac{x}{3} = 1 \Rightarrow -\frac{x}{3} = 5$$

$$\Rightarrow x = -15 \Rightarrow \text{مختصات نقطه} = \begin{bmatrix} -15 \\ -2 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۱۷

۱ برای به دست آوردن مختصات نقطه برخورد با محور طول‌ها، y را برابر صفر قرار داده و x را به دست می‌آوریم. هم‌چنین برای به دست آوردن مختصات نقطه برخورد با محور عرض‌ها، x را برابر صفر قرار داده و y را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{محل برخورد با محور } x \text{ ها: } y = 0 \Rightarrow 0 = 3x + 15$$

$$\Rightarrow 3x = -15 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow \text{مختصات نقطه} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

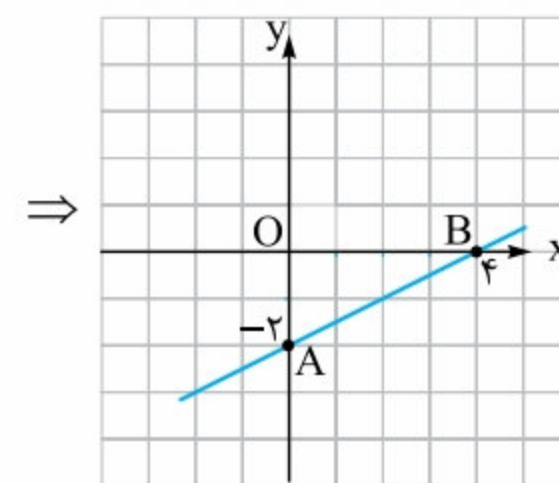
$$\text{محل برخورد با محور } y \text{ ها: } x = 0 \Rightarrow y = 3 \times 0 + 15$$

$$\Rightarrow y = 15 \Rightarrow \text{مختصات نقطه} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix}$$

۲ محل برخورد خط با محورها را به دست آورده و سپس به کمک رسم شکل مساحت را به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow 0 - 2y = 4 \Rightarrow -2y = 4 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$y = 0 \Rightarrow x - 2 \times 0 = 4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{OB \times OA}{2} \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

پاسخ ۲۱

در هر قسمت، پس از استانداردسازی معادله داده‌شده، شیب و عرض از مبدأ را تعیین می‌کنیم:

۱ $y = 2x - 3 \Rightarrow$ شیب = ۲، عرض از مبدأ = -۳

۲ $y = \frac{3}{4}x \Rightarrow$ شیب = $\frac{3}{4}$ ، عرض از مبدأ = ۰

۳ $2x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = -2x + 4$

\Rightarrow شیب = -۲، عرض از مبدأ = ۴

۴ $\frac{x}{3} + 3y = 7 \Rightarrow 3y = -\frac{x}{3} + 7$

$\xrightarrow{(\div 3)}$ $y = -\frac{x}{9} + \frac{7}{3} \Rightarrow$ شیب = $-\frac{1}{9}$ ، عرض از مبدأ = $\frac{7}{3}$

۵ $2(x + \frac{1}{3}) + 5(y - 1) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 2x + \frac{2}{3} + 5y - 5 = \frac{2}{3} \Rightarrow 2x + 5y - 5 = 0$

$\Rightarrow 5y = -2x + 5 \xrightarrow{(\div 5)} y = -\frac{2}{5}x + 1$

\Rightarrow شیب = $-\frac{2}{5}$ ، عرض از مبدأ = ۱

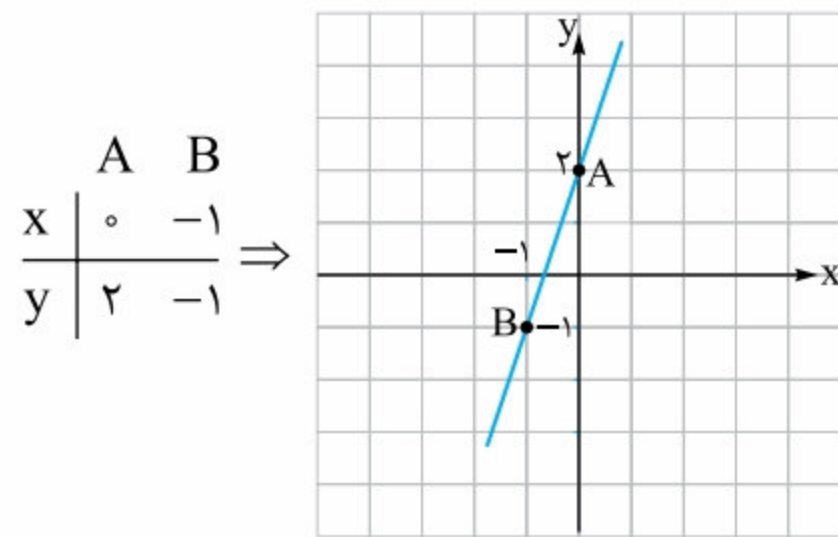
پاسخ ۲۲

۱ با توجه به معادله خط، شیب برابر $2m - 3$ و عرض از مبدأ برابر $3n - 1$ است، پس داریم:

$2m - 3 = 3 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$

$3n - 1 = 5 \Rightarrow 3n = 6 \Rightarrow n = 2$

۲ با توجه به مقادیر m و n ، معادله خط به صورت $y = 3x + 2$ به دست می‌آید. حالا به کمک نقطه‌یابی، نمودار خط را رسم می‌کنیم:



۳ برای به دست آوردن محل برخورد با محورهای x و y عمل می‌کنیم:

محل برخورد با محور x : $y = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

پس نمودار، محور x را در نقطه $[-\frac{2}{3}, 0]$ قطع می‌کند.

محل برخورد با محور y : $x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 2 = y \Rightarrow y = 2$

پس نمودار، محور y را در نقطه $[0, 2]$ قطع می‌کند.

پاسخ ۲۳

۱ شیب خط $y = (3m + 2)x - 2m + 1$ برابر ۴ است، پس

باید داشته باشیم: $3m + 2 = 4 \Rightarrow 3m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

بنابراین عرض از مبدأ خط برابر می‌شود با:

$-2m + 1 = -2(\frac{2}{3}) + 1 = -\frac{4}{3} + 1 = \frac{-4 + 3}{3} = \frac{-1}{3}$

۲ ابتدا معادله خط داده‌شده را استاندارد می‌کنیم:

$(m+1)y - 2(m-2)x - 4 = 0 \Rightarrow (m+1)y = 2(m-2)x + 4$

$\Rightarrow y = \frac{2(m-2)x}{m+1} + \frac{4}{m+1}$

حالا چون عرض از مبدأ خط برابر $\frac{4}{m+1}$ است، پس باید داشته باشیم:

$\frac{4}{m+1} = -1 \Rightarrow m+1 = -4 \Rightarrow m = -5$

بنابراین شیب خط برابر می‌شود با:

$\frac{2(m-2)}{m+1} = \frac{2(-5-2)}{-5+1} = \frac{2 \times (-7)}{-4} = \frac{-14}{-4} = \frac{7}{2}$

پاسخ ۲۴

۱ معادله خط به صورت $y = 3x + 5$ است.

۲ فرض کنید معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد. در این

صورت باید داشته باشیم $a = 2b$ و $a + b = 9$ ، پس نتیجه می‌گیریم:

$a + b = 9 \xrightarrow{(a=2b)} 2b + b = 9$

$\Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 2 \times 3 = 6$

\Rightarrow معادله خط: $y = 6x + 3$

۳ چون خط، محور y را در نقطه ۴ قطع می‌کند، پس عرض از

مبدأش برابر ۴ است و در نتیجه معادله آن به صورت $y = -\frac{2}{3}x + 4$ خواهد بود.

۴ نمودار، محور y را در نقطه -۳ قطع کرده، پس عرض از

مبدأ خط برابر -۳ است، بنابراین چون شیب خط هم برابر ۳ است،

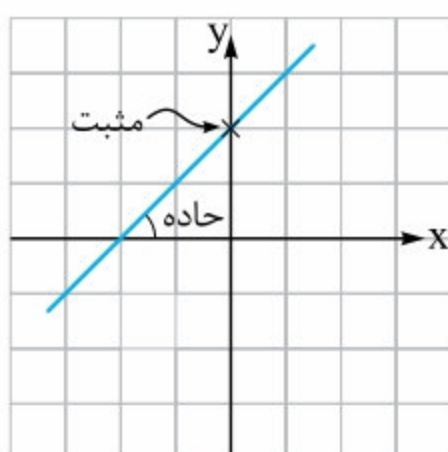
نتیجه می‌گیریم معادله آن به صورت $y = 3x - 3$ می‌باشد.

۵ معادلات خطوطی که از مبدأ عبور می‌کنند، به صورت $y = ax$

است، بنابراین چون شیب این خط برابر ۴ می‌باشد، پس معادله آن به

صورت $y = 4x$ به دست می‌آید.

پاسخ ۲۵



۱ زاویه خط با جهت مثبت محور

x ، تند است و نمودار، محور y را

را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع

کرده، پس شیب و عرض از مبدأ هر

دو مثبت هستند.

پاسخ ۲۸

۱ شیب خط AB را به دست آورده و برابر ۵ قرار می‌دهیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{m - 3 - 4}{2 - (m + 1)} = \frac{m - 7}{2 - m - 1} = \frac{m - 7}{1 - m}$$

$$\Rightarrow \frac{m - 7}{1 - m} = 5 \Rightarrow m - 7 = 5(1 - m)$$

$$\Rightarrow m - 7 = 5 - 5m \Rightarrow 6m = 12 \xrightarrow{(\div 6)} m = 2$$

۲ شیب دو خط را به دست آورده و برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} \Rightarrow m_1 = \frac{2a - 2}{a - 1} = \frac{2(a - 1)}{a - 1} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2a \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow m_2 = \frac{4 - a}{3 - 2a}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\frac{4 - a}{3 - 2a} = 2 \Rightarrow 4 - a = 2(3 - 2a) \Rightarrow 4 - a = 6 - 4a$$

$$\Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

پاسخ ۲۹

اگر A, B و C سه نقطه باشند که روی یک خط قرار دارند، آن‌گاه رابطه $m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$ همواره برقرار است. حالا m_{AC} و

m_{AB} را محاسبه کرده و برابر هم قرار می‌دهیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2a - 5}{a - (-3)} = \frac{2a - 5}{a + 3}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{11 - 5}{-6 - (-3)} = \frac{+6}{-3} = -2$$

$$\Rightarrow m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{2a - 5}{a + 3} = -2$$

$$\Rightarrow 2a - 5 = -2(a + 3) \Rightarrow 2a - 5 = -2a - 6$$

$$\Rightarrow 4a = 5 - 6 \Rightarrow 4a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

پس با توجه به مقدار a، مختصات نقطه B برابر است با:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 2 \times (-\frac{1}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

پاسخ ۳۰

۱ خط به معادله $x = a$

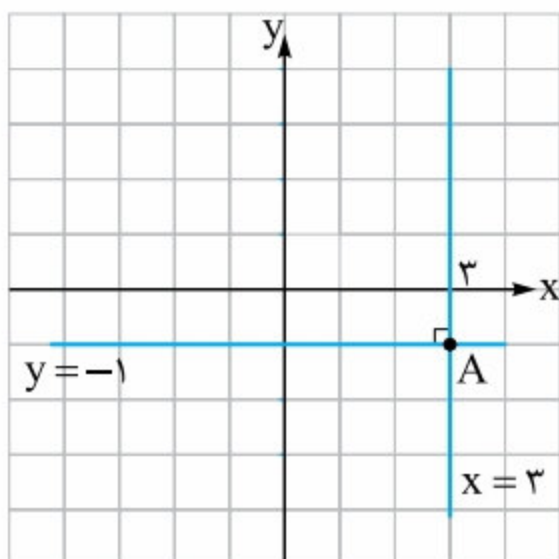
موازی محور عرض‌ها و خط

به معادله $y = b$ موازی

محور طول‌ها است. پس

نمودار $x = 3$ و $y = -1$ به

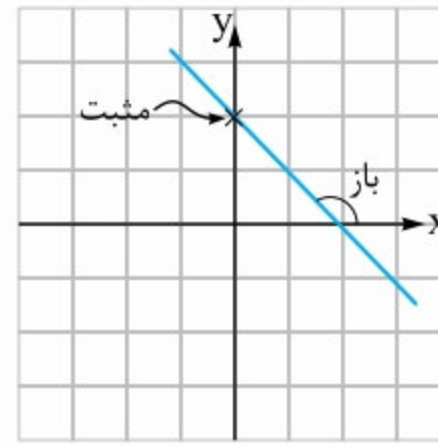
صورت مقابل قابل رسم است:



۲ محل تقاطع دو خط همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید،

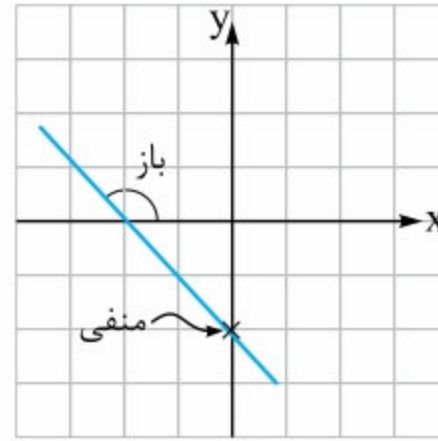
نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ است.

۲ زاویه خط با جهت مثبت



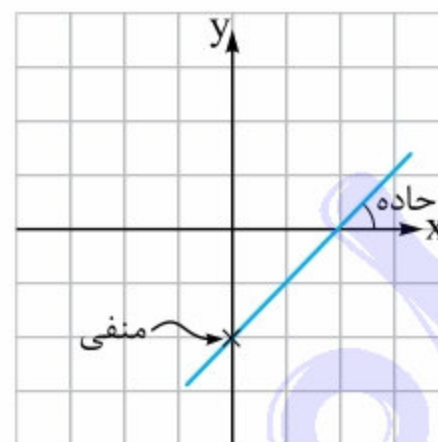
محور Xها، باز است، پس شیب خط منفی است و محور Yها را با عرض مثبت قطع کرده، پس عرض از مبدأ خط مثبت است.

۳ زاویه خط با جهت مثبت



محور Xها، باز است، پس شیب منفی است. نمودار، محور Yها را با عرض منفی قطع کرده، پس عرض از مبدأ منفی است.

۴ مشابه استدلال قسمت‌های



قبل، شیب خط، مثبت و عرض از مبدأ آن منفی است.

پاسخ ۲۶

۱ با توجه به شکل

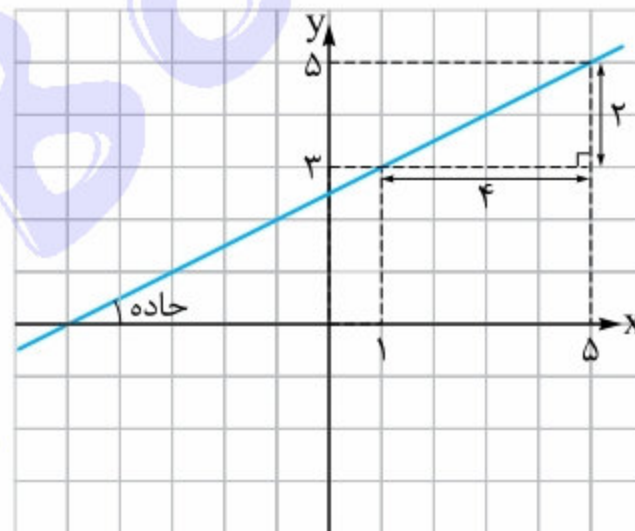
چون زاویه‌ای که خط با

جهت مثبت محور Xها

می‌سازد، حاده است، پس

شیب خط، مثبت و برابر

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ می‌باشد.



۲ چون زاویه‌ای که

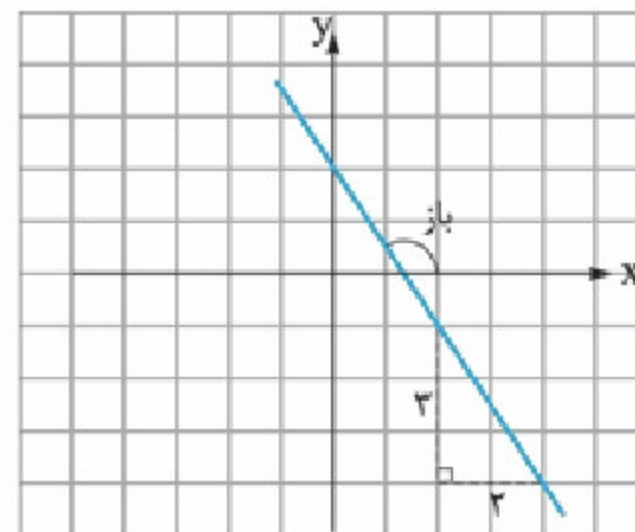
خط با جهت مثبت

محور Xها می‌سازد، باز

است، پس شیب خط،

منفی و برابر $-\frac{3}{2}$

می‌باشد.



پاسخ ۲۷

۱ شیب خط برابر است با:

$$m = \frac{\text{تفاضل yها}}{\text{تفاضل xها}} = \frac{7 - (-6)}{2 - 3} = \frac{13}{-1} = -13$$

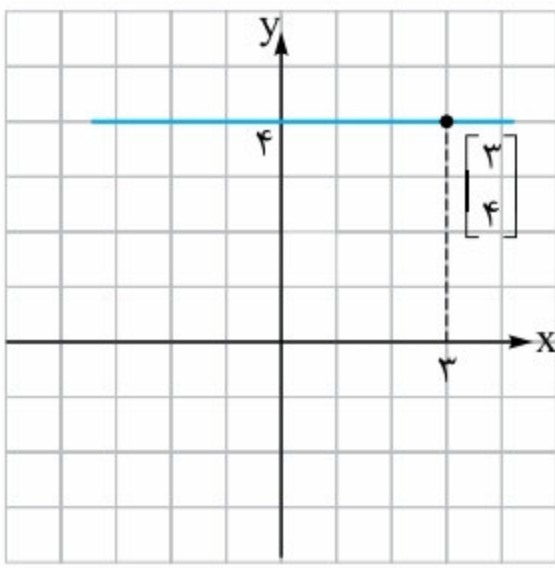
۲ شیب خط برابر است با:

$$m = \frac{\text{تفاضل yها}}{\text{تفاضل xها}} = \frac{3b - a}{6b - 2a} = \frac{3b - a}{2(3b - a)} = \frac{1}{2}$$

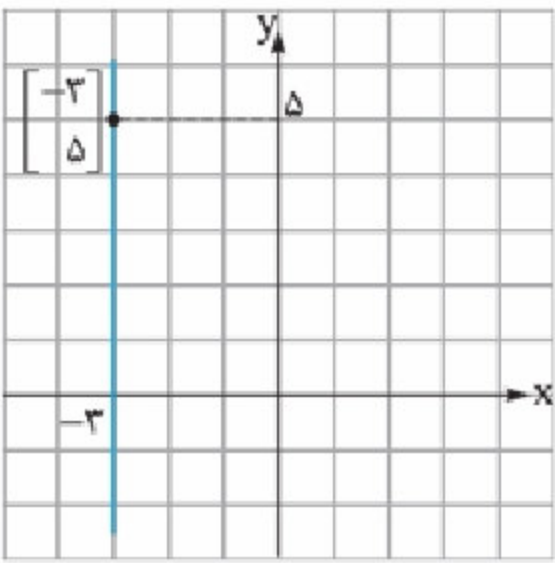
۳ خط داده‌شده از نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ عبور کرده، پس شیب

خط برابر است با: $m = \frac{\text{تفاضل yها}}{\text{تفاضل xها}} = \frac{5 - 0}{6 - (-3)} = \frac{5}{9}$

پاسخ ۳۳



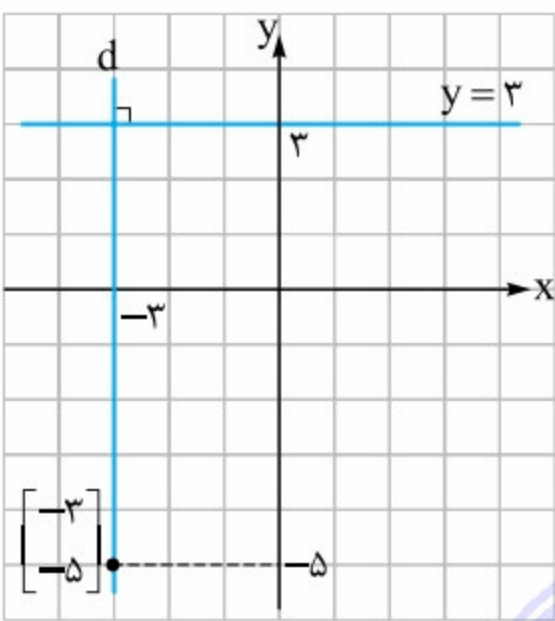
۱ با توجه به شکل، معادله خط برابر است با $y = 4$.



۲ با توجه به شکل، معادله خط برابر است با $x = -3$.

پاسخ ۳۴

۱ روش اول



مطابق شکل، معادله خط موردنظر (d) برابر $x = -3$ است.

روش دوم

معادله خطوط عمود بر خط‌های به فرم $y = a$ به شکل $x = b$ است. پس معادله خط موردنظر نیز به فرم $x = b$

می‌باشد. حالا چون این خط از نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ ، یعنی نقطه‌ای به طول -3 عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت $x = -3$ خواهد بود.

۲ معادله این خط به فرم $y = k$ بوده و چون از نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت $y = 8$ خواهد بود.

۳ خط موردنظر در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ بر محور عرض‌ها عمود است، پس معادله آن به صورت $y = 10$ می‌باشد.

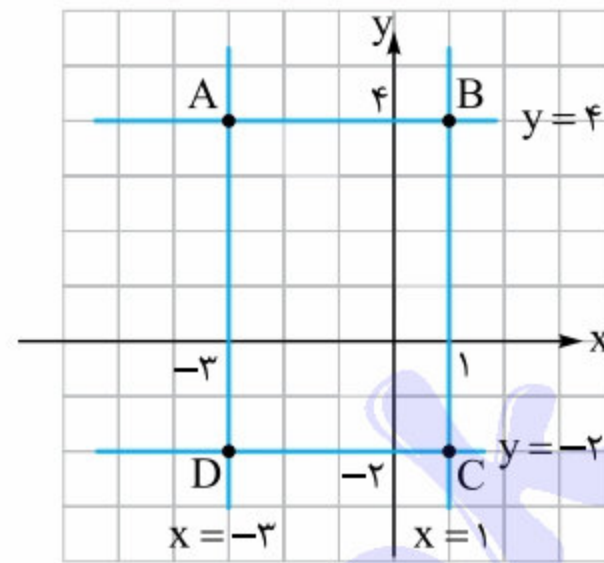
۴ خط موردنظر در نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ بر محور طول‌ها عمود است، پس معادله آن به صورت $x = -3$ می‌باشد.

۳ با توجه به شکل صفحه قبل، زاویه بین این دو خط با محورهای مختصات برابر 90° است.

۴ معادله محور طول‌ها $y = 0$ و معادله محور عرض‌ها $x = 0$ است؛ چون عرض هر نقطه روی محور طول‌ها برابر صفر است و به همین ترتیب طول هر نقطه روی محور y ها برابر صفر می‌باشد.

پاسخ ۳۱

با توجه به معادله‌ها شکل مناسب را رسم کرده و مساحت آن را به دست می‌آوریم:

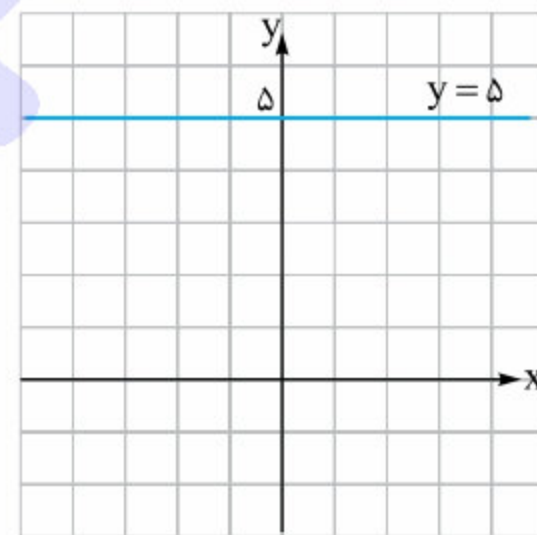


حالا با توجه به شکل واضح است که از برخورد خطوط، یک مستطیل به ابعاد $6 = 4 + 2$ و $4 = 3 + 1$ پدید می‌آید، پس مساحت شکل برابر است با $24 = 4 \times 6$.

پاسخ ۳۲

۱ طول تمام نقاطی که روی خط $x = 5$ قرار دارند، برابر ۵ است. پس طول نقطه $\begin{bmatrix} 3a-1 \\ 2a+1 \end{bmatrix}$ نیز باید برابر ۵ باشد، پس داریم:

$$3a - 1 = 5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

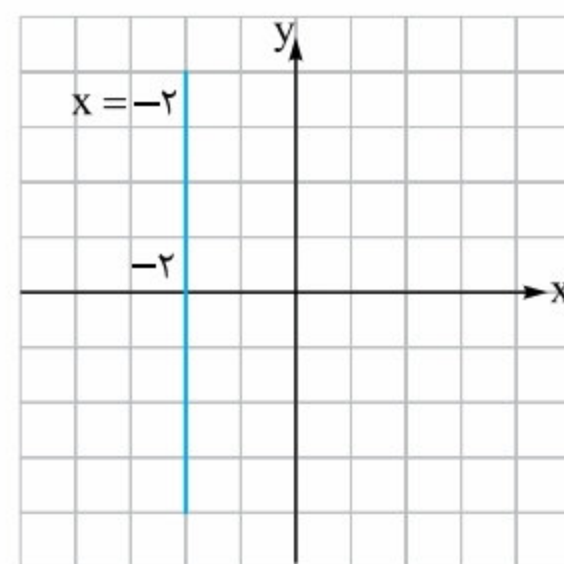


پس خط $y = 2a + 1$ همان خط $y = 2 \times 2 + 1 = 5$ است که به صورت مقابل رسم می‌شود:

۲ هر نقطه روی خط $y = -17$ ، عرضی برابر با -17 دارد، پس عرض $\begin{bmatrix} 3a+4 \\ 5a-7 \end{bmatrix}$ نیز برابر -17 است و داریم:

$$5a - 7 = -17 \Rightarrow 5a = -10 \Rightarrow a = -2$$

پس مقدار $3a + 4$ برابر می‌شود با: $3 \times (-2) + 4 = -6 + 4 = -2$



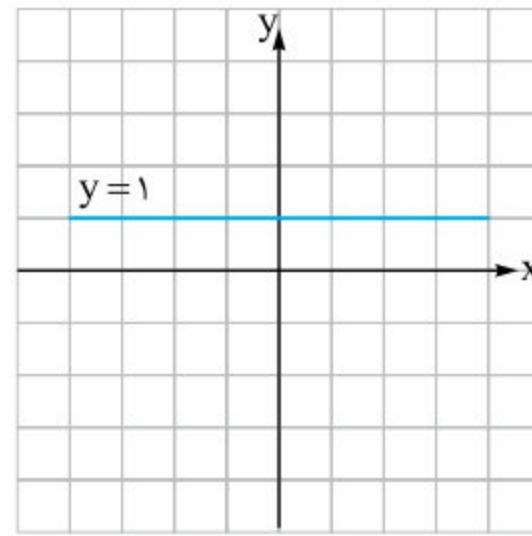
در نتیجه شکل نمودار $x = -2$ به صورت روبه‌رو رسم می‌شود:



پاسخ ۳۵

۱ چون همه خطوط موازی محور Xها به فرم $y = k$ هستند، پس

برای آن که خط $(m+2)x - (m-3)y = 5$ موازی محور Xها



شود، باید ضریب X برابر صفر

باشد، یعنی $m+2=0$.

پس $m=-2$ و در نتیجه

معادله خط به صورت زیر

درمی‌آید:

$$(-2+2)x - (-2-3)y = 5 \Rightarrow -(-5)y = 5$$

$$\Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow y = 1$$

پس خط موردنظر محور Yها را با عرض ۱ قطع می‌کند.

۲ خطوطی بر خط‌هایی به فرم $y = k$ عمودند که معادله آن‌ها به

صورت $x = t$ باشد. پس در معادله $(m-3)x + (2m+6)y = 3$

ضریب Y باید برابر صفر باشد، یعنی $2m+6=0$ و در نتیجه

$m = -3$ پس داریم:

$$(-3-3)x + (2 \times (-3) + 6)y = 3$$

$$\Rightarrow -6x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

به این ترتیب $y = 3m$ نیز برابر می‌شود با $y = -9$ ، پس نقطه

تقاطع دو خط، نقطه $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -9 \end{bmatrix}$ است.

پاسخ ۳۶

۱ شیب هر دو برابر ۲ است، پس موازی هستند.

۲ ابتدا معادله‌ها را استاندارد می‌کنیم:

$$2x + 3y = 4 \Rightarrow 3y = -2x + 4 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \text{شیب} = -\frac{2}{3}$$

$$-6y = 9 + 4x \xrightarrow{\div(-6)} y = -\frac{4}{6}x - \frac{9}{6}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{3}{2} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{2}{3}$$

بنابراین چون شیب دو خط با هم مساوی است، پس موازی هستند.

۳ ابتدا معادله دو خط را استاندارد می‌کنیم:

$$x - 2y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow -2y = -x + \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\div(-2)} y = \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{1}{2}$$

$$2x - y + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow -y = -2x - \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\div(-1)} y = 2x + \frac{1}{4} \Rightarrow \text{شیب} = 2$$

شیب‌ها برابر نیستند، پس دو خط موازی نمی‌باشند.

۴ ابتدا معادله دو خط را استاندارد کرده و شیب آن‌ها را

محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow \frac{y}{3} = -\frac{x}{2} + 1 \xrightarrow{(\times 3)} y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$\Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

$$x - \frac{2}{3}y - 4 = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}y = -x + 4 \xrightarrow{(\times 3)} -2y$$

$$= -3x + 12 \xrightarrow{\div(-2)} y = \frac{3}{2}x - 6 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

شیب‌ها برابر نیستند، بنابراین دو خط داده‌شده نمی‌توانند با هم

موازی باشند.

پاسخ ۳۷

۱ شیب خط اول برابر ۲ و شیب خط دوم برابر $\frac{m}{2} - 3$ است،

پس چون دو خط موازی‌اند، باید داشته باشیم:

$$\frac{m}{2} - 3 = 2 \Rightarrow \frac{m}{2} = 5 \Rightarrow m = 10$$

۲ ابتدا معادله خطوط را استاندارد می‌کنیم:

$$2x - 3y - 3 = 0 \Rightarrow -3y = -2x + 3$$

$$\xrightarrow{\div(-3)} y = \frac{2}{3}x - 1 \Rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3}$$

$$mx - (m-3)y = 7 \Rightarrow (3-m)y = -mx + 7$$

$$\xrightarrow{\div(3-m)} y = \frac{-m}{3-m}x + \frac{7}{3-m} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{-m}{3-m}$$

حالا شیب‌های به دست آمده را مساوی هم قرار داده و مقدار m را

$$\frac{-m}{3-m} = \frac{2}{3} \Rightarrow -3m = 2(3-m)$$

$$\Rightarrow -3m = 6 - 2m \Rightarrow -m = 6 \Rightarrow m = -6$$

پاسخ ۳۸

۱ دو خط در صورتی بر هم عمودند که شیب یکی از آن‌ها قرینه و

معکوس شیب دیگری باشد، پس چون شیب خط $y = -\frac{1}{3}x + 5$

برابر $-\frac{1}{3}$ ، شیب خط $y = (2m-1)x + 4$ باید برابر ۳ باشد، تا

این دو خط بر هم عمود شوند، پس باید داشته باشیم:

$$2m - 1 = 3 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

۲ ابتدا معادله خطوط را استاندارد می‌کنیم:

$$mx + y = 1 \Rightarrow y = -mx + 1 \Rightarrow \text{شیب} = -m$$

$$4y - mx = 2 \Rightarrow 4y = mx + 2 \xrightarrow{(\div 4)}$$

$$y = \frac{m}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{m}{4}$$

حالا چون قرینه و معکوس $-m$ برابر $\frac{1}{m}$ است، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{m} = \frac{m}{4} \Rightarrow m^2 = 4 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |m| = 2 \Rightarrow m = \pm 2$$

پاسخ ۳۹

۱ فرض کنید معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، بنابراین

چون شیب خط برابر ۲ است، پس معادله آن به صورت $y = 2x + b$

و $y = -4$ ، نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ است و این نقطه نیز روی خط مورد نظر قرار دارد، پس داریم:

$$d \text{ روی } \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow -4 = a \times 3 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط: } y = -\frac{4}{3}x$$

پاسخ ۴۱

۱ ابتدا با استانداردسازی معادله خط $2y - 4x = 5$ ، شیب آن را حساب می‌کنیم:

$$2y - 4x = 5 \xrightarrow{(\div 2)} y = 2x + \frac{5}{2} \Rightarrow \text{شیب} = 2$$

پس باید معادله خطی با شیب ۲ بنویسیم که از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند.

$$\Rightarrow \text{معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}} y - (-3) = 2(x - 3) \Rightarrow y + 3 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow y = 2x - 9$$

۲ ابتدا معادله خط $3x - 9y = 4$ را استاندارد کرده و شیب آن را به دست می‌آوریم:

$$3x - 9y = 4 \Rightarrow -9y = -3x + 4 \xrightarrow{(\div -9)} y = \frac{-3}{-9}x - \frac{4}{9} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{1}{3}$$

پس شیب خط عمود بر این خط باید برابر ۳- باشد و ضمناً از نقطه

$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ عبور کند، بنابراین معادله آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - (-1) = -3(x - 4) \Rightarrow y + 1 = -3x + 12$$

$$\Rightarrow y = -3x + 11$$

پاسخ ۴۲

۱ ابتدا شیب سه خط AB ، AC و BC را حساب کرده و ثابت می‌کنیم دو خط از بین آن‌ها بر هم عمودند.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{12 - (-0/5)}{7 - 12} = \frac{12 + 0}{-5} = -\frac{12}{5}$$

$$= \frac{24 + 1}{-5} = \frac{25}{-5} = -\frac{25}{5} = -\frac{5}{1}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4 - (-0/5)}{3 - 12} = \frac{4 + 0}{-9} = -\frac{4}{9}$$

$$= \frac{9}{-9} = -\frac{1}{1}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4 - 12}{3 - 7} = \frac{-8}{-4} = 2$$

قابل بازنویسی است. حالا چون این خط از نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند،

پس مختصات این نقطه باید در معادله خط صدق کند و داریم:

$$5 = 2 \times (-3) + b \Rightarrow 5 = -6 + b \Rightarrow b = 11$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط: } y = 2x + 11$$

۲ باز هم فرض می‌کنیم معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، در این صورت چون عرض از مبدأ خط برابر ۳- می‌باشد،

پس معادله آن به صورت $y = ax - 3$ قابل نوشتن است. حالا چون نقطه $\begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$ روی این خط است، پس باید داشته باشیم:

$$7 = a \times (-5) - 3 \Rightarrow 10 = -5a \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط: } y = -2x - 3$$

پاسخ ۴۰

۱ شیب خط گذرا از نقاط $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$m = \frac{10 - 4}{6 - 5} = \frac{6}{1} = 6$$

بنابراین معادله خط مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\xrightarrow{\text{روی خط } \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}} y - 4 = 6(x - 5) \Rightarrow y - 4 = 6x - 30$$

$$\Rightarrow y = 6x - 26$$

۲ کافیست معادله خطی که دو نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ را به هم وصل می‌کند را به دست آوریم. شیب خط واصل بین این دو نقطه برابر است با:

$$m = \frac{-4 - 0}{0 - 3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}} y - 0 = \frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 4$$

۳ نقطه‌ای به عرض ۴ روی نیمساز ناحیه اول و سوم، دارای

مختصات $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ و نقطه‌ای به طول ۷ روی نیمساز دوم و چهارم دارای

مختصات $\begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix}$ است. حالا شیب خط واصل بین دو نقطه را به دست

$$\text{آورده و معادله خط را می‌نویسیم: } m = \frac{-7 - 4}{7 - 4} = \frac{-11}{3}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}} y - 4 = -\frac{11}{3}(x - 4) \Rightarrow y - 4 = -\frac{11}{3}x + \frac{44}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{11x}{3} + \frac{44}{3} + 4 \Rightarrow y = -\frac{11}{3}x + \frac{56}{3}$$

۴ چون خط از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت

$$d: y = ax \text{ است. از طرف دیگر چون نقطه برخورد دو خط } x = 3$$



پاسخ ۴۵

با توجه به ضریب متغیرها و به کمک روش حذفی جواب دستگاه‌های داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad 1$$

$$2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

چون $x - y = 2 \Rightarrow 4 - y = 2 \Rightarrow y = 2$

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 3y = 15 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \quad 2$$

$$10x = 20 \Rightarrow x = 2$$

چون $x + 3y = 5 \Rightarrow 2 + 3y = 5 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$

$$\begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ -4x - 6y = -28 \end{cases} \quad 3$$

$$-11y = -22$$

چون $2x + 3y = 14 \Rightarrow 2x + 3(2) = 14$

$\Rightarrow 2x = 14 - 6 \Rightarrow x = 4$

۴ ابتدا با ضرب اعداد در پرانتزها، عبارت‌ها را ساده کرده و سپس دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3(x - y) - 2y = 5 \\ 2(x + y) + x = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y - 2y = 5 \\ 2x + 2y + x = 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 5y = -5 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$$

$$7y = 14 \Rightarrow y = 2$$

چون $3x + 2y = 19 \Rightarrow 3x + 2(2) = 19$

$\Rightarrow 3x = 19 - 4 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

پاسخ ۴۶

۱ ابتدا به کمک معادله اول x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم و سپس با جایگزینی رابطه به دست آمده به جای x در معادله دوم، دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x - 4y = 4 \Rightarrow x = 4y + 4 \quad (I) \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \xrightarrow{(I)} \begin{cases} 2(4y + 4) - 3y = 18 \\ 8y + 8 - 3y = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5y + 8 = 18 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow (I): x - 4 \times 2 = 4 \Rightarrow x - 8 = 4 \Rightarrow x = 12$$

۲ از رابطه دوم واضح است که $x = y + 7$. حالا با جایگزینی در

معادله اول داریم: $\frac{x+1}{2} - \frac{y-5}{3} = 6 \Rightarrow \frac{(y+7)+1}{2} - \frac{y-5}{3} = 6$

$\xrightarrow{\times 6} \left(\frac{y+8}{2} - \frac{y-5}{3}\right) = 6 \Rightarrow 3(y+8) - 2(y-5) = 36$

$\Rightarrow 3y + 24 - 2y + 10 = 36 \Rightarrow y = 36 - 34$

چون $x = y + 7 \Rightarrow x = 2 + 7 \Rightarrow x = 9$

پس چون شیب دو خط AC و BC قرینه معکوس یکدیگرند، نتیجه می‌گیریم AC و BC بر هم عمودند و ضمناً AB وتر است. پس معادله وتر (خط AB) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{B} y - 12 = -\frac{5}{2}(x - 7)$$

$$\Rightarrow y - 12 = -\frac{5}{2}x + \frac{35}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{35 + 24}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{59}{2}$$

پاسخ ۴۳

عمودمنصف خط واصل بین A و B بر AB عمود است. پس اول شیب AB را به دست آورده و سپس شیب عمودمنصف را تعیین می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-6 - 8}{-3 - 5} = \frac{-14}{-8} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = -\frac{4}{7}$$

ضمناً عمودمنصف AB از نقطه وسط AB عبور می‌کند که مختصات آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - 3}{2} \\ \frac{8 - 6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس معادله عمودمنصف، معادله خطی با شیب $-\frac{4}{7}$ است که از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، یعنی داریم:

معادله عمودمنصف: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{4}{7}(x - 1) \Rightarrow 7(y - 1) = -4(x - 1)$$

$$\Rightarrow 7y - 7 = -4x + 4 \Rightarrow 7y + 4x = 11$$

روی خط $\begin{bmatrix} 10 \\ a \end{bmatrix}$ $\Rightarrow 7a + 40 = 11 \Rightarrow 7a = -29$

$$\Rightarrow a = \frac{-29}{7}$$

پاسخ ۴۴

ابتدا توجه کنید که مختصات نقطه M وسط BC برابر است با:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_B + x_C}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8 + 14}{2} \\ \frac{6 + 10}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

حالا برای نوشتن معادله میانه وارد بر BC یا همان AM باید شیب این خط را به دست آوریم که این شیب نیز برابر است با:

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{8 - 12}{11 - 10} = -4$$

پس با توجه به شیب AM ، معادله آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{(M)} y - 8 = -4(x - 11)$$

$$\Rightarrow y - 8 = -4x + 44 \Rightarrow y = -4x + 52$$

پاسخ ۴۹

برای یافتن نقطه تقاطع دو خط کفایت دستگاه معادله آن‌ها را حل کرده و x و y را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \times(3) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - 3x = -1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 15 \\ y - 3x = -1 \end{cases} \\ &+ \quad \underline{y - 3x = -1} \\ &7y = 14 \Rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

چون $x + 2y = 5 \Rightarrow x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1$

پس محل تقاطع دو خط نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ است.

پاسخ ۵۰

ابتدا مختصات محل برخورد دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2y - 5x = 11 \\ y = 2x + 5 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2y - 5x = 11 \\ \times(-2) \quad y - 2x = 5 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2y - 5x = 11 \\ -2y + 4x = -10 \end{cases} \\ &+ \quad \underline{-2y + 4x = -10} \\ &-x = 1 \Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

چون $y = 2x + 5 \Rightarrow y = -2 + 5 \Rightarrow y = 3$

پس خط موردنظر باید از نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ عبور کرده و شیب آن برابر ۳ باشد، پس معادله این خط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 3(x - (-1)) \\ &\Rightarrow y - 3 = 3(x + 1) \Rightarrow y - 3 = 3x + 3 \Rightarrow y = 3x + 6 \end{aligned}$$

پاسخ ۵۱

با مقاردهی به m مقادیر x و y را به دست می‌آوریم. (بهتر است مقادیری به جای m انتخاب شوند که ضریب x یا ضریب y را برابر صفر می‌کنند. در این صورت یکی از x یا y حذف شده و محاسبات ساده‌تر انجام می‌شود.)

$$m = 1 \Rightarrow (1-1)x + (2 \times 1 + 6)y = 16 \Rightarrow 8y = 16 \Rightarrow y = 2$$

$$m = -3 \Rightarrow (-3-1)x + (2 \times (-3) + 6)y = 16 \Rightarrow -4x = 16 \Rightarrow x = -4$$

بنابراین نقطه مشترکی که همه خطوط از آن عبور می‌کنند، نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ است.

پاسخ ۵۲

ابتدا نقطه مشترک که معادلات به فرم $m(x+2y) - (2x+y) = 6$ از آن عبور می‌کنند را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} m(x+2y) - (2x+y) &= 6 \xrightarrow{(m=0)} (x+2y) - (2x+y) = 6 \\ &\Rightarrow -(2x+y) = 6 \Rightarrow 2x+y = -6 \end{aligned}$$

$$m(x+2y) - (2x+y) = 6$$

$$\xrightarrow{(m=1)} x + 2y - 2x - y = 6 \Rightarrow y - x = 6$$

۳

ابتدا برای ساده‌تر شدن حل دستگاه، معادله اول را در عدد ۳ و معادله دوم را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم. در این صورت دستگاه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \times(3) \begin{cases} \left(\frac{x}{3} - 3y = 10\right) \\ \frac{y}{4} + x = \frac{9}{4} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x - 9y = 30 \\ y + 4x = 9 \end{cases} \\ \times(4) \begin{cases} \frac{y}{4} + x = \frac{9}{4} \\ \frac{y}{4} + x = \frac{9}{4} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x - 9y = 30 \\ y + 4x = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

حالا برای یافتن مقادیر x و y کفایت دستگاه جدید را حل کنیم. اما با توجه به معادله اول داریم $x = 9y + 30$ ، حالا با جایگزینی $9y + 30$ به جای x در معادله دوم، ابتدا مقدار y و نهایتاً مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \text{معادله دوم: } y + 4x &= 9 \Rightarrow y + 4(9y + 30) = 9 \\ &\Rightarrow y + 36y + 120 = 9 \Rightarrow 37y = -111 \xrightarrow{(\div 37)} y = -3 \\ \text{چون } y + 4x &= 9 \Rightarrow -3 + 4x = 9 \\ &\Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

پاسخ ۴۷

چون $x = 1$ و $y = 2$ جواب دستگاه است، پس هر دو معادله دستگاه به ازای این مقادیر برقرار هستند و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax - by = -1 \\ (a-1)x + 2by = 10 \end{cases} &\xrightarrow{\frac{x=1}{y=2}} \begin{cases} a - 2b = -1 \\ (a-1) \times 1 + 2b \times 2 = 10 \end{cases} \\ \xrightarrow{\frac{x=1}{y=2}} &\begin{cases} a - 2b = -1 \\ (a-1) \times 1 + 2b \times 2 = 10 \end{cases} \\ &\Rightarrow \text{دستگاه جدید: } \begin{cases} a - 2b = -1 \\ a + 4b = 11 \end{cases} \end{aligned}$$

حالا با حل دستگاه جدید مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \times(-1) \begin{cases} a - 2b = -1 \\ a + 4b = 11 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -a + 2b = 1 \\ a + 4b = 11 \end{cases} \\ &+ \quad \underline{a + 4b = 11} \\ &6b = 12 \Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

چون $a - 2b = -1 \Rightarrow a - 4 = -1 \Rightarrow a = 3$

پاسخ ۴۸

هیچ دو توان صحیحی از اعداد ۳ و ۵ با هم برابر نیستند، مگر این که توان هر دو عدد برابر صفر باشد، پس داریم:

$$3^{2x+y-9} = 5^{2y+x-17} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-9=0 \\ 3y+x-17=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=9 \\ 3y+x=17 \end{cases}$$

حالا با حل دستگاه به دست آمده مقادیر x و y را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3y + x = 17 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 9 \\ \times(-2) \quad 3y + x = 17 \\ + \quad \underline{-6y - 2x = -34} \end{cases} \\ &-5y = -25 \Rightarrow y = 5 \end{aligned}$$

چون $2x + y = 9 \Rightarrow 2x + 5 = 9 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

پس جواب‌های متفاوت برای a و b عبارت‌اند از:

$$(a, b) = (1, -15) \text{ یا } (-15, 1)$$

چون دستگاه بی‌شمار جواب دارد، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{m}{3} = \frac{-(n-3)}{8} = \frac{7}{28}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{3} = \frac{7}{28} \Rightarrow \frac{m}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

$$\frac{-(n-3)}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3-n}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3-n}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 3-n=2 \Rightarrow n=1$$

پاسخ ۵۵

فرض کنید طول مستطیل، برابر t و عرض آن برابر a باشد، در این صورت معادلات زیر برقرارند.

$$t = 4a - 1, 2(a+t) = 28 \Rightarrow a+t = 14$$

حالا با حل دستگاه این معادلات، طول و عرض مستطیل را محاسبه کرده و سپس مساحت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a+t=14 & \xrightarrow{\text{جایگزینی}} a+4a-1=14 \\ \Rightarrow 5a=15 \Rightarrow a=3 \\ t=4a-1 & \xrightarrow{a=3} t=4 \times 3 - 1 \Rightarrow t=11 \end{cases}$$

پس طول مستطیل برابر ۱۱ واحد و عرض آن برابر ۳ واحد است، در نتیجه مساحت مستطیل برابر $3 \times 11 = 33$ واحد می‌باشد.

پاسخ ۵۶

فرض کنید g گوسفند و k کانگورو در جنگل زندگی می‌کنند، پس $g+k=30$. از طرفی چون هر کانگورو ۲ پا و هر گوسفند ۴ پا دارد، بنابراین مجموع پاها برابر می‌شود با $2k+4g=84$. حالا به کمک حل دستگاه، تعداد کانگوروها و گوسفندها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \times(-2) \begin{cases} g+k=30 \\ 2k+4g=84 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} -2g-2k=-60 \\ 2k+4g=84 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} -2g-2k=-60 \\ 2k+4g=84 \end{cases} \\ & \Rightarrow 2g=24 \Rightarrow g=12 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} g+k=30 \Rightarrow 12+k=30 \Rightarrow k=18$$

پس ۱۲ گوسفند و ۱۸ کانگورو در این جنگل زندگی می‌کنند.

پاسخ ۵۷

فرض کنید سن پدر برابر p و سن علی برابر a باشد. در این صورت روابط مقابل برقرارند:

$$p = 2a + 6, p + a = 54$$

حالا با حل دستگاه این دو معادله، سن علی و پدرش را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} p = 2a + 6 \\ p + a = 54 \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} \begin{cases} 2a + 6 + a = 54 \\ p + a = 54 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a = 48 \Rightarrow a = 16$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} p = 2a + 6 \Rightarrow p = 2 \times 16 + 6 \Rightarrow p = 38$$

پس علی ۱۶ سال و پدرش ۳۸ سال دارد، بنابراین اختلاف سن آن‌ها برابر است با $38 - 16 = 22$ سال.

حالا با حل دستگاه معادلات به دست آمده، مختصات نقطه مورد نظر

را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x+y=-6 \\ y-x=6 \end{cases} \times(-1) & \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=-6 \\ -y+x=-6 \end{cases} \\ & \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow x = -4 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} y-x=6 \Rightarrow y-(-4)=6$$

$$\Rightarrow y+4=6 \Rightarrow y=2$$

بنابراین نقطه مشترک خطوط داده‌شده، نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ است.

حالا توجه کنید که چون شیب خط $y = -\frac{x}{2} + 5$ برابر $-\frac{1}{2}$ است، پس شیب خط عمود بر این خط باید برابر ۲ باشد، بنابراین

باید معادله خطی با شیب ۲ را پیدا کنیم که از نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند.

معادله این خط نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 2(x - (-4))$$

$$\Rightarrow y - 2 = 2(x + 4) \Rightarrow y - 2 = 2x + 8 \Rightarrow y = 2x + 10$$

پاسخ ۵۳

به کمک نسبت ضرایب، تعداد جواب‌های هر دستگاه را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} \neq \frac{7}{11} \quad \text{داریم: } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 6x + 9y = 11 \end{cases}$$

پس خطوط داده‌شده در این دستگاه با هم موازی هستند و هیچ نقطه برخوردی (مشترک) ندارند، در نتیجه دستگاه جواب ندارد.

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{7}{11} \quad \text{داریم: } \begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ 0.75x + 0.25y = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{6}{0.75} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = \frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3} = 8 \\ \frac{2}{0.25} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = \frac{2 \times 4}{1} = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{6}{0.75} = \frac{2}{0.25} = \frac{8}{1}$$

بنابراین دو خط بر هم منطبق بوده و بی‌شمار جواب داریم.

پاسخ ۵۴

برای این که دستگاه جواب نداشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{5} = \frac{3}{-b} \neq \frac{4}{8}$$

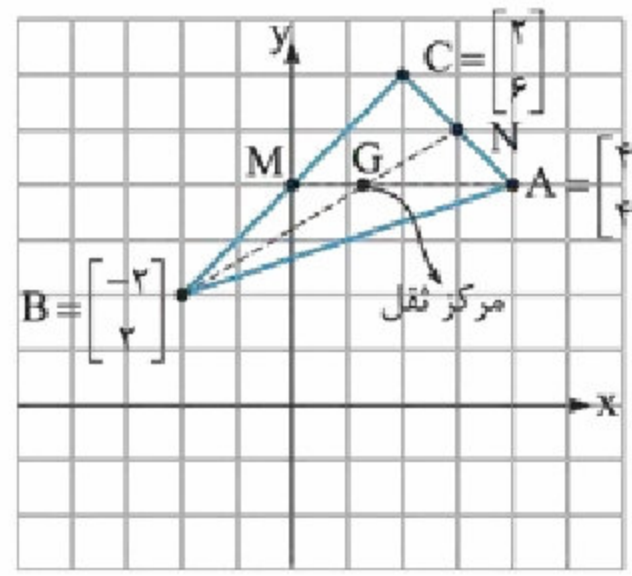
حالا یک مرتبه a را برابر یک در نظر گرفته و b را محاسبه می‌کنیم و بار دیگر b را برابر یک در نظر گرفته و a را محاسبه می‌کنیم. در

این صورت هیچ کدام از نسبت‌ها هم برابر $\frac{4}{8}$ یا همان $\frac{1}{2}$ نخواهند بود.

$$a=1 \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{3}{-b} \Rightarrow -b=15 \Rightarrow b=-15$$

$$b=1 \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{3}{-1} \Rightarrow -a=15 \Rightarrow a=-15$$

پاسخ ۵۸



کافیست معادله میانه‌های AM و BN را به دست آورده و مختصات محل تقاطع آن‌ها را محاسبه کنیم:

توجه کنید که میانه AM از نقطه M یعنی نقطه وسط ضلع BC عبور می‌کند که مختصات آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_B + x_C}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2 + 2}{2} \\ \frac{2 + 6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین چون خط AM از دو نقطه $M = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، پس موازی محور طول‌ها بوده و معادله آن به صورت $AM: y = 4$ به دست می‌آید، پس:

حالا دقت کنید چون میانه BN از وسط ضلع AC می‌گذرد، پس باید مختصات N را به دست آوریم تا بتوانیم معادله خط BN را با داشتن دو نقطه روی آن بنویسیم. اما مختصات N برابر است با:

$$N = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_C}{2} \\ \frac{y_A + y_C}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4 + 2}{2} \\ \frac{4 + 6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

در نتیجه با توجه به مختصات نقاط B و N، شیب خط BN برابر است با: $\text{شیب BN} = \frac{y_B - y_N}{x_B - x_N} = \frac{2 - 5}{-2 - 3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$ پس معادله BN به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{(B)} y - 2 = \frac{3}{5}(x - (-2))$$

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{3}{5}(x + 2) \Rightarrow 5(y - 2) = 3(x + 2)$$

$$\Rightarrow 5y - 10 = 3x + 6 \Rightarrow 5y - 3x = 16$$

$$\Rightarrow BN: 5y - 3x = 16$$

حالا با پیدا کردن محل برخورد AM و BN، به کمک حل دستگاه مرکز ثقل مثلث به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = 4 \\ 5y - 3x = 16 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} 5 \times 4 - 3x = 16$$

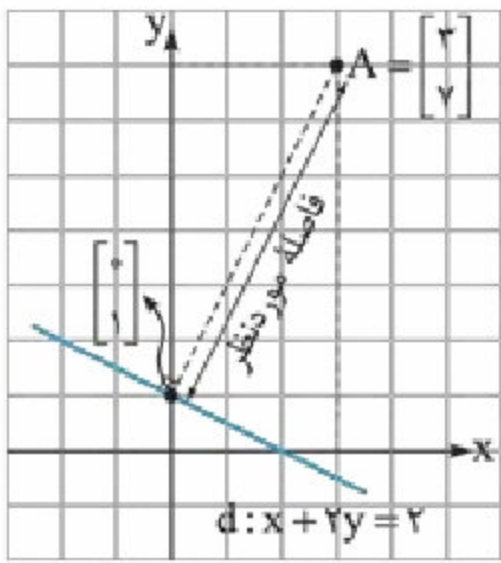
$$\Rightarrow 20 - 3x = 16 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

بنابراین مرکز ثقل مثلث، نقطه $G = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 4 \end{bmatrix}$ است.

پاسخ ۵۹

برای به دست آوردن فاصله نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ از خط

$d: x + 2y = 2$ باید از A بر d خطی عمود کرده و سپس فاصله



نقطه A از نقطه برخورد خط عمود با d را به دست آوریم. برای این کار نیاز داریم معادله خط عمود از A بر d را به دست آوریم. حالا توجه کنید که شیب d به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x + 2y = 2 \Rightarrow 2y = -x + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

پس شیب خط عمود بر d برابر 2 است و چون این خط باید از نقطه

$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ هم عبور کند، پس معادله آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 7 = 2(x - 3)$$

$$\Rightarrow y - 7 = 2x - 6 \Rightarrow y - 2x = 1$$

حالا به کمک حل دستگاه، محل برخورد خط d و خط عمود را به

$$\text{دست می‌آوریم: } \begin{cases} x + 2y = 2 \\ y - 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$$

$$5y = 5 \Rightarrow y = 1$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} y - 2x = 1 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس نقطه برخورد دو خط، نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ است و نتیجه آن که فاصله

نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ از خط $x + 2y = 2$ برابر است با:

$$\sqrt{(3-0)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱ گزینه ۳: چون $A = \begin{bmatrix} 2a - 3 \\ b + 4 \end{bmatrix}$ روی محور طول‌ها قرار

دارد، پس $b + 4 = 0$ و در نتیجه $b = -4$. به همین ترتیب، چون

$B = \begin{bmatrix} 2a + 4 \\ 3b - 5 \end{bmatrix}$ روی محور عرض‌ها قرار دارد، پس $2a + 4 = 0$ و

در نتیجه $a = -2$. پس نقطه $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ در ناحیه سوم دستگاه

مختصات قرار دارد.

۲ گزینه ۳: در ناحیه دوم، طول نقاط منفی و عرض آن‌ها مثبت است، پس باید داشته باشیم:

$$m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2, \quad m - 5 > 0 \Rightarrow m > 5$$

بنابراین چون دو ناحیه به دست آمده هیچ اشتراکی با هم ندارند،

نتیجه می‌گیریم چنین m ای وجود ندارد.

حالا توجه کنید که عمودمنصف پاره‌خط AM، آن را در وسط این پاره‌خط قطع می‌کند، پس برای یافتن پاسخ مسئله با توجه به شکل کفایت مختصات نقطه H، یعنی وسط پاره‌خط AM را به دست آوریم:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_M}{2} \\ \frac{y_A + y_M}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6+10}{2} \\ \frac{7-2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

گزینه ۷: مختصات نقطه M برابر است با:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha + 1 + 4\alpha - 3}{2} \\ \frac{5\alpha - 6 + 3\alpha - 2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6\alpha - 2}{2} \\ \frac{8\alpha - 8}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\alpha - 1 \\ 4\alpha - 4 \end{bmatrix}$$

حالا چون نقطه M روی محور طول‌ها قرار دارد، عرضش برابر صفر است، پس داریم: $4\alpha - 4 = 0 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$

بنابراین مختصات نقاط A و M به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 \\ 3 \times 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 3 \times 1 - 1 \\ 4 \times 1 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس طول پاره‌خط AM برابر است با:

$$|AM| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

گزینه ۸: فرض کنید رابطه بین X و Y به صورت $y = ax + b$ باشد. در این صورت داریم:

$$\left. \begin{aligned} x=1, y=5: 5 &= a + b \Rightarrow b = 5 - a \quad (I) \\ x=-3, y=-7: -7 &= -3a + b \Rightarrow b = 3a - 7 \quad (II) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 5 - a = 3a - 7 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

$$\xrightarrow{(I)} b = 5 - 3 \Rightarrow b = 2$$

پس رابطه خطی بین X و Y به صورت $y = 3x + 2$ بوده و «؟» برابر می‌شود با:

$$x=2, y=? \Rightarrow ? = 3 \times 2 + 2 \Rightarrow ? = 6 + 2 \Rightarrow ? = 8$$

گزینه ۹: چون X و Y رابطه خطی دارند، بنابراین در رابطه داده‌شده ضرایب X^2 و X^3 باید برابر صفر باشند. پس باید داشته باشیم:

$$x^3 \text{ ضریب} = \frac{m}{3} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{m}{3} = -1 \Rightarrow m = -3$$

$$x^2 \text{ ضریب} = -(2n + 8) = 0 \Rightarrow 2n + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2n = -8 \Rightarrow n = -4$$

پس رابطه داده‌شده به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$y = 0 \times x^3 - 0 \times x^2 - (-4)x + (-3) \Rightarrow y = 4x - 3$$

پس حاصل Y به ازای $x=1$ نیز برابر $4 \times 1 - 3 = 1$ است.

گزینه ۳: چون $A = \begin{bmatrix} 2+2m \\ 3+m \end{bmatrix}$ در ناحیه اول قرار دارد، پس فاصله آن تا محور عرض‌ها برابر $2+2m$ و فاصله‌اش تا محور طول‌ها برابر $3+m$ است، پس باید داشته باشیم:

$$2(2+2m) = 3(3+m) \Rightarrow 4+4m = 9+3m \Rightarrow 4m-3m = 9-4 \Rightarrow m = 5$$

گزینه ۴: مختصات وسط AB به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+3-5}{2} \\ \frac{2b+1+5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-2}{2} \\ \frac{2b+6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-2}{2} \\ b+3 \end{bmatrix}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{a-2}{2} = 3 \Rightarrow a-2=6 \\ b+3 = -4 \Rightarrow b=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a-2}{2} \\ b+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ab = 8 \times (-7) = -56$$

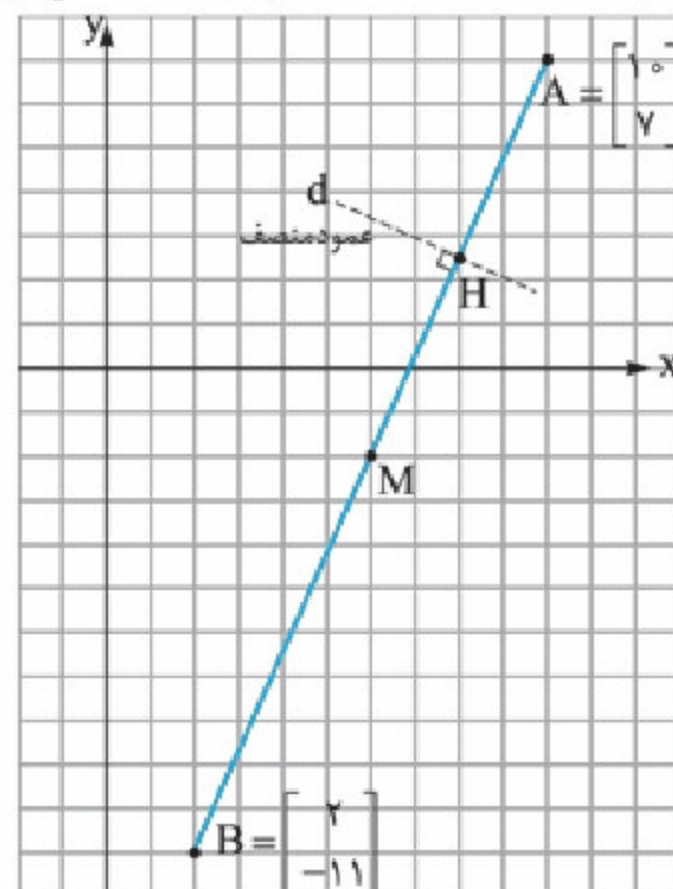
گزینه ۵: میانه AM، خطی است که نقطه A را به نقطه M، وسط ضلع BC، وصل می‌کند. اما توجه کنید که مختصات نقطه وسط BC عبارت است از:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_B + x_C}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+3}{2} \\ \frac{5+3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} \\ \frac{8}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

پس با توجه به مختصات نقطه M، طول میانه برابر است با:

$$|AM| = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

گزینه ۶: ابتدا مختصات نقطه M را به دست می‌آوریم:

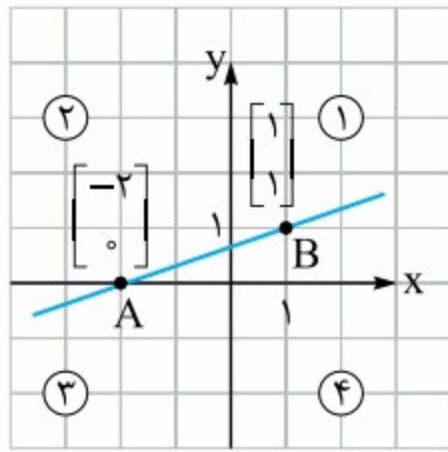


$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10+2}{2} \\ \frac{-11+7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{2} \\ \frac{-4}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

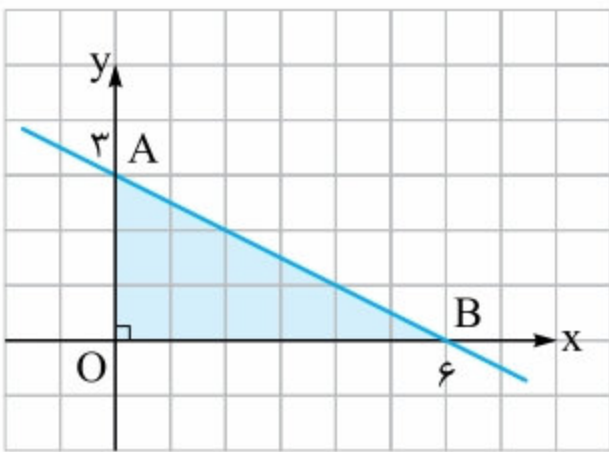
گزینه ۱۶: ابتدا به کمک نقطه‌یابی، نمودار را رسم می‌کنیم:

$$y = \frac{2+x}{3}$$

	A	B
x	-2	1
y	0	1



پس همان‌طور که می‌بینید، خط موردنظر از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.



گزینه ۱۷: خط داده‌شده را رسم کرده و مساحت مثلث موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$2x + 4y = 12$$

	A	B
x	0	6
y	3	0

$$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

گزینه ۱۸: خطوطی از مبدأ مختصات عبور می‌کنند که معادله آن‌ها به فرم $y = ax$ باشد. در بین گزینه‌ها تنها معادله خط $2x - 3y = 0$ این ویژگی را دارد، چون داریم:

$$2x - 3y = 0 \Rightarrow -3y = -2x \xrightarrow{\div(-3)} y = \frac{2}{3}x \quad \checkmark$$

گزینه ۱۹: چون خط داده‌شده از مبدأ مختصات عبور می‌کند، نیز روی این خط قرار دارد، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{18}{5} \end{bmatrix}$$

پس معادله آن به فرم $y = ax$ است. از طرف دیگر نقطه

$$y = ax \text{ روی } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{18}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{18}{5} = \frac{a}{2} \Rightarrow 5a = 36$$

$$\Rightarrow a = \frac{36}{5} \Rightarrow \text{معادله خط: } y = \frac{36}{5}x \text{ یا } 5y = 36x$$

گزینه ۲۰: ابتدا معادله داده‌شده را استاندارد می‌کنیم:

$$y + 3m = (m+2)x + 9 \Rightarrow y = (m+2)x + 9 - 3m$$

حالا اگر بخواهیم خط فوق از مبدأ عبور کند، باید داشته باشیم:

$$9 - 3m = 0 \Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow m = 3$$

گزینه ۲۱: با قراردادن مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ در معادله خط

$2y - 5x = 7$ ، می‌بینیم که این نقطه روی خط قرار ندارد.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}: 2(-1) - 5(2) = -2 - 10 = -12 \neq 7 \quad \times$$

پس نقطه روی خط قرار ندارد.

گزینه ۱۰: فرض کنید مساحت دایره‌ای به شعاع r برابر S

باشد. در این صورت داریم $S = \pi r^2$. پس چون در رابطه داده‌شده توان r برابر ۲ است، نتیجه می‌گیریم این تابع خطی نیست. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند. ضمناً توجه کنید که r هر مقدار بزرگ‌تر یا مساوی صفر را می‌تواند داشته باشد. پس S هم بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. بنابراین با توجه به شکل‌ها، گزینه (۴) صحیح است.

گزینه ۱۱: X می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۱، ۲، ۳ تا ۱۳۹۶ باشد، ضمناً به ازای هر X یک Y هم به دست می‌آید، بنابراین معادله داده‌شده شامل ۱۳۹۶ تا جواب است، یعنی ۱۳۹۶ نقطه با مختصات طبیعی روی خط $X + Y = 1397$ موجود می‌باشد.

گزینه ۱۲: چون Y طبیعی است و $Y = -\frac{X}{4} + 8$ ، پس $-\frac{X}{4}$

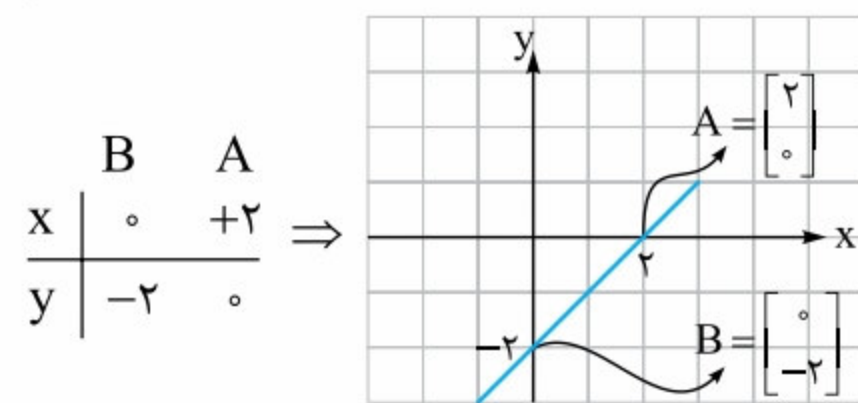
باید برابر عددی صحیح باشد، یعنی X باید حتماً مضرب ۴ باشد، پس X ممکن است برابر هر یک از مقادیر ۴، ۸، ۱۲، ۱۶، ۲۰، ۲۴، ۲۸، ۳۲ و ۳۶ باشد. اما اگر X برابر هر یک از مقادیر ۲۴ و ۲۸ باشد، آن‌گاه $Y < 3$ خواهد بود که خلاف فرض $Y \geq 3$ است، پس تنها ۵ مقدار ۴، ۸، ۱۲، ۱۶ و ۲۰ به ازای X قابل قبول هستند و در نتیجه ۵ تا Y مختلف هم به دست می‌آید.

گزینه ۱۳: در گزینه‌های (۱) و (۲) چون توان X برابر ۲ است، پس معادلات داده‌شده معادلات یک خط نیستند. معادله $X + Y = a$

نیز معادله یک خط نیست، بلکه معادله یک دسته از خطوط است. پس گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

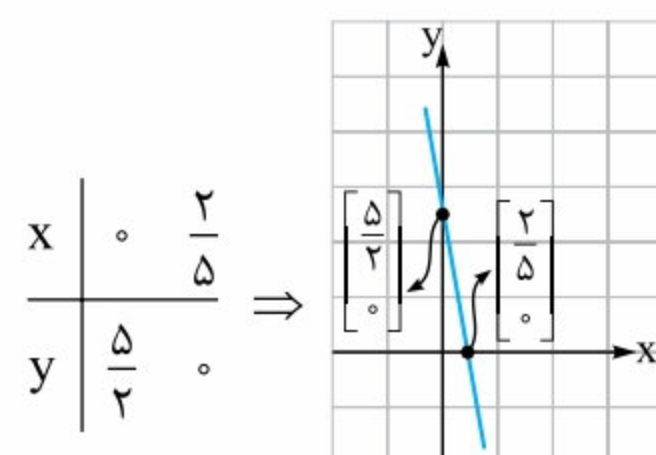
گزینه ۱۴: به کمک رسم نمودار، گزینه صحیح را پیدا می‌کنیم:

$$y = x - 2$$



گزینه ۱۵: به کمک نقطه‌یابی، خط داده‌شده را رسم می‌کنیم:

$$\frac{2}{5}y + \frac{5}{2}x = 1$$



بنابراین با توجه به شکل، گزینه (۲) صحیح است.



۲۷ گزینه ۲۲: چون d محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۶

قطع می‌کند، پس نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی خط d قرار دارد، بنابراین داریم:

$$m \times 6 + (m - 3) \times 0 = 9 \Rightarrow 6m = 9 \Rightarrow m = \frac{9}{6} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

پس معادله خط d به صورت زیر درمی‌آید:

$$d: \frac{3}{2}x + (\frac{3}{2} - 3)y = 9 \Rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = 9$$

حالا اگر قرار دهیم $x = 0$ ، آن‌گاه محل برخورد d با محور y ‌ها به دست می‌آید، پس داریم:

$$\frac{3}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times y = 9 \Rightarrow -\frac{3}{2}y = 9 \Rightarrow -y = 6 \Rightarrow y = -6$$

پس خط d محور y ‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع می‌کند.

۲۸ گزینه ۲۲: چون d محور y ‌ها را در نقطه ۳- قطع می‌کند،

پس نتیجه می‌گیریم نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ روی d است، در نتیجه داریم:

$$d \text{ روی } \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow 2k \times 0 + (3k - 1) \times (-3) = 12 - 6k$$

$$\Rightarrow -9k + 3 = 12 - 6k \Rightarrow 9k - 6k = 3 - 12$$

$$\Rightarrow 3k = -9 \Rightarrow k = -3$$

بنابراین با توجه به مقدار عددی k ، معادله خط به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$d: 2 \times (-3) \times x + (3 \times (-3) - 1) y = 12 - 6 \times (-3)$$

$$\Rightarrow -6x - 10y = 12 + 18 \Rightarrow -6x - 10y = 30$$

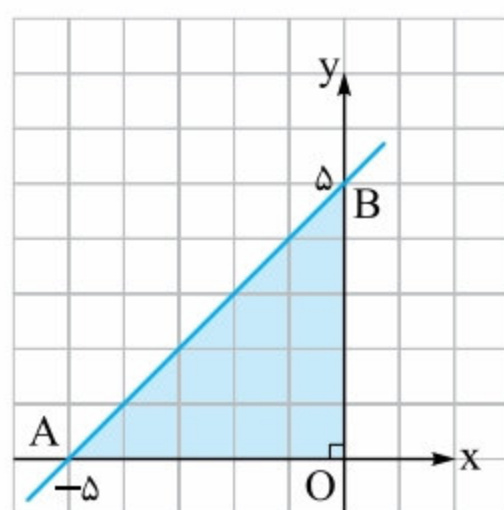
$$\xrightarrow{\div 2} -3x - 5y = 15$$

حالا اگر فرض کنیم نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ m \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$-3(3) - 5 \times m = 15 \Rightarrow -5m = 24 \Rightarrow m = -\frac{24}{5}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{48}{10} \Rightarrow m = -\frac{24}{5}$$

پس نقطه‌ای به طول ۳ روی d دارای عرض $-\frac{24}{5}$ است.



۲۹ گزینه ۲۲: ابتدا توجه کنید

که این خط، محور y ‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند،

چون داریم:

$$x = 0 \Rightarrow ax + 4y = 20$$

$$\Rightarrow a \times 0 + 4y = 20$$

$$\Rightarrow 4y = 20 \Rightarrow y = 5$$

بنابراین با توجه به صورت سؤال چون مثلث OAB متساوی‌الساقین است، بنابراین این خط باید محور x ‌ها را در نقطه‌ای به طول ۵-

قطع کند، پس داریم:

$$y = 0 \Rightarrow ax + 4y = 20 \Rightarrow a \times (-5) + 4 \times 0 = 20 \Rightarrow -5a = 20 \Rightarrow a = -4$$

۲۲ گزینه ۲۲: ابتدا با قراردادن مختصات نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ در معادله

خط $y = ax + 3$ ، مقدار a را تعیین می‌کنیم:

$$y = ax + 3 \Rightarrow -3 = 2a + 3 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$$

پس معادله خط داده‌شده به صورت $y = -3x + 3$ قابل بازنویسی است. حالا واضح است که اگر در این معادله به جای x مقدار عددی

۱ را قرار دهیم، آن‌گاه y برابر صفر می‌شود، یعنی نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی

این خط قرار دارد. $y = -3x + 3 \Rightarrow 0 = -3(1) + 3 = 0$ ✓

۲۳ گزینه ۲۲: کفایت در رابطه داده‌شده، به جای x مقدار عددی

۲۱ را قرار داده و مقدار y را محاسبه کنیم. پس داریم:

$$x = 21 \Rightarrow y = \frac{3}{7} \times 21 - 4 \Rightarrow y = 9 - 4 \Rightarrow y = 5$$

۲۴ گزینه ۲۲: مختصات $\begin{bmatrix} 2a+1 \\ 1-a \end{bmatrix}$ در خط $x + 3y - 1 = 0$

صدق می‌کند، پس داریم:

$$2a + 1 + 3(1 - a) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2a + 1 + 3 - 3a - 1 = 0 \Rightarrow -a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

۲۵ گزینه ۲۲: با قراردادن مختصات نقاط داده‌شده در معادله خط

$y = 2x + 21$ ، ابتدا مقدار a و سپس مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 3a+1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ روی خط} \Rightarrow 5 = 2(3a+1) + 21$$

حالا چون $a = -3$ ، پس نقطه $\begin{bmatrix} 2a-1 \\ 3b+1 \end{bmatrix}$ برابر نقطه

$$\begin{bmatrix} 2(-3)-1 \\ 3b+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3b+1 \end{bmatrix} \text{ می‌شود، پس داریم:}$$

$$\text{روی خط} \begin{bmatrix} -7 \\ 3b+1 \end{bmatrix} \Rightarrow 3b+1 = 2(-7) + 21$$

$$\Rightarrow 3b+1 = 7 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$$

بنابراین حاصل $a + b$ برابر است با: $a + b = -3 + 2 = -1$

۲۶ گزینه ۲۲: محل برخورد خط با محور y ‌ها را به دست می‌آوریم:

$$y = 0 \Rightarrow 2x + 4 \times 0 - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 20 = 0 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{محل برخورد با محور } y \text{‌ها: } x = 0 \Rightarrow 2 \times 0 + 4y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 4y = 20 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین طول پاره‌خط AB برابر می‌شود با:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ = \sqrt{(0 - 10)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

حالا چون عرض از مبدأ خط برابر -3 است، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{3}{2m+1} = -3 \Rightarrow 2m+1 = -1 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$$

روش دوم برای به دست آوردن عرض از مبدأ خط، کافیست در معادله آن خط به جای x مقدار عددی صفر را قرار داده و y را محاسبه کنیم. پس عرض از مبدأ خط داده شده به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$x = 0 \Rightarrow 3 - 2my + 3 = (m - 2)x + y$$

$$\Rightarrow -2my + 3 = y$$

$$\Rightarrow 3 = y + 2my \Rightarrow 3 = (1 + 2m)y \Rightarrow y = \frac{3}{1 + 2m}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{1 + 2m} = -3 \Rightarrow 1 + 2m = -1 \Rightarrow m = -1$$

گزینه ۳۴ برای به دست آوردن عرض از مبدأ کافیست x را برابر صفر قرار داده و y را به دست آوریم. پس داریم:

$$x = 0 \Rightarrow -4 + 3ax + 4a^2y + a^2 = 0$$

$$\Rightarrow -4 + 3a \cdot 0 + 4a^2y + a^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2y - 4 + a^2 = 0 \Rightarrow 4a^2y = 4 - a^2 \Rightarrow y = \frac{4 - a^2}{4a^2}$$

بنابراین چون عرض از مبدأ خط برابر 2 است، پس نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{4 - a^2}{4a^2} = 2 \Rightarrow 4 - a^2 = 8a^2 \Rightarrow 9a^2 = 4$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} \Rightarrow |a| = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \pm \frac{2}{3}$$

گزینه ۳۵ معادله خط داده شده را ساده‌سازی کرده و شیب و عرض از مبدأ آن را به دست می‌آوریم:

$$(2a + 1)y - 3ax = 14 \Rightarrow (2a + 1)y = 3ax + 14$$

$$\Rightarrow y = \frac{3a}{2a + 1}x + \frac{14}{2a + 1}$$

$$\Rightarrow \text{شیب} = \frac{3a}{2a + 1}, \text{ عرض از مبدأ} = \frac{14}{2a + 1}$$

بنابراین چون شیب خط برابر $\frac{9}{7}$ است، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{3a}{2a + 1} = \frac{9}{7} \Rightarrow 3(2a + 1) = 9a \Rightarrow 6a + 3 = 9a \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow \text{عرض از مبدأ خط} = \frac{14}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{14}{7} = 2$$

گزینه ۳۶ معادله خط را ساده‌سازی کرده و شیب و عرض از

$$\frac{3}{4}(x + 2y) - \frac{5}{3}(x + 6y) = 6 \quad \text{مبدأ آن را به دست می‌آوریم:}$$

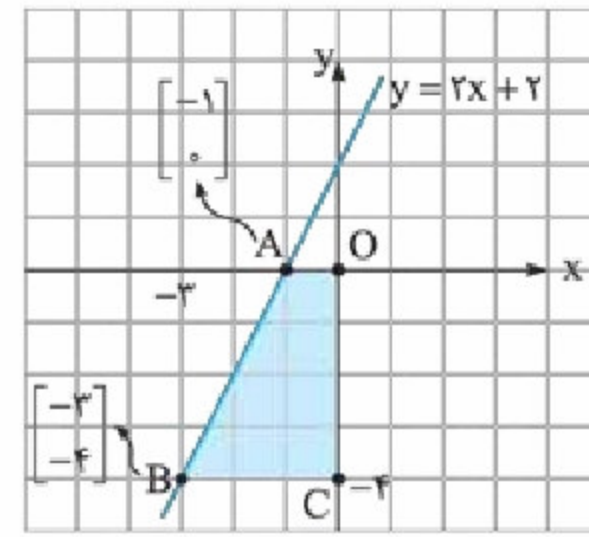
$$\Rightarrow \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{3}x - 10y = 6 \Rightarrow 3y - 10y = \frac{5}{3}x - \frac{3}{4}x + 6$$

$$\Rightarrow -7y = \frac{10 - 9}{6}x + 6 \Rightarrow -7y = \frac{1}{6}x + 6$$

پس معادله خط موردنظر برابر $-4x + 4y = 20$ بوده و اگر فرض

کنیم نقطه $\begin{bmatrix} m \\ 4 \end{bmatrix}$ روی این خط است، آن گاه داریم:

$$-4m + 4 \times 4 = 20 \Rightarrow -4m = 4 \Rightarrow m = -1$$



گزینه ۳۰ با توجه

به شکل، ابتدا مختصات نقاط A و B را می‌یابیم.

برای به دست آوردن مختصات A ، کافیست در

معادله $y = 2x + 2$ ، به جای y مقدار صفر را قرار

دهیم، در این صورت داریم:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x + 2$$

$$\Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن B نیز کافیست در معادله $y = 2x + 2$ به جای

y مقدار -4 را قرار دهیم. پس داریم:

$$-4 = 2x + 2$$

$$\Rightarrow -4 - 2 = 2x \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$

بنابراین چون چهارضلعی $OABC$ دوزنقه است، پس با توجه به

شکل، مساحت آن برابر می‌شود با:

$$\frac{(OA + BC) \times CO}{2} = \frac{(1 + 3) \times 4}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

گزینه ۳۱ معادله خط را ساده‌سازی کرده و شیب آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{4 - 3y}{5} = -3x \Rightarrow 4 - 3y = -15x \Rightarrow 3y = 15x + 4$$

$$\Rightarrow y = 5x + \frac{4}{3} \Rightarrow \text{شیب خط} = 5$$

گزینه ۳۲ معادله خط را استاندارد کرده و عرض از مبدأ آن

را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(-\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y = 0 / 8\right) \times 10 \Rightarrow -6x + 7y = 8$$

$$\Rightarrow 7y = 6x + 8 \Rightarrow y = \frac{6}{7}x + \frac{8}{7} \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = \frac{8}{7}$$

گزینه ۳۳ **روش اول** به کمک استانداردسازی معادله

خط، عرض از مبدأ آن را به دست می‌آوریم:

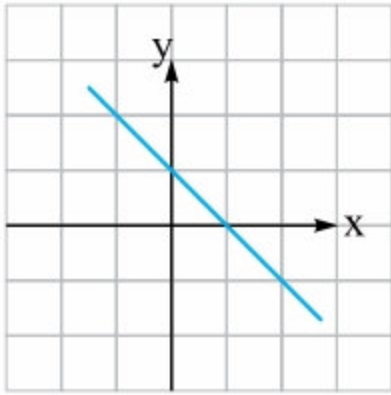
$$3x - 2my + 3 = (m - 2)x + y$$

$$\Rightarrow 3x - 2my + 3 = mx - 2x + y$$

$$3x - mx + 2x + 3 = 2my + y \Rightarrow 5x - mx + 3 = 2my + y$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (2m + 1)y = (5 - m)x + 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{5 - m}{2m + 1}x + \frac{3}{2m + 1} \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = \frac{3}{2m + 1}$$



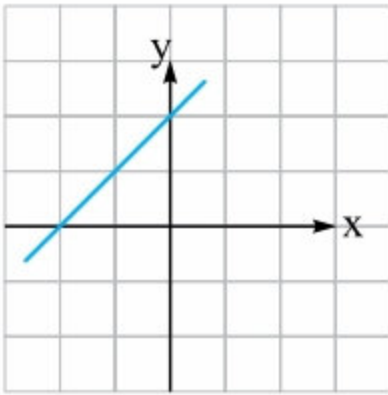
پس $\frac{a}{b} > 0$ و $\frac{c}{b} < 0$ و در نتیجه $-\frac{a}{b} < 0$ و $-\frac{c}{b} > 0$ ، یعنی شیب خط مورد نظر منفی و عرض از مبدأش مثبت است، پس شکل تقریبی آن به صورت مقابل خواهد بود:

۴۲ گزینه **۲۲** چون $ab > 0$ ، پس a و b هم‌علامت هستند، بنابراین چون $a + b < 0$ ، پس a و b هر دو منفی می‌باشند، یعنی $a < 0$ و $b < 0$ ، حالا با استانداردسازی معادله داده شده، شیب و عرض از مبدأ خط را تعیین می‌کنیم: $ax - by = 1 \Rightarrow -by = -ax + 1$

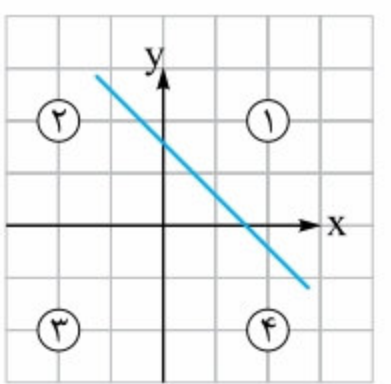
$$\xrightarrow{\div(-b)} y = \frac{a}{b}x - \frac{1}{b}$$

$\begin{matrix} < \\ \uparrow \\ \text{شیب} = \frac{a}{b} > \\ \downarrow \\ < \end{matrix}$
 $\begin{matrix} < \\ \downarrow \\ \text{عرض از مبدأ} = -\frac{1}{b} > \\ \uparrow \\ < \end{matrix}$

بنابراین چون شیب و عرض از مبدأ خط، هر دو مثبت‌اند، نتیجه می‌گیریم اولاً نمودار از چپ به راست، از پایین به بالا می‌رود و دوماً نمودار خط، محور y ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می‌کند، بنابراین شکل نمودار به صورت روبرو خواهد بود:

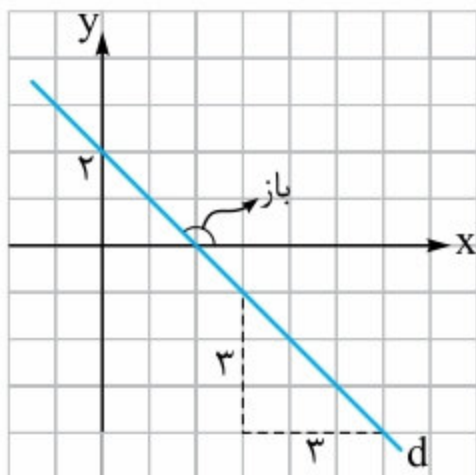


۴۳ گزینه **۲۲** m^2 یک عبارت همواره نامنفی است، پس $m^2 - m^2$ (حتماً منفی و $m \neq 0$) و $m^2 + 1$ حتماً مثبت است، بنابراین شیب خط $y = -m^2x + m^2 + 1$ منفی و

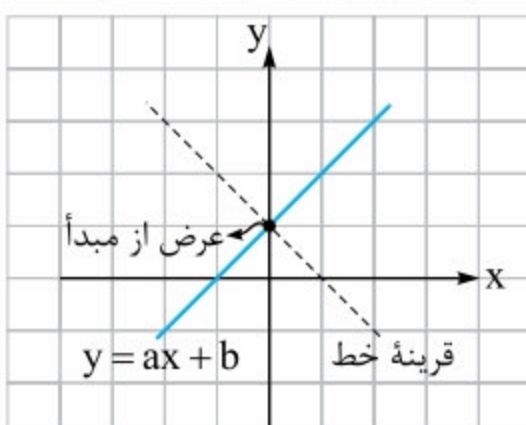


عرض از مبدأ آن مثبت می‌باشد، در نتیجه شکل تقریبی آن به صورت شکل مقابل به دست می‌آید: پس خط مورد نظر از ناحیه ۳ عبور نمی‌کند.

۴۴ گزینه **۲۲** زاویه خط با جهت مثبت محور x ها، باز است، پس شیب خط منفی و برابر $-1 = -\frac{3}{3}$ می‌باشد. از طرفی این خط محور y ها



را در نقطه ۲ قطع می‌کند، پس عرض از مبدأ آن برابر ۲ واحد است. در نتیجه معادله خط به صورت $y = -x + 2$ یا همان $y + x - 2 = 0$ به دست می‌آید.

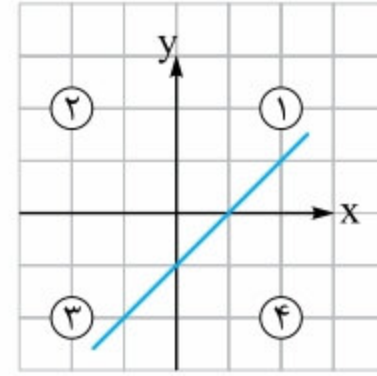


۴۵ گزینه **۲۲** با توجه به شکل واضح است که عرض از مبدأ خط، ثابت می‌ماند، اما شیب آن قرینه می‌شود.

$$\xrightarrow{\div(-7)} y = -\frac{1}{42}x - \frac{6}{7} \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = -\frac{1}{42} \\ \text{عرض از مبدأ} = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

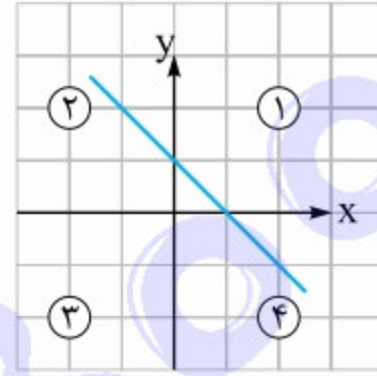
$$\Rightarrow \text{مجموع} = -\frac{1}{42} - \frac{6}{7} = \frac{-1 - 36}{42} = -\frac{37}{42}$$

۳۷ گزینه **۲۲** شیب خط مثبت است، یعنی خط از چپ به راست، بالا می‌رود. هم‌چنین عرض از مبدأ خط، منفی است، در نتیجه این



خط محور y ها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع می‌کند، پس شکل تقریبی آن به صورت روبرو است: بنابراین خط از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

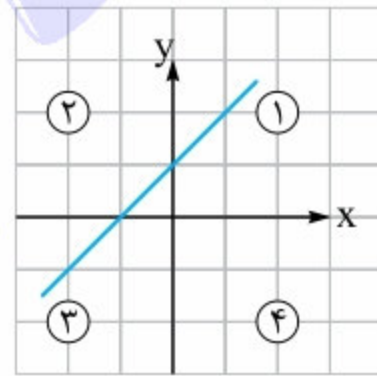
۳۸ گزینه **۲۲** چون شیب خط منفی است، پس نمودار آن از چپ به راست، به سمت پایین حرکت می‌کند. هم‌چنین چون عرض از مبدأ خط مثبت است، بنابراین این خط محور



y ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می‌کند، در نتیجه شکل تقریبی آن به صورت روبرو است:

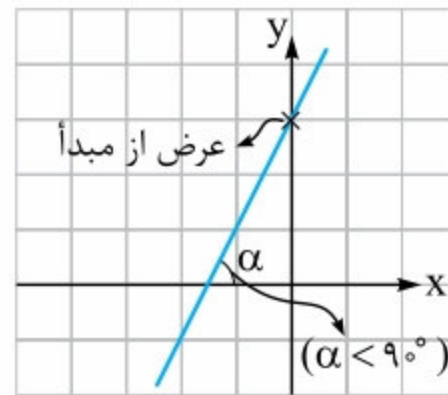
بنابراین این خط هیچ‌گاه از ناحیه ۳ عبور نمی‌کند.

۳۹ گزینه **۲۲** چون زاویه بین خط و جهت مثبت محور طول‌ها، تند است، پس شیب خط مثبت می‌باشد. به همین ترتیب چون عرض از مبدأ خط هم مثبت است، نتیجه می‌گیریم شکل تقریبی نمودار به صورت روبرو است:



یعنی خط مورد نظر هیچ وقت از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند، در نتیجه امکان ندارد این خط از نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ عبور کند.

۴۰ گزینه **۲۲** نقاط با طول مثبت



و عرض منفی در ناحیه ۴م دستگاه مختصات قرار دارند، پس باید خطی را انتخاب کنیم که از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند، یعنی شکل تقریبی آن به صورت روبرو است:

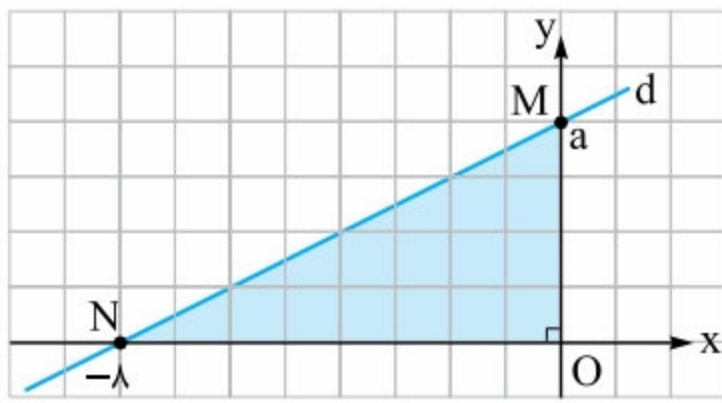
اما چنین خطی دارای شیب مثبت و عرض از مبدأ مثبت است. در بین گزینه‌ها تنها گزینه $y = 2x + 3$ دارای این خاصیت می‌باشد. پس جواب مسئله همین گزینه است.

۴۱ گزینه **۲۲** ابتدا معادله خط داده شده را استاندارد می‌کنیم:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

حالا توجه کنید که علامت ab و bc با علامت‌های $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{b}$ یکسان است،

۵۱ گزینه ۳: فرض کنید خط d محور y را در نقطه a قطع کند.



در این صورت طول OM برابر a واحد می‌شود، همچنین چون $|ON| = 8$ ، پس باید داشته باشیم:

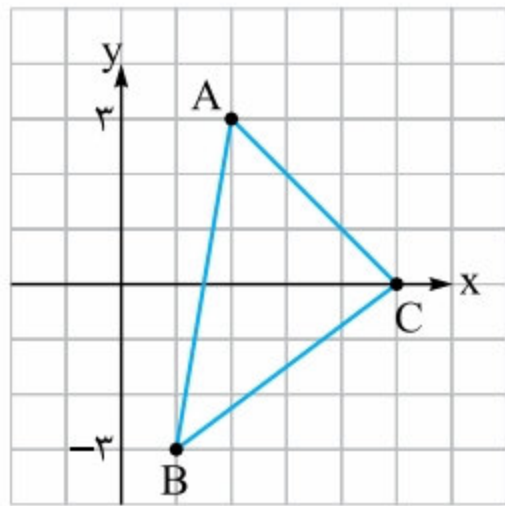
$$S_{\Delta OMN} = 16 \Rightarrow \frac{OM \times ON}{2} = 16$$

$$\Rightarrow \frac{a \times 8}{2} = 16 \Rightarrow a \times 4 = 16 \Rightarrow a = 4$$

پس خط d از نقطه‌های $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، در نتیجه

$$m_d = \frac{4 - 0}{0 - (-8)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

شیب آن برابر است با:



۵۲ گزینه ۳: با توجه به شکل فرض می‌کنیم مختصات نقاط B, A و C به صورت زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} x_A \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x_B \\ -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} x_C \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین با توجه به شیب خطوط AB و AC داریم:

$$m_{AC} = -2 \Rightarrow \frac{3 - 0}{x_A - x_C} = -2 \Rightarrow \frac{3}{x_A - x_C} = -2$$

$$\Rightarrow x_A - x_C = -\frac{3}{2} \quad (I)$$

$$m_{AB} = 6 \Rightarrow \frac{3 - (-3)}{x_A - x_B} = 6 \Rightarrow \frac{6}{x_A - x_B} = 6$$

$$\Rightarrow x_A - x_B = 1 \quad (II)$$

حالا با توجه به دو معادله به دست آمده، $x_B - x_C$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(I) - (II): (x_A - x_C) - (x_A - x_B) = -\frac{3}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \cancel{x_A} - x_C - \cancel{x_A} + x_B = -\frac{5}{2} \Rightarrow x_B - x_C = -\frac{5}{2}$$

در نتیجه شیب خط BC برابر می‌شود با:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Rightarrow m_{BC} = \frac{-3 - 0}{-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow m_{BC} = \frac{3}{\frac{5}{2}} \Rightarrow m_{BC} = \frac{6}{5}$$

۴۶ گزینه ۳: بردار $\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ نقطه $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ را به نقطه $A = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

وصل می‌کند، پس شیب این بردار و در نتیجه شیب خطی که این بردار روی آن قرار دارد، برابر می‌شود با:

$$m_d = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{7 - 0}{-4 - 0} = -\frac{7}{4}$$

۴۷ گزینه ۳: شیب خط گذرا از دو نقطه A و B برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2a + 1 - 2}{3 - a} = \frac{2a - 1}{3 - a}$$

$$\frac{2a - 1}{3 - a} = 3 \Rightarrow 2a - 1 = 3(3 - a)$$

$$\Rightarrow 2a - 1 = 9 - 3a \Rightarrow 5a = 10 \xrightarrow{(\div 5)} a = 2$$

۴۸ گزینه ۳: چون M روی محور عرض‌هاست، پس مختصات آن به صورت $M = \begin{bmatrix} 0 \\ y_M \end{bmatrix}$ است. از طرفی چون شیب خط d یا

همان شیب MN برابر $-\frac{1}{3}$ می‌باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y_M - 0}{0 - (-3)} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{y_M}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow y_M = -1$$

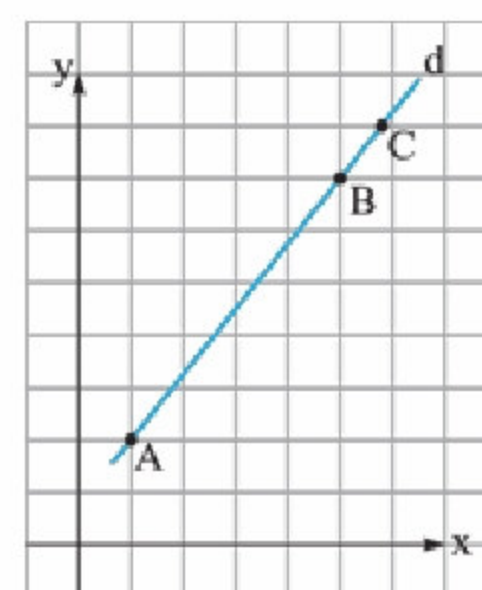
۴۹ گزینه ۳: توجه کنید که شیب خط AB و AC به ترتیب

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 4}{-3 - 3} = -\frac{1}{6}$$

عبارت است از:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{16 - 4}{5 - 3} = \frac{12}{2} = 6$$

بنابراین همان‌طور که می‌بینید، شیب دو خط AB و AC قرینه و معکوس یکدیگرند، پس دو خط AB و AC بر هم عمودند، در نتیجه ΔABC در رأس A قائم‌الزاویه است.



۵۰ گزینه ۳: چون A, B, C و

هر سه روی یک خط قرار دارند، پس باید داشته باشیم:

$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC} = m_d$$

حالا با توجه به مختصات نقاط، m_{AB} را به دست آورده و مساوی m_{AC} قرار می‌دهیم تا

x به دست آید:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{7 - 2}{5 - 1} = \frac{5}{4} \\ m_{AC} &= \frac{8 - 2}{x - 1} = \frac{6}{x - 1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{6}{x - 1} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 24 = 5(x - 1) \Rightarrow x - 1 = \frac{24}{5} \Rightarrow x - 1 = 4\frac{4}{5} \Rightarrow x = 5\frac{4}{5}$$



۵۸ گزینه $\bullet\bullet$ چون $2y - ax = 5$ با $y + 2 = 5$ یا همان $y = 3$ موازی است، پس ضریب x در معادله $2y - ax = 5$ باید برابر صفر باشد، یعنی باید داشته باشیم $a = 0$.

۵۹ گزینه $\bullet\bullet$ ابتدا توجه کنید که $3x - y = x$ معادل خط $-y = x - 3x$ یا همان $y = 2x$ است، پس شیب این خط برابر ۲ می‌باشد، در نتیجه این خط، خطوطی با شیب ۲ را قطع نمی‌کند و با آن‌ها موازی است. در بین گزینه‌ها نیز تنها گزینه (۳) شامل خطی با شیب ۲ است.

$$7y = 14x + 13 \Rightarrow y = \frac{14}{7}x + \frac{13}{7} \Rightarrow y = 2x + \frac{13}{7}$$

۶۰ گزینه $\bullet\bullet$ ابتدا معادله خط داده شده را استاندارد کرده و شیب آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5 - 2x + 3y}{3} = \frac{x}{4} \Rightarrow 4(5 - 2x + 3y) = 3x$$

$$\Rightarrow 20 - 8x + 12y = 3x \Rightarrow 12y = 11x - 20$$

$$\Rightarrow y = \frac{11}{12}x - \frac{20}{12} \Rightarrow m_{\text{خط}} = \frac{11}{12}$$

حالا چون خطوط موازی دارای شیب‌های یکسان هستند، پس هر خط موازی با خط داده شده، شیبی برابر $\frac{11}{12}$ دارد.

۶۱ گزینه $\bullet\bullet$ ابتدا توجه کنید که شیب خط $y = 3x - 7$ برابر ۳ است. پس شیب خط‌های موازی این خط نیز باید برابر ۳ باشد و در نتیجه

$$A = \begin{bmatrix} a-2 \\ a-4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3a-5 \\ a+1 \end{bmatrix} \quad \text{باید داشته باشیم:}$$

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{a+1 - (a-4)}{3a-5 - (a-2)} = \frac{a+1 - a + 4}{3a-5 - a + 2}$$

$$= \frac{5}{2a-3} \Rightarrow m_{AB} = 3 \Rightarrow \frac{5}{2a-3} = 3$$

$$\Rightarrow 3(2a-3) = 5 \Rightarrow 6a-9 = 5 \Rightarrow 6a = 14$$

$$\Rightarrow a = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

۶۲ گزینه $\bullet\bullet$ ابتدا شیب خط به معادله $2y + (m-3)x = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$2y = -(m-3)x + 1 \Rightarrow y = \frac{-(m-3)}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{شیب} = \frac{3-m}{2}$$

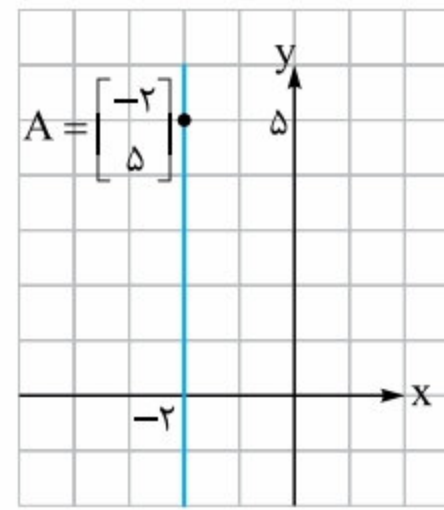
حالا شیب خط گذرا از دو نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب} = \frac{\text{تفاضل } y\text{ها}}{\text{تفاضل } x\text{ها}} = \frac{-3-2}{5-0} = \frac{-5}{5} = -1$$

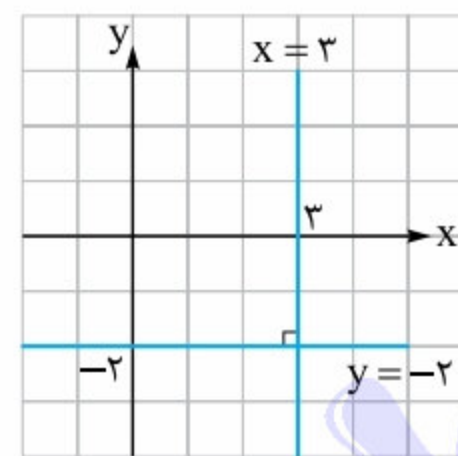
حالا چون دو خط موردنظر موازی هستند، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{3-m}{2} = -1 \Rightarrow 3-m = -2 \Rightarrow -m = -5 \Rightarrow m = 5$$

۵۳ گزینه \bullet با توجه به شکل چون تمام نقاط روی خط، طول یکسانی دارند، پس معادله خط $x = -2$ است.



۵۴ گزینه \bullet خط $y = -2$ موازی محور x هاست؛ پس خط عمود بر این خط باید موازی محور y باشد، یعنی معادله خط موردنظر باید



به صورت $x = k$ باشد. حالا چون این خط از نقطه‌ای به طول ۳ عبور می‌کند، پس $k = 3$ ، در نتیجه مطابق شکل، معادله خط موردنظر به صورت $x = 3$ به دست می‌آید.

۵۵ گزینه \bullet خط‌های $x = m$ و $y = n$ همدیگر را در نقطه

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \text{ قطع می‌کنند؛ پس باید داشته باشیم:}$$

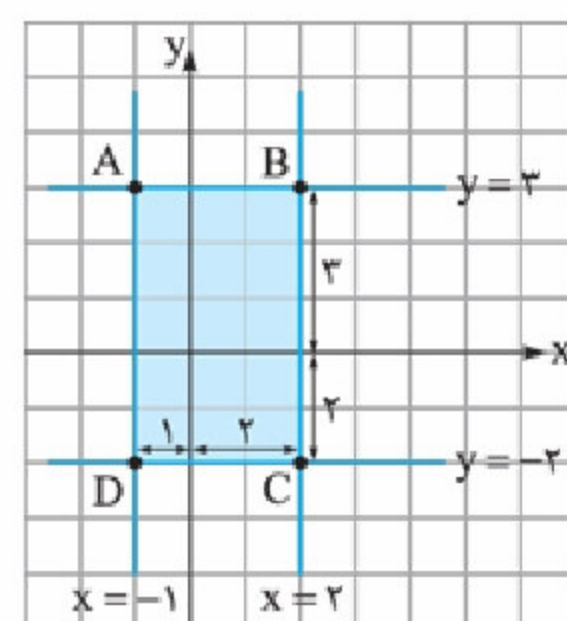
$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m+8 \\ m^2-n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3m+8 \Rightarrow -2m=8 \Rightarrow m=-4 \quad (I) \\ n = m^2-n \xrightarrow{(I)} n = (-4)^2 - n \\ \Rightarrow 2n = 16 \Rightarrow n = 8 \end{cases}$$

پس نقطه تقاطع، نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$ است که مجموع فواصل این نقطه از محورهای مختصات هم برابر $|-4| + |8| = 4 + 8 = 12$ است.

۵۶ گزینه \bullet خطوطی که با محور x موازی‌اند، معادله‌ای به فرم $y = k$ دارند، پس ضریب x یعنی a برابر صفر بوده و معادله خط به صورت $y + c = 0$ می‌شود. حالا چون این خط از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ، یعنی نقطه‌ای به عرض -3 عبور می‌کند، پس معادله آن باید به صورت $y = -3$ باشد، در نتیجه $y + c = 0$ یا همان $y = -c$ نیز باید با $y = -3$ یکسان باشد، بنابراین $c = 3$.

۵۷ گزینه $\bullet\bullet$ خطوط داده شده را رسم کرده و مساحت شکل



موردنظر را به دست می‌آوریم: همان‌طور که در شکل می‌بینید، طول مستطیل به دست آمده برابر ۵ و عرض آن برابر ۳ واحد است، پس مساحت شکل برابر می‌شود با: $3 \times 5 = 15$



$$\Rightarrow 6a^2 = 6a^2 + 18a - a - 3 \Rightarrow 17a - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 17a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{17}$$

گزینه ۶۷: سه خط به شرطی با هم مثلث تشکیل می‌دهند

که هیچ دوتایی از آن‌ها با هم موازی نباشند. پس گزینه صحیح گزینه‌ای است که شیبش نه با شیب خط $y = 2x + 3$ یکی باشد و نه با شیب $-1 = 5x + 2y$. اما توجه کنید که شیب این دو خط عبارتند از:

$$y = 2x + 3 \Rightarrow m_{\text{خط}} = 2$$

$$2y + 5x = -1 \Rightarrow 2y = -5x - 1 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

پس باید خطی را انتخاب کنیم که شیبش مخالف اعداد ۲ و $-\frac{5}{2}$ باشد. از بین خطوط زیر، خط $2x + 3 = y + \frac{2}{5}$ این ویژگی را دارد.

$$\frac{2}{5}y + 3 = 2x \Rightarrow \frac{2}{5}y = 2x - 3$$

$$\Rightarrow 2y = 10x - 15 \Rightarrow y = 5x - \frac{15}{2} \Rightarrow m = 5 \neq 2, -\frac{5}{2}$$

گزینه ۶۸: روش اول: معادله خطوطی که از مبدأ مختصات

عبور می‌کنند، به فرم $y = ax$ است، یعنی عرض از مبدأ این خطوط برابر صفر می‌باشد. پس با توجه به معادله خط باید داشته باشیم:

$$3y - 5x + 3m - 2 = -6 \Rightarrow 3y - 5x = -3m + 2 - 6$$

$$\Rightarrow 3y - 5x = \underbrace{-3m - 4}_{\text{صفر}}$$

$$\Rightarrow -3m - 4 = 0 \Rightarrow -3m = 4 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

روش دوم: چون خط از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس نقطه

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \text{ روی آن قرار دارد، بنابراین داریم: } 3y - 5x + 3m - 2 = -6$$

$$\Rightarrow 3 \times 0 - 5 \times 0 + 3m - 2 = -6 \Rightarrow 3m = -4 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

گزینه ۶۹: فرض کنید معادله خط موردنظر به صورت

$$d: y = -2x + n \text{ باشد و نقطه } A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ نیز روی این خط}$$

باشد، در این صورت داریم $b = -2a + n$ و در نتیجه $b + 2a = n$

. حالا فرض کنید ۳ واحد به طول نقطه A و m واحد به عرض آن

$$\text{اضافه کنیم. در این صورت به نقطه } B = \begin{bmatrix} a+3 \\ b+m \end{bmatrix} \text{ می‌رسیم. حالا}$$

اگر بخواهیم نقطه B هم روی خط d باشد، باید داشته باشیم:

$$B \in d \Rightarrow b + m = -2(a + 3) + n$$

$$\Rightarrow b + m = -2a - 6 + n \Rightarrow \underbrace{b + 2a}_n + m = -6 + n$$

$$\Rightarrow n + m = -6 + n \Rightarrow m = -6$$

پس برای این که نقطه باز هم روی خط باقی بماند، باید -6 واحد به عرض آن اضافه شود.

گزینه ۶۳: برای آن که دو خط یکدیگر را قطع نکنند، باید موازی

باشند، یعنی باید شیبشان با هم برابر باشد. بنابراین برای به دست آوردن a ، معادله خطوط را استاندارد کرده و شیب آن‌ها را با هم مساوی

$$d_1: 3x + ay = -7 \Rightarrow ay = -3x - 7 \text{ قرار می‌دهیم:}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{a}x - \frac{7}{a} \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{a}$$

$$d_2: a^2x + 9y = 3 \Rightarrow 9y = -a^2x + 3$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a^2}{9}x + \frac{3}{9} \Rightarrow m_2 = -\frac{a^2}{9}$$

$$\xrightarrow{m_1=m_2} -\frac{3}{a} = -\frac{a^2}{9} \Rightarrow a^2 = 27 \Rightarrow a = 3$$

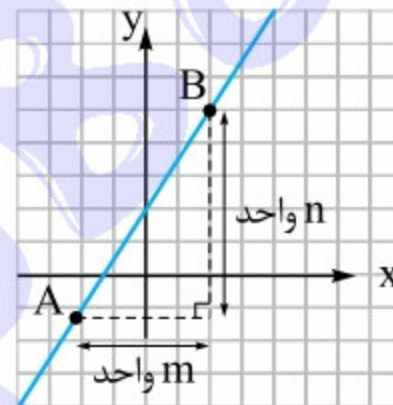
گزینه ۶۴: می‌دانیم دو ضلع AB و BC بر هم عمودند، پس

شیب خط BC قرینه و معکوس شیب خط AB است. حالا چون AB روی خط $2x + 3y = 5$ قرار دارد، پس شیب آن برابر است با:

$$m_{AB} = m_{\text{خط}} \Rightarrow 2x + 3y = 5 \Rightarrow 3y = -2x + 5$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{2}{3}$$

بنابراین BC می‌تواند روی خطی قرار داشته باشد که شیب آن برابر $\frac{3}{2}$ است، که در بین گزینه‌ها تنها گزینه (۱) این ویژگی را دارد.



گزینه ۶۵: مطابق شکل، شیب

خط AB برابر است با $\frac{n}{m}$. از طرفی

شیب خط $-9x + 6y = 7$ به

صورت زیر به دست می‌آید:

$$-9x + 6y = 7 \Rightarrow 6y = 9x + 7 \Rightarrow y = \frac{9}{6}x + \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow m_{\text{خط}} = \frac{3}{2}$$

نهایتاً چون خط d با خط AB موازی است، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{n}{m} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اول } n \text{ و } m} n = 3, m = 2$$

$$\Rightarrow m + n = 2 + 3 = 5$$

گزینه ۶۶: ابتدا معادله خطوط را استاندارد کرده و شیب هر کدام

از آن‌ها را به دست می‌آوریم: $2ax + (a + 3)y = 5$ معادله اول

$$\Rightarrow (a + 3)y = -2ax + 5 \Rightarrow y = \frac{-2a}{a + 3}x + \frac{5}{a + 3}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{-2a}{a + 3}$$

$$\text{معادله دوم: } (6a - 1)y - 3ax = 7 \Rightarrow (6a - 1)y = 3ax + 7$$

$$\Rightarrow y = \frac{3a}{6a - 1}x + \frac{7}{6a - 1} \Rightarrow m_2 = \frac{3a}{6a - 1}$$

حالا چون زاویه بین دو خط برابر 90° است، یعنی خطوط بر هم

$$\text{عمودند، پس داریم: } m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow \frac{-2a}{a + 3} = -\frac{6a - 1}{3a}$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{a + 3} = \frac{6a - 1}{3a} \Rightarrow 2a \times 3a = (6a - 1)(a + 3)$$



گزینه ۷۳ • چون A روی نیمساز ناحیه ۱ و ۳ است، پس داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 3a-1 \\ 5a+11 \end{bmatrix} \Rightarrow 3a-1 = 5a+11$$

$$\Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = -6$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3(-6)-1 \\ 5(-6)+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -19 \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر چون B روی نیمساز ناحیه ۲ و ۴ است، پس داریم:

$$B = \begin{bmatrix} b \\ 2b+6 \end{bmatrix} \Rightarrow -b = 2b+6 \Rightarrow -3b = 6$$

$$\Rightarrow b = -2 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2(-2)+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حالا ابتدا شیب خط AB را محاسبه کرده و سپس معادله آن را

می‌نویسیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \frac{2 - (-19)}{-2 - (-19)}$$

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{21}{17} \Rightarrow \text{معادله AB: } y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\xrightarrow{(B)} y - 2 = \frac{21}{17}(x - (-2)) \Rightarrow y - 2 = \frac{21}{17}(x + 2)$$

$$\xrightarrow{\times 17} 17(y - 2) = 21(x + 2)$$

$$\Rightarrow 17y - 34 = 21x + 42 \Rightarrow 17y - 21x = 76$$

گزینه ۷۴ • ابتدا شیب خط $2y + x = 5$ را به دست می‌آوریم:

$$2y + x = 5 \Rightarrow 2y = -x + 5 \xrightarrow{(\div 2)} y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow m_{\text{خط}} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین شیب خط عمود بر این خط باید برابر ۲ باشد. حالا چون خط عمود از نقطه‌ای به طول ۳- روی نیمساز ناحیه دوم، یعنی نقطه

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت زیر به دست می‌آید:}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 2(x - (-3))$$

$$\Rightarrow y - 3 = 2(x + 3) \Rightarrow y - 3 = 2x + 6 \Rightarrow y - 2x = 9$$

گزینه ۷۵ • شیب خط $2y + 6x = 3$ برابر است با:

$$2y + 6x = 3 \Rightarrow 2y = -6x + 3 \Rightarrow y = -3x + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow m_{\text{خط}} = -3$$

پس شیب خط عمود بر این خط باید برابر $\frac{1}{3}$ باشد. حالا چون این

خط از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ هم عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت زیر

به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}} y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 3)$$

$$\Rightarrow y + 1 = \frac{x}{3} - 1 \Rightarrow y = \frac{x}{3} - 2$$

گزینه ۷۰ • معادله مربوط به خط گذرا از این دو نقطه را به

دست آورده و به کمک آن عرض از مبدأ خط را محاسبه می‌کنیم.

ابتدا دقت کنید که شیب خط گذرا از دو نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ برابر

است با $\frac{5-3}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$. پس معادله خط مربوط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}} y - 5 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y - 5 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 5$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{-4+15}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

عرض از مبدأ

گزینه ۷۱ • محل برخورد دو خط $x = 2$ و $y = -3$ ، نقطه

$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ است. پس خط موردنظر باید از نقاط $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ عبور کند، پس شیب این خط برابر است با:

$$m_{\text{خط}} = \frac{-5 - (-3)}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1$$

و معادله آن نیز به صورت زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}} y - (-5) = -1(x - 4)$$

$$\Rightarrow y + 5 = -x + 4 \Rightarrow y = -x - 1 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -1$$

گزینه ۷۲ • معادله خط d را تشکیل داده و محل برخورد خط d

با محورها را به دست می‌آوریم. چون d از دو نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ عبور

می‌کند، پس شیب آن برابر است با:

$$\frac{4 - (-1)}{3 - 2} = \frac{4+1}{1} = 5$$

در نتیجه معادله خط d به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}} y - 4 = 5(x - 3)$$

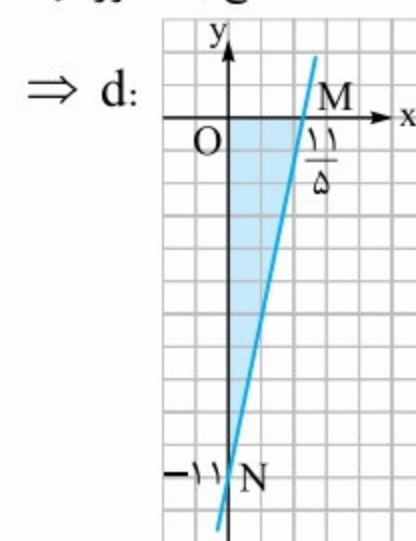
$$\Rightarrow y - 4 = 5x - 15 \Rightarrow y = 5x - 11$$

پس با توجه به معادله به دست آمده محل تقاطع خط d با محورها

به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{تقاطع با محور } x: y = 0 \Rightarrow 5x - 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{5}$$

$$\text{تقاطع با محور } y: x = 0 \Rightarrow y = 5 \times 0 - 11 \Rightarrow y = -11$$



بنابراین با توجه به شکل، مساحت

موردنظر برابر می‌شود با:

$$\frac{OM \times ON}{2} = \frac{\frac{11}{5} \times 11}{2} = \frac{121}{10} = 12.1$$

$$\Rightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{2}{7}(x+1) \xrightarrow{\times 14} 14y - 21 = -4(x+1)$$

$$\Rightarrow 14y - 21 = -4x - 4 \Rightarrow 14y + 4x = 17$$

گزینه ۷۹ •• به کمک روش حذفی، دستگاه را حل کرده و x و y را به دست می‌آوریم:

$$\times(3) \begin{cases} 2x - y = 11 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 33 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$11x = 44 \Rightarrow x = 4$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} 2x - y = 11 \Rightarrow 2 \times 4 - y = 11$$

$$\Rightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow xy = 4 \times (-3) = -12$$

گزینه ۸۰ •• چون $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ جواب دستگاه است، پس در هر دو

معادله دستگاه صدق می‌کند، بنابراین داریم:

$$x=1, y=2 \Rightarrow \begin{cases} ax + by = a + 2b = 5 \\ 2ax - 3by = 2a - 6b = 11 \end{cases}$$

حالا با حل دستگاه زیر مقادیر a و b را محاسبه کرده و پاسخ مسئله را به دست می‌آوریم:

$$\times(-2) \begin{cases} a + 2b = 5 \\ 2a - 6b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 4b = -10 \\ 2a - 6b = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -10b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{10} \xrightarrow{\text{چون}} a + 2b = 5$$

$$\Rightarrow a + 2(-\frac{1}{10}) = 5 \Rightarrow a - \frac{2}{10} = 5 \Rightarrow a = 5 + \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow a = \frac{52}{10} \Rightarrow a + b = \frac{52}{10} - \frac{1}{10} = \frac{51}{10} = 5.1$$

گزینه ۸۱ •• هیچ توان صحیحی از ۲ با هیچ توان صحیحی از ۵

برابر نیست، مگر توان صفر. پس در رابطه $2^{3x+y-9} = 5^{x-2y+4}$ تنها در صورتی تساوی برقرار می‌شود که هر دو توان، برابر صفر باشند.

$$\begin{cases} 3x + y - 9 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \times(2) \begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \text{ بنابراین داریم:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 18 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} x - 2y = -4 \Rightarrow 2 - 2y = -4$$

$$\Rightarrow -2y = -6 \Rightarrow y = 3$$

$$\frac{2^2+3}{2-3} = \frac{2^5}{-1} = \frac{32}{-1} = -32 \text{ پس حاصل عبارت داده شده برابر است با:}$$

گزینه ۸۲ •• به کمک حل دستگاه، محل تقاطع دو خط را به

دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 3y + 5x = 6 \\ x = \frac{1}{5}y \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} 3y + 5(\frac{1}{5}y) = 6$$

$$\Rightarrow 3y + y = 6 \Rightarrow 4y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

گزینه ۷۶ • شیب خط مبدأ‌گذری که از نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، برابر است با:

$$\frac{2-0}{-4-0} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

پس شیب خطی که موازی این خط است، برابر $-\frac{1}{2}$ می‌باشد و ضمناً چون این خط محور عرض‌ها را در نقطه -1 قطع می‌کند، نتیجه می‌گیریم عرض از مبدأش برابر -1 و معادله آن نیز به صورت $y = -\frac{1}{2}x - 1$ است. نهایتاً چون M روی این خط قرار دارد، پس باید داشته باشیم:

$$M = \begin{bmatrix} -6a \\ a+3 \end{bmatrix} \Rightarrow a+3 = -\frac{1}{2}(-6a) - 1$$

$$\Rightarrow a+3 = 3a-1 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow a=2$$

گزینه ۷۷ •• ابتدا توجه کنید که مختصات نقطه وسط BC به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{مختصات } M \text{ وسط } BC: \begin{bmatrix} \frac{x_B+x_C}{2} \\ \frac{y_B+y_C}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7-1}{2} \\ \frac{4+2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} \\ \frac{6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

پس میانه AM از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $M = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند.

در نتیجه شیب AM برابر است با:

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{3-7}{3-5} = \frac{-4}{-2} = 2$$

پس معادله AM به صورت زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}} y - 3 = 2(x - 3)$$

$$\Rightarrow y - 3 = 2x - 6 \Rightarrow y = 2x - 3$$

گزینه ۷۸ •• نقطه‌ای به طول -2 روی نیمساز ناحیه سوم، نقطه

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ است و نقطه‌ای به عرض } 5 \text{ روی محور عرض‌ها نیز نقطه}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ است. حالا توجه کنید که اولاً شیب خط واصل بین } A \text{ و}$$

B برابر $\frac{5 - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{7}{2}$ است و دوماً نقطه وسط پاره‌خط AB ، نقطه

$$\begin{bmatrix} \frac{0-2}{2} \\ \frac{5-2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \text{ است، پس خط عمودمنصف } AB \text{ باید دارای}$$

شیب $-\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{2}{7}$ باشد و از نقطه وسط AB ، یعنی نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

هم عبور کند، پس معادله این خط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{2}{7}(x - (-1))$$



بنابراین چون $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، پس طول ارتفاع AH در مثلث OAB برابر ۱ واحد است. حالا مختصات نقطه B را به دست می‌آوریم. برای پیدا کردن این مختصات کافیست در معادله $y = -3x + 4$ به جای y مقدار عددی صفر را قرار داده و X را به دست آوریم، پس داریم:

$$y = -3x + 4 \xrightarrow{y=0} 0 = -3x + 4 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

بنابراین طول نقطه B و در نتیجه طول پاره خط OB برابر $\frac{4}{3}$ واحد می‌باشد، پس مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{OB \times AH}{2} = \frac{\frac{4}{3} \times 1}{2} = \frac{2}{3}$$

۸۷ گزینه **۲**: چون محل تقاطع $d_1: x + ay = 7$ و $d_2: 2x - 7y = 15$ روی خط $d_3: x + 2y = 2$ است، پس سه خط در این نقطه همدیگر را قطع می‌کنند، یعنی نقطه تقاطع d_1 و d_2 هم همان نقطه تقاطع d_1 و d_3 است. حالا نقطه تقاطع d_1 و d_3 را پیدا کرده و سپس با قراردادن در معادله d_2 ، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} d_1: 2x - 7y = 15 \\ d_3: x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 7y = 15 \\ -2x - 4y = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -11y = 11 \Rightarrow y = -1$$

چون $x + 2y = 2 \Rightarrow x + 2(-1) = 2$

$$\Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین نقطه تقاطع سه خط، نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ است و باید داشته باشیم:

$$d_1 \text{ روی } \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4 + a(-1) = 7 \Rightarrow 4 - a = 7 \Rightarrow a = -3$$

۸۸ گزینه **۱**: ابتدا محل تقاطع دو خط d_1 و d_2 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

چون $x - 2y = 2 \Rightarrow \frac{16}{5} - 2y = 2$

$$\Rightarrow 2y = \frac{16}{5} - 2 \Rightarrow 2y = \frac{16 - 10}{5} \Rightarrow 2y = \frac{6}{5}$$

$$\xrightarrow{(\div 2)} y = \frac{3}{5}$$

حالا چون سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند، پس خط

d_3 نیز دو خط d_1 و d_2 را در نقطه $\begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ قطع می‌کند، یعنی

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5} \times \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{10}$$

پس نقطه برخورد، نقطه $\begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ است.

۸۳ گزینه **۱**: ابتدا محل تقاطع دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x = 2y \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} 2y - y = -2 \Rightarrow y = -2$$

$$\Rightarrow x = 2 \times (-2) = -4$$

پس نقطه برخورد، نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ است و چون خط موردنظر موازی محور طول‌هاست، معادله آن به صورت $y = -2$ است، در نتیجه عرض از مبدأ این خط برابر -2 می‌باشد.

۸۴ گزینه **۱**: چون دو خط یکدیگر را در نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ قطع می‌کنند، پس نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ روی هر دو خط قرار دارد، در نتیجه در

معادله هر دو خط صدق می‌کند، یعنی داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \in 3y = x + b \Rightarrow 3 \times (-2) = 2 + b$$

$$\Rightarrow -6 = 2 + b \Rightarrow b = -8$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \in ay - 2x + 14 = 0 \Rightarrow a \times (-2) - 2 \times 2 + 14 = 0$$

$$\Rightarrow -2a - 4 + 14 = 0 \Rightarrow -2a = -10 \Rightarrow a = 5$$

پس پاسخ مسئله برابر است با: $a - b = 5 - (-8) = 5 + 8 = 13$

۸۵ گزینه **۲**: فرض کنید نقطه موردنظر نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ باشد، در این

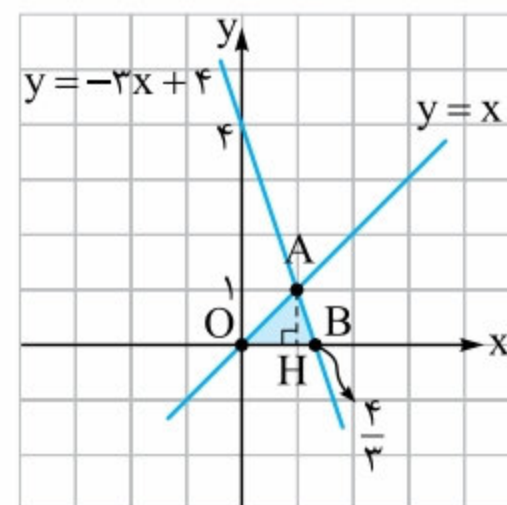
صورت چون دو خط همدیگر را در نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ قطع می‌کنند، پس این نقطه روی هر دو خط قرار داشته و در معادله آن‌ها صدق می‌کند،

پس داریم: $2x + y - 2 = 0$ روی $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \times 1 + a - 2 = 0$

$$\Rightarrow 2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)x - 2y = 0 \text{ روی } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (m-1) \times 1 - 2 \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$



۸۶ گزینه **۱**: ابتدا محل

برخورد دو خط را به دست

می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = -3x + 4 \\ x = y \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} x = -3x + 4$$

$$\Rightarrow x + 3x = 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

۹۱ گزینه • ابتدا محل تقاطع دو خط داده شده را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y = -2x - 4 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -y = -1 \Rightarrow y = 1$$

چون $y = x + 2 \Rightarrow 1 = x + 2 \Rightarrow x = -1$

پس خط موردنظر باید از نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ عبور کند و چون این خط

موازی خط $2x - y = 0$ یا همان $y = 2x$ است، پس شیبش باید برابر ۲ باشد. بنابراین معادله خط به صورت زیر به دست می آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 2(x - (-1))$$

$$\Rightarrow y - 1 = 2(x + 1) \Rightarrow y - 1 = 2x + 2 \Rightarrow y - 2x = 3$$

۹۲ گزینه • ابتدا محل تقاطع دو خط را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \times(3) \{ 3x - 2y = 5 \\ \times(2) \{ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x - 6y = 15 \\ 8x + 6y = 2 \end{cases} \Rightarrow 17x = 17 \Rightarrow x = 1$$

چون $3x - 2y = 5 \Rightarrow 3 - 2y = 5 \Rightarrow -2y = 2$

$$\Rightarrow y = -1$$

پس خط موردنظر باید از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ عبور کند. حالا چون عرض از

مبدأ این خط برابر -3 است، پس معادله آن به فرم $y = ax - 3$

قابل نوشتن است و چون نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است، پس داریم:

$$d: y = ax - 3 \xrightarrow{\text{روی } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} -1 = a - 3$$

$$\Rightarrow a = 3 - 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \text{معادله خط } y = 2x - 3$$

۹۳ گزینه • ابتدا محل تلاقی دو خط داده شده را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y + x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \times(-1) \{ y - 3x = -1 \\ y + x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ y + x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{چون}} y + x = 4$$

$$\Rightarrow y + \frac{5}{4} = 4 \Rightarrow y = \frac{16 - 5}{4} \Rightarrow y = \frac{11}{4}$$

پس محل برخورد، نقطه $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix}$ است. حالا چون موردنظر

از مبدأ مختصات عبور می کند، بنابراین معادله آن به صورت $y = ax$

است، در نتیجه چون نقطه A هم روی این خط قرار دارد، پس داریم:

$$y = ax \xrightarrow{A} \frac{11}{4} = a \times \frac{5}{4} \Rightarrow 5a = 11 \Rightarrow a = \frac{11}{5}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط } y = \frac{11}{5}x$$

این نقطه روی خط d_3 قرار دارد، بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \in d_3 \Rightarrow m\left(\frac{16}{5}\right) - 3\left(\frac{3}{5}\right) = 3$$

$$\Rightarrow \frac{16m - 9}{5} = 3 \Rightarrow 16m - 9 = 15 \Rightarrow 16m = 24 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

پس معادله خط d_3 به صورت $\frac{3}{2}x - 3y = 3$ بوده، در نتیجه شیب آن به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{3}{2}x - 3y = 3 \Rightarrow 3y = \frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{1}{2}$$

۸۹ گزینه • چون خطوط d_1 و d_2 یکدیگر را روی نیمساز

ناحیه دوم و چهارم قطع می کنند، پس نیمساز ناحیه دوم و چهارم

و d_1 و d_2 در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند. حالا با توجه به این که معادله خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم به صورت $y = -x$

است، محل تقاطع d_1 و نیمساز را به دست آورده و در معادله d_2

قرار می دهیم تا m به دست آید.

$$d_1: \begin{cases} y = mx - 20 \\ y = -x \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} -x = mx - 20$$

$$\Rightarrow mx + x = 20 \Rightarrow (m + 1)x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{m + 1}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{20}{m + 1}$$

پس نقطه تقاطع، نقطه $\begin{bmatrix} \frac{20}{m + 1} \\ -\frac{20}{m + 1} \end{bmatrix}$ است، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$d_2: 2y + \frac{m}{2}x = 5 \Rightarrow 2\left(-\frac{20}{m + 1}\right) + \frac{m}{2}\left(\frac{20}{m + 1}\right) = 5$$

$$\xrightarrow{\times(m+1)} 2(-20) + \frac{m}{2}(20) = 5(m + 1)$$

$$\Rightarrow -40 + 10m = 5m + 5 \Rightarrow 10m - 5m = 40 + 5$$

$$\Rightarrow 5m = 45 \Rightarrow m = 9$$

۹۰ گزینه • ابتدا محل برخورد دو خط داده شده را به دست

می آوریم:

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = -x + 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} -x + 3 = 3x - 5$$

$$\Rightarrow -x - 3x = -5 - 3 \Rightarrow -4x = -8 \Rightarrow x = 2$$

چون $y = -x + 3 \Rightarrow y = -2 + 3 \Rightarrow y = 1$

پس محل برخورد دو خط، نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ است، از طرفی این خط از

نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ نیز عبور می کند، پس شیب آن برابر است با:

$$m_{\text{خط}} = \frac{0 - 1}{3 - 2} = \frac{-1}{1} = -1$$

۹۸ گزینه ۰۰ وقتی دستگاه بی‌شمار جواب دارد که دو خط بر هم

$$\begin{cases} (2a+1)x + 2y = 7 \\ \frac{a}{2}x + y = 35 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{بی‌شمار جواب}} \frac{(2a+1)}{a} = \frac{2}{1} = \frac{7}{35} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{2(2a+1)}{a} = 2 \Rightarrow \frac{2a+1}{a} = 1 \Rightarrow 2a+1=a$$

$$\Rightarrow 2a-a=-1 \Rightarrow a=-1$$

۹۹ گزینه ۰۰ فرض کنید سن آرش برابر a و سن شهاب برابر s

باشد، بنابراین چون a از ۳ برابر s یک واحد کم‌تر است، پس داریم $a = 3s - 1$. از طرف دیگر اختلاف a و s برابر ۱۵ واحد است، یعنی

$$a - s = 15 \quad \text{پس داریم:}$$

$$\begin{cases} a = 3s - 1 \\ a - s = 15 \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 3s - 1 - s = 15$$

$$\Rightarrow 2s = 16 \Rightarrow s = 8$$

۱۰۰ گزینه ۰۰ فرض کنید طول مستطیل برابر x و عرض آن برابر

y باشد. در این صورت چون محیط مستطیل برابر ۷۲ واحد است، باید داشته باشیم $2(x+y) = 72$. از طرفی وقتی از x ، ۸ واحد کم کنیم، حاصل برابر همان y می‌شود، پس داریم $y = x - 8$.

حالا به کمک حل دستگاه، عرض مستطیل را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2(x+y) = 72 \\ y = x - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 36 \\ y-x = -8 \end{cases} \Rightarrow 2y = 28 \Rightarrow y = 14$$

۱۰۱ گزینه ۰۰ فرض کنید x تا یوفوی سه چشم و y تا یوفوی پنج چشم داریم. در این صورت تعداد کل چشم‌ها برابر $3x + 5y = 170$ می‌شود، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x+y = 170 \\ 3x+5y = 610 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x-3y = -510 \\ 3x+5y = 610 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y = 100 \Rightarrow y = 50$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} x+y=170 \Rightarrow x+50=170 \Rightarrow x=120$$

بنابراین با توجه به مقادیر به دست آمده، اختلاف تعداد یوفوهای سه چشم و پنج چشم برابر می‌شود با $120 - 50 = 70$ تا.

۱۰۲ گزینه ۰۰ وزن گوی آبی را با b و وزن گوی قرمز را با r نشان

می‌دهیم. در این صورت چون b از سه برابر r ۹ کیلوگرم کم‌تر است، پس داریم $b = 3r - 9$. از طرف دیگر چون وزن $4b$ و r روی هم برابر ۱۶ است، پس داریم $4b + r = 16$. حالا به کمک حل دستگاه،

مقادیر b و r را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 4b+r=16 \\ b=3r-9 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} 4(3r-9)+r=16$$

$$\Rightarrow 12r-36+r=16 \Rightarrow 13r=52 \Rightarrow r=4$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} b=3r-9 \Rightarrow b=3 \times 4 - 9 \Rightarrow b=3$$

پس پاسخ مسئله برابر است با: $r+b=4+3=7$

۹۴ گزینه ۰۰ ابتدا نقطه برخورد خطوط را به دست می‌آوریم:

$$m = -1 \Rightarrow (m+1)x + (m-2)y = 2m+5$$

$$: (-1+1)x + (-1-2)y = 2(-1)+5$$

$$\Rightarrow -3y = 3 \Rightarrow y = -1$$

$$m = 2 \Rightarrow (m+1)x + (m-2)y = 2m+5$$

$$: (2+1)x + (2-2)y = 2 \times 2 + 5 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

پس نقطه برخورد دسته‌خطوط داده‌شده، نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ است. از طرفی

شیب خط $2y - x = 7$ یا همان $y = \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$ برابر $\frac{1}{2}$ است، پس

خط موردنظر خطی است که از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند و شیبش برابر

$\frac{1}{2}$ است، در نتیجه معادله آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\Rightarrow y + 1 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2(y + 1) = (x - 3)$$

$$\Rightarrow 2y + 2 = x - 3 \Rightarrow 2y - x + 5 = 0$$

۹۵ گزینه ۰۰ قطرهای دایره یکدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند،

پس برای به دست آوردن مختصات مرکز دایره کافیست محل تقاطع دسته‌خطوط را به دست آوریم. پس با مقداردهی مناسب به m ، مرکز را

پیدا می‌کنیم: $m = -1 \Rightarrow (m+1)x + (m+2)y = m-5$

$$: (-1+1)x + (-1+2)y = -1-5 \Rightarrow y = -6$$

$$m = -2 \Rightarrow (m+1)x + (m+2)y = m-5$$

$$: (-2+1)x + (-2+2)y = -2-5 \Rightarrow -x = -7$$

$$\Rightarrow x = 7$$

پس مرکز دایره، نقطه $\begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix}$ است.

۹۶ گزینه ۰۰ دستگاه گزینه (۳) شامل بی‌شمار جواب است،

$$\begin{cases} 5-2y=3x \\ 4y+6x=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+3x=5 \\ 4y+6x=10 \end{cases} \quad \text{چون داریم:}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

۹۷ گزینه ۰۰ برای این که دستگاه جواب نداشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{m} = \frac{m}{9} \neq -\frac{1}{4}$$

بنابراین با توجه به تساوی $\frac{1}{m} = \frac{m}{9}$ ، نتیجه می‌گیریم $m^2 = 9$ ، پس

$m = \pm 3$ و چون به ازای هر دو مقدار، حاصل عبارت‌های $\frac{1}{m}$ و $\frac{1}{9}$

مخالف $-\frac{1}{4}$ می‌شود، پس هم 3 و هم -3 برای m قابل قبول هستند.



بنابراین با توجه به مقادیر x و y پاسخ مسئله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(x-y)^{-1} = \left(\frac{2}{3} - 2\right)^{-1} = \left(\frac{2-6}{3}\right)^{-1} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{4} = -0.75$$

گزینه ۱۰۷ اگر معادله دوم را در (-1) ضرب کرده و سپس با معادله اول جمع کنیم، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} a(a-b) = 29 \\ b(a-b) = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a-b) = 29 \\ -b(a-b) = -20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a(a-b) - b(a-b) = 29 - 20$$

$$\Rightarrow (a-b)(a-b) = 9 \Rightarrow (a-b)^2 = 9$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} |a-b| = 3 \xrightarrow{\frac{a < b}{a-b < 0}} -(a-b) = 3$$

$$\Rightarrow a-b = -3$$

حالا توجه کنید که $a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b$ همان $(a-b)^3$ است، پس داریم:

$$a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b = (a-b)^3 = (-3)^3 = -27$$

گزینه ۱۰۸ ابتدا توجه کنید که استاندارد شده معادله $4x + y = 30$ به صورت $y = -4x + 30$ است. حالا برای این که خط $y = 3x + 5$ پایین‌تر از این خط قرار داشته باشد، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$3x + 5 < -4x + 30 \xrightarrow{(+4x)} 7x + 5 < 30$$

$$\xrightarrow{-5} 7x < 25 \Rightarrow x < \frac{25}{7} = 3.57$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 2 \text{ یا } x = 3$$

پس x سه مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

گزینه ۱۰۹ چون $\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ محل تقاطع دو خط است، پس در

معادله هر دو خط صدق می‌کند، پس با قراردادن این نقطه در معادله اول داریم:

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in 2y + ax - 5 = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{2}{3}\right) + a \times \left(\frac{11}{3}\right) - 5 = 0$$

$$\frac{4}{3} + \frac{11a}{3} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{11a}{3} = 5 - \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{11a}{3} = \frac{15-4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{11a}{3} = \frac{11}{3} \Rightarrow a = 1$$

حالا چون خط دوم محور y ها را در نقطه -3 قطع کرده، پس عرض از مبدأش برابر -3 است، بنابراین اگر قرار دهیم $x = 0$ ، آن‌گاه $y = -3$ می‌شود، پس داریم:

$$x = 0 \Rightarrow bx + cy = 3 \Rightarrow b \times 0 + cy = 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{c} \Rightarrow \frac{3}{c} = -3 \Rightarrow c = -1$$

گزینه ۱۰۳ فرض کنید شادی S تومان و تارا t تومان داشته باشند. در این صورت چون پول تارا پنج برابر پول شادی است، پس داریم $t = 5S$. حالا اگر فرض کنیم شادی a تومان از 150 تومان کم‌تر دارد، آن‌گاه تارا a تومان از 150 تومان بیشتر دارد، یعنی پول شادی برابر $S = 150 - a$ و پول تارا برابر $t = 150 + a$ است، در نتیجه با توجه به رابطه $t = 5S$ داریم:

$$\begin{cases} t = 150 + a \\ S = 150 - a \Rightarrow 5S = 5(150 - a) \end{cases} \xrightarrow{t=5S} 150 + a = 5(150 - a) \Rightarrow 150 + a = 750 - 5a$$

$$\Rightarrow 6a = 600 \Rightarrow a = 100$$

پس با توجه به مقدار عددی a ، شادی 50 تومان و تارا 250 تومان پول دارند، یعنی اگر تارا همان a تومان یا به عبارتی 100 تومان به شادی بدهد، پول هر دو یکسان می‌شود.

گزینه ۱۰۴ فرض کنید در ابتدا موسی m توپ و عیسی e توپ دارند. در این صورت پس از جابه‌جایی توپ‌ها در مرحله اول، تعداد توپ‌های موسی برابر $m - e$ و تعداد توپ‌های عیسی برابر $2e$ می‌شود. حالا وقتی در شرایط جدید عیسی به اندازه 2 برابر تعداد توپ‌های موسی به او توپ می‌دهد، تعداد توپ‌های موسی برابر $(m - e) + 2(m - e)$ و تعداد توپ‌های عیسی برابر $2e - 2(m - e)$ تا می‌شود. پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2e - 2(m - e) = 24 \\ (m - e) + 2(m - e) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e - (m - e) = 12 \\ 3(m - e) = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e - (m - e) = 12 \\ m - e = 8 \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} e - 8 = 12 \Rightarrow e = 20$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} m - e = 8 \Rightarrow m - 20 = 8 \Rightarrow m = 28$$

پس موسی در ابتدا 28 توپ داشته است.

گزینه ۱۰۵ همه معادلات داده‌شده را با هم جمع می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} 3a - b = 5 \\ 3b - c = 7 \\ 3c - a = 8 \end{cases} \Rightarrow 3a - b + 3b - c + 3c - a = 5 + 7 + 8$$

$$\Rightarrow 2a + 2b + 2c = 20$$

$$\Rightarrow 2(a + b + c) = 20 \xrightarrow{(\div 2)} a + b + c = 10$$

گزینه ۱۰۶ دستگاه داده‌شده به سادگی قابل حل است. دقت کنید:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{y} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$$

محل برخورد این دو خط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 10 \\ -6x + 15y = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 11y = 22 \Rightarrow y = 2$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} -2x + 5y = 4 \Rightarrow -2x + 10 = 4$$

$$\Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$$

پس محل برخورد این دو خط نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ است، در نتیجه معادله

خط موردنظر، معادله خطی است که از نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ عبور

می‌کند. پس شیب این خط برابر است با:

$$\frac{-2 - 2}{-5 - 3} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه معادله آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}} y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\Rightarrow 2(y - 2) = x - 3 \Rightarrow 2y - 4 = x - 3$$

$$\Rightarrow x - 2y = -1$$

حالا چون نقطه $\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی خط $bx + cy = 3$ هم قرار دارد، پس داریم:

$$b\left(\frac{11}{3}\right) - \frac{2}{3} = 3 \Rightarrow \frac{11b}{3} - \frac{2}{3} = 3$$

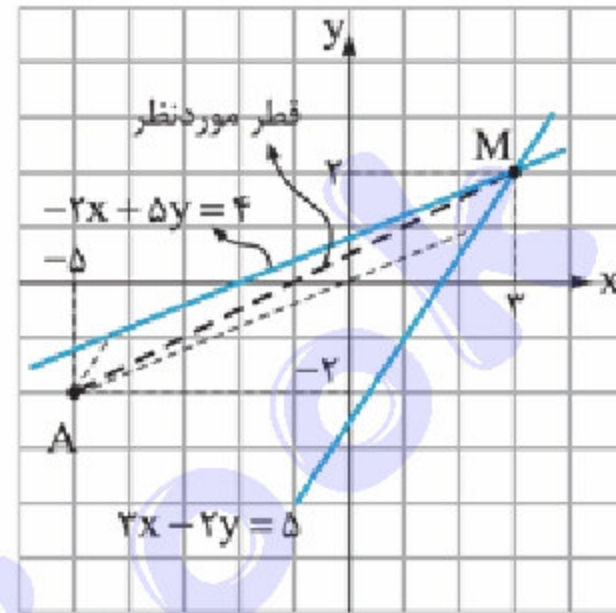
$$\Rightarrow \frac{11b - 2}{3} = 3 \Rightarrow 11b - 2 = 9 \Rightarrow 11b = 11 \Rightarrow b = 1$$

در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با: $a + b + c = 1 + 1 - 1 = 1$

۱۱۰ گزینه **۱۱۰** توجه کنید که دو خط $3x - 2y = 5$ و

از رئوس متوازی‌الاضلاع را مشخص می‌کند، از طرف دیگر نقطه

روی $A = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ هیچ‌کدام از این دو خط قرار ندارند، پس رأسی



که از برخورد این دو خط

به دست می‌آید، رأس

روبه‌روی A است، یعنی

قطری که از A می‌گذرد،

از محل برخورد دو خط

داده‌شده هم می‌گذرد. اما

فصل پنجم

عبارت‌های گویا

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا

در فصل پنجم با چندجمله‌ای‌های جبری آشنا شدیم. یاد گرفتیم که چه طور می‌توان دو چندجمله‌ای را در هم ضرب کرد. اما راجع به تقسیم دو چندجمله‌ای بر هم، مطالب زیادی مطرح نشد. در این فصل می‌خواهیم ابتدا با عبارت‌هایی که از تقسیم دو چندجمله‌ای به دست می‌آیند، آشنا شویم و سپس جمع و تفریق عبارت‌های حاصل از تقسیم دو چندجمله‌ای را یاد بگیریم و در نهایت تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر همدیگر را بیاموزیم.

عبارت‌های گویا

به عبارت‌هایی مانند $\frac{3x^2 - x + 1}{x + 2}$ که در آن صورت و مخرج، هر دو چندجمله‌ای جبری هستند، عبارت گویا گفته می‌شود. (آگه تعریف چندجمله‌ای‌های جبری یاد تون رفته، فیلی سریع به سری به فصل ۵ بزنید، چون آگه یاد تون نباشه، مثال بعدی رو نمی‌تونید حل کنید. 😊)

مثال کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

الف) $\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 - 1}$

ب) $\frac{1}{x^2 y^3}$

پ) $\frac{\sqrt{a}}{a^2 - 1}$

ت) $\frac{|x| + 1}{x^2 + 1}$

ث) $\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{(x+1)}$

ج) $\frac{2a}{a + \frac{2}{b^2}}$

پاسخ با توجه به تعریف عبارت‌های گویا، به بررسی گویا بودن یا نبودن هر عبارت می‌پردازیم:

الف) این عبارت گویا است؛ زیرا توان متغیرها در دو عبارت $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ و $x^2 - 1$ عدد حسابی است؛ بنابراین صورت و مخرج هر دو چندجمله‌ای هستند و بنابراین عبارت داده شده گویا است.

ب) صورت و مخرج این کسر، یعنی ۱ و $x^2 y^3$ هر دو چندجمله‌ای هستند؛ بنابراین این عبارت گویا است.

پ) از آن جایی که صورت کسر، یعنی \sqrt{a} چندجمله‌ای نیست (زیرا توان a در صورت برابر $\frac{1}{2}$ است)، بنابراین این عبارت گویا نیست.

ت) در فصل ۵ یاد گرفتیم که اگر در یک عبارت متغیری درون قدرمطلق قرار گیرد، آن عبارت، چندجمله‌ای جبری محسوب نمی‌شوند. حتی اگر توان متغیرهایشان عضو مجموعه اعداد حسابی باشد؛ پس صورت عبارت یعنی $|x| + 1$ چندجمله‌ای نیست و بنابراین عبارت $\frac{|x| + 1}{x^2 + 1}$ گویا محسوب نمی‌شود.

ث) اگر صورت این عبارت را ساده کنیم، خواهیم داشت: $\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1} = \frac{|x+1|}{x+1}$. همان طور که می‌بینید، در صورت این عبارت، قدرمطلق وجود دارد و بنابراین این عبارت گویا نیست.

ج) بر خلاف ظاهر غلط انداز این عبارت که شبیه عبارت‌های گویا نیست، این عبارت فیلی هم گویا است! 😊 در ظاهر، مخرج این کسر چندجمله‌ای نیست. اما اگر عبارت را ساده کنیم، داریم:

$$\frac{2a}{a + \frac{2}{b^2}} = \frac{2ab^2}{ab^2 + 2}$$

همان طور که مشاهده می‌کنید صورت و مخرج، هر دو چندجمله‌ای هستند و بنابراین عبارت $\frac{a}{a + \frac{2}{b^2}}$ گویا است.

نکته برای این که بتوانیم گویا بودن یا نبودن یک عبارت را درست تشخیص دهیم، باید آن عبارت را تا جای ممکن ساده کنیم و سپس

به قضاوت در مورد گویا بودن یا نبودن آن بپردازیم.



• کاربرد عبارات گویا

از عبارات گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر استفاده می‌شود. در این جا با یک مثال به کاربرد این عبارات در حل مسئله‌های ریاضی می‌پردازیم. (تا نگیذ عبارات گویا به هیچ دردی نمی‌خورن! 😊)

مثال می‌دانیم نسبت طول به عرض یک مستطیل برابر $\frac{5}{3}$ است. از سوی دیگر می‌دانیم طول این مستطیل ۶ سانتی‌متر بزرگ‌تر از عرض آن است. محیط و مساحت این مستطیل را به دست آورید.

پاسخ اگر فرض کنیم طول این مستطیل برابر x باشد، آن‌گاه از آن جایی که اندازه عرض آن ۶ سانتی‌متر کم‌تر از طول مستطیل است، عرض آن، برابر $x - 6$ خواهد بود. از سوی دیگر می‌دانیم نسبت طول به عرض این مستطیل برابر $\frac{5}{3}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول} = x \\ \text{عرض} = x - 6 \\ \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{x-6} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x = 5(x-6) \Rightarrow 3x = 5x - 30 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$$

بنابراین اندازه x یا همان طول مستطیل برابر ۱۵ سانتی‌متر و عرض آن برابر $15 - 6 = 9$ می‌شود.

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{طول} \times \text{عرض} = 15 \times 9 = 135 \text{ سانتی‌متر مربع}$$

$$P_{\text{مستطیل}} = 2(\text{طول} + \text{عرض}) = 2 \times (15 + 9) = 2 \times 24 = 48 \text{ سانتی‌متر}$$

• تعیین مقدار یک عبارت گویا

برای پیدا کردن مقدار یک عبارت گویا به ازای مقدار مشخصی از متغیرهای آن، درست مانند چند جمله‌ای‌های جبری عمل می‌کنیم؛ یعنی کفایت مقدار داده‌شده برای متغیرهای مختلف را در عبارت گویا جای‌گذاری کنیم.

مثال مقدار عبارت گویای $\frac{x^2 y - 1}{x - y^2}$ را به ازای $x = 5$ و $y = 2$ مشخص کنید.

پاسخ با توجه به توضیحات، در عبارت گویای داده‌شده باید مقادیر $x = 5$ و $y = 2$ را جای‌گذاری کنیم؛ یعنی:

$$\frac{x^2 y - 1}{x - y^2} \xrightarrow{x=5, y=2} \frac{(5)^2 \times 2 - 1}{5 - 2^2} = \frac{25 \times 2 - 1}{5 - 4} = \frac{50 - 1}{1} = 49$$

• مقادیر مجاز برای متغیرهای یک عبارت گویا (دامنه)

در یک عبارت گویا مقادیر مختلفی را می‌توان به جای متغیرهای آن قرار داد و مقدار عبارت گویا را به ازای آن‌ها به دست آورد. مثلاً عبارت گویای $\frac{x-1}{x+2}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم به ازای مقادیر مختلف x ، مقدار این عبارت را به دست آوریم.

x	۰	۱	۲	-۱	-۲
$\frac{x-1}{x+2}$	$\frac{0-1}{0+2} = \frac{-1}{2}$	$\frac{1-1}{1+2} = \frac{0}{3} = 0$	$\frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$	$\frac{-1-1}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2$	$\frac{-2-1}{-2+2} = \frac{-3}{0} \Rightarrow$ تعریف نشده

همان‌طور که در جدول بالا می‌بینید، مقدار عبارت گویای $\frac{x-1}{x+2}$ ، به ازای مقادیر مختلف x (به ترتیب ۰، ۱، ۲ و -۱) برابر با مقدارهای مختلفی (به ترتیب $\frac{-1}{2}$ ، ۰، $\frac{1}{4}$ و -۲) شده است. اما مشاهده می‌کنید که مقدار این عبارت به ازای $x = 2$ تعریف نشده است، زیرا مخرج این عبارت گویا به ازای $x = -2$ برابر صفر شده و همان‌طور که از قبل می‌دانیم، در ریاضیات $\frac{\text{عدد}}{0}$ تعریف نشده است. بنابراین می‌گوییم عبارت $\frac{x-1}{x+2}$ به ازای $x = -2$ تعریف نشده است.

تا این‌جا کار متوجه شدیم که نمی‌توانیم هر عددی را به جای متغیرهای یک عبارت گویا قرار دهیم (بر خلاف چند جمله‌ای‌ها که هر عددی رو که دوست داشتیم می‌توانستیم به جای متغیرها قرار بدهیم و هیچ محدودیتی نداشتیم 😊). حالا اگر بخواهیم مجموعه همه مقادیری که به ازای آن یک عبارت گویا تعریف می‌شود را پیدا کنیم، باید همه مقادیری از متغیرها که به ازای آن مخرج عبارت گویا صفر می‌شود را مشخص کنیم. مجموعه اعداد حقیقی به جز این عددها اعدادی هستند که عبارت گویا به ازای آن‌ها تعریف می‌شود و می‌توانیم حاصل عبارت‌های گویا را به ازای آن‌ها محاسبه کنیم. به مجموعه این مقادیر مجاز برای متغیرها، دامنه عبارت گویا می‌گوییم. به عنوان نمونه، همان‌طور که در بالا دیدید، مخرج عبارت $\frac{x-1}{x+2}$ به ازای $x = -2$ برابر صفر می‌شود؛ بنابراین دامنه این عبارت مجموعه عددهای حقیقی به جز عدد -۲ است و این دامنه را به صورت $\mathbb{R} - \{-2\}$ نمایش می‌دهیم.

مثال مجموعه همه مقادیری که عبارت گویای $\frac{3x^2+1}{(x-5)(x+7)}$ به ازای آن‌ها تعریف شده است را به دست بیاورید.

پاسخ با توجه به توضیحات داده شده، کفایت مقادیری که باعث صفر شدن مخرج می‌شوند را از مجموعه اعداد حقیقی کم کنیم تا دامنه عبارت داده شده به دست آید؛ به همین منظور مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-5)(x+7)=0$$

دقت داشته باشید که زمانی حاصل ضرب چند عبارت صفر می‌شود که حداقل یکی از آن‌ها برابر صفر باشد.

$$\Rightarrow (x-5)(x+7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x+7=0 \Rightarrow x=-7 \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید اگر به جای x مقادیر 5 یا -7 را قرار دهیم، آن‌گاه مخرج عبارت $\frac{3x^2+1}{(x-5)(x+7)}$ صفر می‌شود؛ بنابراین دامنه این عبارت به صورت $\mathbb{R} - \{5, -7\}$ است.

مثال دامنه عبارت $\frac{5x^2-1}{ax+3}$ به صورت $\mathbb{R} - \{1\}$ تعریف می‌شود. مقدار a کدام است؟

پاسخ با توجه به این که عبارت سؤال گویا است و دامنه عبارت‌های گویا به صورت $\mathbb{R} - \{\text{مقداری از متغیر که باعث صفر شدن مخرج می‌شود}\}$ تعریف می‌شود، بنابراین

وقتی دامنه به صورت $\mathbb{R} - \{1\}$ است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر عدد 1 را به جای x قرار دهیم، مخرج برابر صفر می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$x=1 \Rightarrow a \times 1 + 3 = 0 \Rightarrow a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

نکته اگر در یک عبارت جبری، به جای متغیر آن، عددی قرار دهیم که موجب صفر شدن مقدار عبارت جبری شود، به آن عدد، ریشه عبارت جبری می‌گوییم. دامنه یک عبارت گویا را می‌توانیم به صورت $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ نیز نمایش دهیم.

مثال دامنه عبارت گویای $\frac{x^2-2x+3}{x^2+2}$ را به دست آورید.

پاسخ مانند مثال‌های قبل، برای پاسخ به این سؤال باید مخرج را برابر صفر قرار دهیم، یعنی:

$$x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2$$

از فصل ۴ به خاطر داریم که مربع هیچ عدد حقیقی نمی‌تواند منفی شود؛ بنابراین هیچ عددی را نمی‌توانیم به جای x قرار دهیم تا x^2+2 برابر صفر شود. به همین دلیل مخرج ریشه ندارد و بنابراین دامنه این عبارت برابر \mathbb{R} است.

مثال مساحت یک مستطیل برابر $12x + 10x^2 + 2x^3$ و طول آن برابر $2x^2 + 6x$ است. محیط این مستطیل را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم مساحت مستطیل از حاصل ضرب طول در عرض آن به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{عرض} \times \text{طول} \Rightarrow 2x^3 + 10x^2 + 12x = (2x + 6) \times \text{عرض}$$

$$\Rightarrow \text{عرض} = \frac{2x^3 + 10x^2 + 12x}{2x^2 + 6x} \xrightarrow{\text{فکتورگیری}} \frac{2x(x^2 + 5x + 6)}{2x(x+3)} \xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحادها}} \frac{(x+3)(x+2)}{x+3} = x+2$$

حالا با توجه به این که هم طول و هم عرض مستطیل را داریم، می‌توانیم محیط مستطیل را محاسبه کنیم:

$$P_{\text{مستطیل}} = 2 \times (\text{طول} + \text{عرض}) = 2 \times (2x^2 + 6x + x + 2) = 2(2x^2 + 7x + 2) = 4x^2 + 14x + 4$$

ساده کردن عبارت‌های گویا

اعداد $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{4}$ ، $\frac{4}{8}$ ، $\frac{16}{32}$ و $\frac{32}{64}$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید همه این ۵ عدد گویا با هم برابر هستند، اما در بین آن‌ها فقط عدد $\frac{1}{2}$ است که دیگر قابل ساده شدن نیست و ۴ عدد دیگر همگی ساده شده و حاصل آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود. اگر بخواهیم یکی از این اعداد (مثلاً $\frac{32}{64}$) را ساده

$$\frac{32}{64} = \frac{1 \times 32}{2 \times 32} = \frac{1}{2}$$

کنیم، به صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم:

به زبان ساده، در ساده‌سازی هر عدد گویا، می‌توان صورت و مخرج را بر عددی غیرصفر تقسیم کرد. مثلاً اگر $\frac{ac}{bc}$ عددی گویا باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای ساده‌کردن یک عبارت گویا، می‌توانیم به کمک فاکتورگیری و اتحادهای جبری که در فصل ۵ آموختیم، صورت و مخرج

عبارت گویا را تجزیه کرده و عبارت‌های مشترک صورت و مخرج را با هم ساده کنیم. به بیان دیگر اگر عبارت $\frac{AC}{BC}$ گویا باشد، داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (B, C \neq 0 \text{ و } C \text{ چندجمله‌ای هستند و } A, B)$$

مثال با فرض این که هر یک از عبارت‌های گویای زیر تعریف شده باشند، آن‌ها را ساده کنید.

الف) $\frac{15a^3}{10a^2b}$

ب) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

پ) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12}$

ت) $\frac{2x^3+12x^2+16x}{2x^2+4x}$

پاسخ با توجه به توضیحات داده‌شده در مورد ساده‌سازی عبارت‌های گویا داریم:

الف) $\frac{15a^3}{10a^2b} = \frac{3a}{2b}$

ب) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحادها}} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$

پ) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12} \xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحادها}} \frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{x+2}{x+4}$

ت) $\frac{2x^3+12x^2+16x}{2x^2+4x} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \frac{2x^3+12x^2+16x}{2x^2+4x} = \frac{2x(x^2+6x+8)}{2x(x+2)} \xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحادها}} \frac{(x+2)(x+4)}{x+2} = x+4$

$\frac{6x}{x-4} = \frac{\bigcirc}{x^2-x-12}$

مثال جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

پاسخ در این گونه سؤال‌ها می‌توانیم به کمک طرفین وسطین کردن، عبارت خواسته‌شده را به دست بیاوریم.

$\frac{6x}{x-4} = \frac{\bigcirc}{x^2-x-12} \Rightarrow (6x)(x^2-x-12) = (x-4) \times \bigcirc$

$\Rightarrow \bigcirc = \frac{(6x)(x^2-x-12)}{(x-4)} \Rightarrow \bigcirc = \frac{(6x)(x-4)(x+3)}{(x-4)} = 6x(x+3) = 6x^2+18x$

پرسش‌های تشریحی

۱ کدام یک از عبارت‌های زیر گویا و کدام یک غیرگویا هستند؟

۱ $\frac{3x+\sqrt{7x}}{-\sqrt{3x^2}}$

۲ $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}$

۳ $\frac{8\sqrt{x-3}}{6\sqrt{3x-9}}$

۴ $\frac{|x-y|}{|x|-|y|}$

۵ $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

۶ $\frac{|5x-2y-6|}{|12+4y-10x|} + \frac{\sqrt{2}}{x-y}$

۷ $\sqrt{5x^2} - \sqrt{5y^4}$

A = $\frac{9x^2+3x-6}{(x-3)(2x^2-11)}$

۲ حاصل عبارت مقابل را به ازای $x=2$ حساب کنید.

۳ اگر بدانیم $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = 2$ ، آن‌گاه حاصل عددی عبارت $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab+2ac-2bc}$ چه قدر است؟

۴ در هر یک از موارد زیر، تعیین کنید که عبارت داده شده به ازای چه مقدارهایی تعریف نشده است؟

۱ $\frac{6-3x}{x}$

۲ $\frac{2x}{3}$

۳ $\frac{5x+4}{2x-5}$

۴ $\frac{7x+6}{(x-3)(2x+7)}$

۵ $\frac{9x^2-1}{(x^2-9)}$

۶ $\frac{(x-2)(x^2+4)}{x^2+5x-14}$

۷ $\frac{5x^2+4}{(4x^2-16)(x^2+6x+9)}$

۸ $\frac{(3x+1)(x^2-16)}{(2x^2-9x-5)(x^2-8)}$

۹ $\frac{x^2-9}{x^4+2}$

۱۰ $\frac{5}{x} - \frac{4}{(x^2+1)(x^2-10x+21)} + \frac{1}{3x^2-27}$

۱۱ $\frac{x}{x^2-9} \div \frac{5x-3}{x^2+2x^2+x}$

۵ اگر عبارت $\frac{5x^2+4x-3}{2x^3-6x+a}$ به ازای $x=1$ تعریف نشده باشد، آن‌گاه مقدار عددی a چه قدر است؟

۶ در هر یک از قسمت‌های زیر، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

۱ اگر عبارت $\frac{3x-2+K}{x^2-ax+b}$ به ازای مقادیر ۵ و -۱ تعریف نشده باشد، آن‌گاه مقدارهای a و b را به دست آورید.

۲ اگر عبارت $\frac{2x-5}{3x^2+cx-d}$ به ازای مقادیر ۸ و -۲ تعریف نشده باشد، آن‌گاه مقادیر c و d را به دست آورید.

۳ اگر عبارت $\frac{(x-q)(x+p)}{5x^2+ex+f}$ فقط به ازای مقدار -۲ تعریف نشده باشد، آن‌گاه مقادیر e و f را محاسبه کنید.

۷ عبارت‌هایی که حاصل آن‌ها برابر عدد است را تعیین کنید.

۱ $\frac{3x-2}{2-3x}$

۲ $\frac{4y+1}{4y-1}$

۳ $\frac{2x-3}{-4x+6}$

۴ $\frac{a-b-c}{b-a-c}$

۵ $\frac{x+2y-3z}{12z-8y-4x}$

۸ عبارت‌های مساوی در دو طرف را به هم وصل کنید.

۱ $\frac{x+3}{x-2}$

الف) $\frac{-2-x}{-x-3}$

۲ $\frac{x-3}{x-2}$

ب) $\frac{-3-x}{2-x}$

۳ $\frac{x+2}{x+3}$

پ) $\frac{3-x}{-2-x}$

۴ $\frac{x-3}{x+2}$

ت) $\frac{3-x}{2-x}$

۹ از بین عبارت‌های زیر، هر کدام که با عبارت $\frac{xy(k-p)}{p}$ برابر است را مشخص کنید.

۱ $\frac{x(ky-p)}{p}$

۲ $\frac{y}{p}(kx-px)$

۳ $xy(k-1)$

۴ $x\left(\frac{ky}{p}-y\right)$

۱۰ هر یک از عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

۱ $\frac{24x^3}{18x^6}$

۲ $\frac{16a^3b^4c^2}{36a^2b^3c^4}$

۳ $\frac{7-c}{c-7}$

۴ $\frac{a-ax}{a}$

۵ $\frac{3x-2}{12-18x}$

۶ $\frac{16x^2}{8x^2-4x}$

۷ $\frac{6x^2+9x}{3x^2+15x}$

۸ $\frac{x^2-25}{2x+10}$

۹ $\frac{36x^2-25y^2}{15y-18x}$

۱۰ $\frac{64-t^6}{t^3-8}$

۱۱ $\frac{5-x}{x^2-2x-15}$

۱۲ $\frac{x^4+13x^3+42x^2}{x^3+6x^2}$

۱۳ $\frac{6x^2+7x+2}{2x+1}$

۱۴ $\frac{3x^2+5x-2}{12x^2+5x-3}$

۱۵ $\frac{3x^3+3x-6}{2x^2+2x-4}$

11 جاهای خالی را با عبارت‌های گویای مناسب پر کنید.

1 $\frac{5x-2}{6} = \frac{1}{6}(\quad)$

2 $\frac{(2x-1) \times (\quad)}{(3x-1) \times (2x-1)} = 5+x$

3 $\frac{2x+3}{x-2} = \frac{\quad}{x^2+5x-14}$

4 $\frac{x^2+12x+27}{\quad} = \frac{x^2+18x+81}{x+6}$

5 $\frac{x^2-16}{\quad} = \frac{x^2+12x+32}{x^2+4x-32}$

6 $\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+3x^2y+3xy^2+y^2} = \frac{\quad}{x+y}$

پرسش‌های چندگزینه‌ای

1 چه تعداد از عبارت‌های زیر گویا نیستند؟

الف) $\frac{3x-\sqrt{7}}{2x^2}$

ب) $\frac{|x-y|}{|x+y|}$

پ) $\frac{\sqrt{2x+5}}{3x-1}$

ت) $\frac{x\sqrt{x+x}}{\sqrt{x+1}}$

(4) هیچی

(3) سه‌تا

(2) دو‌تا

(1) یکی

$\frac{4a^2-2}{1-2a^2}, \frac{2+m}{-m}, \frac{-12+8x}{-4x+6}, \frac{2-2b}{2b-1}$

2 چه تعداد از عبارت‌های زیر برابر 2 و -2 است؟ (همگی تعریف شده‌اند.)

(نمونه دولتی - ایلام - 97-96)

(2) 3

(1) 4

(4) 1

(3) 2

3 حاصل چه تعداد از عبارت‌های زیر برابر 1 یا -1 است؟

الف) $\frac{3-2z}{2z+3}$

ب) $\frac{5m+5n-3}{3-5m-5n}$

پ) $\frac{4xy}{(x+y)^2-(x-y)^2}$

(4) سه‌تا

(3) دو‌تا

(2) یکی

(1) هیچی

$\frac{x^1-b^1}{b^1-x^1} \times \frac{x^2-2x+1}{2x-x^2-1}$

4 کدام گزینه، حاصل عبارت روبه‌رو است؟

(نمونه دولتی - اصفهان - 96-95)

(2) $\frac{x-1}{x^2}$

(1) -1

(4) 1

(3) $\frac{4ax}{b}$

5 کدام یک از عبارت‌های زیر با عبارت $\frac{mp(x-y+z)}{tmn}$ برابر نیست؟

(2) $\frac{p}{t} \left(\frac{xm-ym+zm}{mn} \right)$

(1) $\frac{px-py+pz}{tn}$

(4) $\frac{1}{tm} \left(\frac{mpx-mpy+mpz}{n} \right)$

(3) $\frac{m}{tn} \left(\frac{px-py+pz}{mn} \right)$

(نمونه دولتی - کردستان - 97-96)

6 کدام یک از عبارت‌های گویای زیر قابل ساده‌شدن است؟ (با فرض مخالف صفر بودن مخرج‌ها)

(4) $\frac{4+x^2-4x}{-2+x}$

(3) $\frac{2x^2-16}{x^2-4}$

(2) $\frac{a^2+5}{a}$

(1) $\frac{3-x}{3-y}$

(نمونه دولتی - گلستان - 97-96)

7 حاصل عبارت $\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ax+bx}$ برابر کدام گزینه است؟

(4) x

(3) $\frac{1}{x}$

(2) b+a

(1) ab

(نمونه دولتی - گلستان - 97-96)

8 حاصل کدام گزینه با بقیه گزینه‌ها متفاوت است؟ (مخرج همه کسرها مخالف صفر است.)

(4) $\frac{2a-3b-6a}{4a+3b}$

(3) $\frac{a^2-9}{(3-a)(3+a)}$

(2) $\frac{a^2-2a+1}{2a-a^2-1}$

(1) $\frac{a-3}{a+3}$

۹ حاصل کسر $\frac{-12-8x+4x^2}{-2x+6}$ کدام است؟ ($x \neq 3$)

(۱) $2x+1$ (۲) $2x+2$ (۳) $-2x-2$ (۴) $\frac{x+1}{2}$

(نمونه دولتی - مرکزی - ۹۷ - ۹۶)

۱۰ ساده شده کسر $\frac{(x-2)(x+3)(x^2+2x)}{x^2-4}$ کدام است؟

(۱) x^2+3x (۲) $x+3x$ (۳) x^2+3 (۴) $x+3$

(نمونه دولتی - زبان - ۹۷ - ۹۶)

۱۱ اگر $\frac{2x+8}{x^2+7x+12} = \frac{4x^2-24x+36}{m(x-a)(x+b)^2}$ ، آن گاه حاصل عددی $\frac{3(a+b)}{m}$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) صفر (۲) -18 (۳) -6 (۴) -9

۱۲ اگر $\frac{x^6-x^2}{x^6+3x^3+2x^2} = \frac{x+1}{A}$ و $\frac{A}{B} = \frac{1}{x-3}$ ، آن گاه حاصل B به ازای $x=2$ برابر است با:

(۱) -12 (۲) 12 (۳) 8 (۴) -8

۱۳ خارج قسمت تقسیم x^4-y^4 بر $x+y$ کدام است؟

(۱) x^2-y^2 (۲) $x^2-2x^2y-y^2$

(نمونه دولتی - تهران - ۹۶ - ۹۵)

(۳) $x^3-x^2y+xy^2-y^3$ (۴) $x^3+x^2y-xy^2+y^3$

۱۴ اگر ساده شده عبارت $\frac{2x^3-16}{3x^2-12x+12}$ برابر ۱ باشد، آن گاه حاصل عبارت $\frac{x^2+2x+4}{x-2}$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) $1/5$ (۲) $2/5$ (۳) $-2/5$ (۴) $-1/5$

۱۵ اگر $\frac{x^6-y^6}{x^4-y^4} = x^2+y^2$ ، آن گاه حاصل عبارت $\frac{x^2+2xy}{x^3-3xy}$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) x (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۱۶ اگر $\frac{1-t^4}{t^2-1} = \frac{(1+t^2)(1+t^3)}{(t+1)(at^2+bt+c)}$ ، آن گاه حاصل $2a+3b-c$ برابر است با:

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۷ اگر $3^m+1=k$ ، آن گاه ساده شده عبارت $\frac{27^m-8}{4-9^m}$ بر حسب k، برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) $\frac{k^2+3}{k+1}$ (۲) $\frac{-k^2-3}{k+1}$ (۳) $\frac{k^2+2}{k+1}$ (۴) $\frac{-k^2-2}{k+1}$

۱۸ می‌دانیم $\frac{2x^2+9x+10}{2x^2-7x-30} = \frac{3x+a}{3x-b}$ ، در این صورت حاصل $\frac{a}{3} + \frac{b}{6}$ برابر است با:

(۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

۱۹ حاصل عبارت $\frac{2x^2-5x-3}{5x^2-14x-3}$ را به صورت $\frac{mx+b}{nx+c}$ نوشته‌ایم. در این صورت حاصل عددی $mn-bc$ برابر است با:

(۱) 10 (۲) 9 (۳) 8 (۴) 7

۲۰ اگر $x-y=5$ و $y-z=3$ ، آن گاه حاصل عبارت $\frac{(x^2-5x)(z^2+3z)}{(y^2+5y)(3y-y^2)}$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) -2 (۴) -1

۲۱ عبارت $\frac{x(x-1)}{x^3-4x}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

(۱) 2 و -2 (۲) -2 و 0 (۳) -2 ، 2 و 0 (۴) 0 ، 2 و -3

(نمونه دولتی - قم - ۹۷ - ۹۶)

۲۲ عبارت روبرو به ازای چند مقدار حقیقی برای x تعریف نشده است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

(نمونه دولتی - اردبیل - ۹۷ - ۹۶)



۲۳ به ازای چه مقدار x عبارت $A = \frac{x}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$ تعریف نشده است؟ (نمونه دولتی - زبان - ۹۶ - ۹۵)

- (۱) $\{2, 3\}$ (۲) $\{0, 2, 3\}$ (۳) $\{1, 2, 3\}$ (۴) $\{0, -2, -3\}$

۲۴ حاصل ضرب مقادیری که به ازای آن‌ها عبارت گویای $\frac{5x^2 - 125}{(-x^4 - 1)(x^2 + 64)(2x^2 - 16)}$ تعریف نشده است، برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) $4\sqrt{8}$ (۲) ۳۲ (۳) ۴ (۴) ۱۶

۲۵ عبارت گویای $\frac{x^2 + 1}{x^2 + ax + b}$ به ازای $\{1, 2\}$ تعریف نشده است. مقدار $a - b$ برابر است با: (نمونه دولتی - آذربایجان شرقی - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) -۳ (۲) +۲ (۳) -۵ (۴) -۲

۲۶ اگر عبارت $\frac{2x^2 + ax - b}{3x^2 - 7ax + 6b}$ به ازای دو مقدار $x = 2$ و $x = 5$ تعریف نشده باشد، آن‌گاه مقدار عددی $2a - b$ برابر است با:

- (۱) ۴۴ (۲) -۲۴ (۳) ۱ (۴) -۱

۲۷ عبارت روبه‌رو به ازای کدام عدد تعریف نشده است؟

$$\frac{3}{((2x-1)^2)^3 + 4}$$

(نمونه دولتی - اصفهان - ۹۶ - ۹۵)

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) به ازای همه مقادیر تعریف شده است.

۲۸ اگر a و b دو عدد حقیقی غیرصفر و عبارت $\frac{x+5}{ax^2+b}$ به ازای همه مقادیر x تعریف شده باشد، کدام گزینه همواره در مورد a و b درست است؟

(نمونه دولتی - مازندران - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $ab < 0$ (۲) $a + b > 0$
(۳) $\frac{a}{b} > 0$ (۴) $a - b < 0$

۲۹ اگر عبارت $\frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 11x + m}$ به ازای دو مقدار ۳ و k تعریف نشده باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{m+k}{m-k}$ برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۳۰ اگر عبارت $A = \frac{x}{2x-4} + \frac{7-8x}{5x^2+ax-b} - \frac{3x+1}{9-3x}$ فقط به ازای دو مقدار تعریف نشده باشد و عبارت $5x^2 + ax - b$ نیز دقیقاً به

ازای یک مقدار برای x برابر صفر شود، آن‌گاه حاصل $2a - b$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -۴۵ (۲) -۲۰ (۳) ۲۰ (۴) ۴۵

درس دوم: محاسبات عبارت‌های گویا

ضرب عبارت‌های گویا

در سال‌های قبل با ضرب دو عدد گویا آشنا شدیم. به عنوان مثال یاد گرفتیم که اگر بخواهیم دو عدد $\frac{2}{3}$ و $\frac{7}{5}$ را در هم ضرب کنیم، کفایت صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را نیز به طور جداگانه در هم ضرب کنیم. ضرب دو عبارت گویا هم دقیقاً مانند ضرب دو عدد گویا است. یعنی اگر $\frac{A}{B}$ و $\frac{C}{D}$ دو عبارت گویا باشند، آن‌گاه برای ضرب این دو عبارت داریم:

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

مثال حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\frac{3x-1}{x^2+1} \times \frac{x+2}{x+1}$

ب) $\frac{x-1}{x+2} \times \frac{x+3}{x-2}$

پ) $\frac{2x-2y}{4x+4y} \times \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

پاسخ با توجه به توضیحات بیان‌شده در مورد ضرب دو عبارت گویا داریم:

الف) $\frac{3x-1}{x^2+1} \times \frac{x+2}{x+1} = \frac{(3x-1)(x+2)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{3x^2+6x-x-2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3x^2+5x-2}{x^3+x^2+x+1}$

$$\boxed{ب} \quad \frac{x-1}{x+2} \times \frac{x+3}{x-2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2-4}$$

$$\boxed{ج} \quad \frac{2x-2y}{4x+4y} \times \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{\cancel{2}(x-y)\cancel{(x+y)}^2}{\cancel{4}(x+y)\cancel{(x-y)}(x+y)} = \frac{1}{2}$$

نکته همان‌طور که در قسمت (ب) مثال قبل مشاهده کردید، در ضرب دو عبارت گویا، هر جا که امکان ساده کردن عبارت‌های صورت و مخرج باشد، این کار را انجام می‌دهیم.

تقسیم عبارت‌های گویا

در قسمت قبل با استفاده از ضرب اعداد گویا، ضرب عبارت‌های گویا را یاد گرفتیم. تقسیم عبارت‌های گویا هم دقیقاً شبیه تقسیم دو عدد گویا است. مثلاً اگر بخواهیم عددی مانند $\frac{2}{3}$ را بر $\frac{3}{4}$ تقسیم کنیم، کافیست عدد دوم را معکوس کرده و علامت تقسیم را به ضرب تبدیل کنیم.

در تقسیم دو عبارت گویا نیز عبارت دوم را معکوس کرده و سپس علامت تقسیم (\div) را به ضرب (\times) تبدیل می‌کنیم. به عنوان مثال برای تقسیم عبارت $\frac{x^2-1}{x+2}$ بر عبارت $\frac{x+1}{x-2}$ ، کافیست عبارت $\frac{x+1}{x-2}$ را معکوس کرده و در $\frac{x^2-1}{x+2}$ ضرب کنیم. یعنی:

$$\frac{x^2-1}{x+2} \div \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^2-1}{x+2} \times \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}(x-2)}{(x+2)\cancel{(x+1)}} = \frac{x^2-3x+2}{x+2}$$

مثال حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\frac{4x^2-12x}{x^2+x-12} \div \frac{2}{x+4}$

ب) $\frac{xy-x^2}{4z^2-9x^2} \div \frac{x^2y-x^4}{2z-3x}$

پاسخ با توجه به توضیحات مربوط به تقسیم دو عبارت گویا داریم:

الف) $\frac{4x^2-12x}{x^2+x-12} \div \frac{2}{x+4} = \frac{\cancel{4}x(x-3)}{(x+4)(x-3)} \times \frac{x+4}{\cancel{2}} = 2x$

ب) $\frac{xy-x^2}{4z^2-9x^2} \div \frac{x^2y-x^4}{2z-3x} = \frac{xy-x^2}{(2z-3x)(2z+3x)} \times \frac{2z-3x}{x^2(xy-x^2)} = \frac{1}{(2z+3x)x^2} = \frac{1}{2zx^2+3x^3}$

مثال اگر مساحت مستطیلی برابر $\frac{8m^3}{6m^2n}$ باشد و بدانیم عرض آن برابر $\frac{16m}{n^3}$ است، آن‌گاه طول این مستطیل را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم مساحت مستطیل از حاصل ضرب طول در عرض آن به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$\text{عرض} \div \text{مساحت مستطیل} = \text{طول} \Rightarrow \text{عرض} \times \text{طول} = \text{مساحت مستطیل}$$

$$\Rightarrow \text{طول} = \frac{8m^3}{6m^2n} \div \frac{16m}{n^3} = \frac{\cancel{8}m^3}{\cancel{6}m^2n} \times \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{16}m} = \frac{n^2}{12}$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

در سال‌های قبل با جمع و تفریق اعداد گویا آشنا شدیم. مهم‌ترین مرحله در جمع یا تفریق دو عدد گویا، هم‌مخرج کردن آن‌هاست. مثلاً اگر بخواهیم دو عدد $\frac{5}{6}$ و $\frac{2}{6}$ را با هم جمع کنیم، مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}, \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ابتدا صورت و مخرج هر یک از کسرها را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

۲ مخرج مشترک یا همان ک.م.م مخرج‌های دو کسر را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} 6 = 2 \times 3 \\ 8 = 2^3 \end{array} \right\} \Rightarrow [6, 8] = 2^3 \times 3 = 24$$

۳ کسرها را براساس مخرج مشترک به دست آمده، بازنویسی می‌کنیم و سپس مطابق خواسته سؤال، کسرها را با هم جمع یا تفریق می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24} \\ \frac{1}{8} = \frac{1 \times 3}{8 \times 3} = \frac{3}{24} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5}{6} + \frac{1}{8} = \frac{20}{24} + \frac{3}{24} = \frac{20+3}{24} = \frac{23}{24}$$

در جمع و تفریق عبارت‌های گویا هم دقیقاً همین سه مرحله را انجام می‌دهیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم دو عبارت گویای $\frac{2x}{x^2 + 2x}$ و $\frac{4x}{x+2}$ را با هم جمع کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{4x}{x+2} + \frac{2x}{x(x^2+2x)} = \frac{2}{x^2+2x}$$

۱ ساده‌سازی صورت و مخرج هر کسر:

$$\left. \begin{array}{l} x+2 \\ x^2+2x = x(x+2) \end{array} \right\} \Rightarrow [x+2, x(x+2)] = x(x+2)$$

۲ محاسبه ک.م.م مخرج‌ها:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4x}{x+2} = \frac{4x \times x}{(x+2) \times x} = \frac{4x^2}{x(x+2)} \\ \frac{2}{x(x+2)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4x}{x+2} + \frac{2x}{x^2+2x} = \frac{4x^2}{x(x+2)} + \frac{2}{x(x+2)} = \frac{4x^2+2}{x(x+2)}$$

۳ بازنویسی کسرها براساس مخرج مشترک و انجام عمل جمع یا تفریق براساس خواسته مسئله:

یادآوری برای محاسبه ک.م.م دو عبارت جبری، کافیست آن‌ها را به صورت ضرب عوامل غیر قابل تجزیه‌شان بنویسیم و سپس عوامل مشترک با توان بیشتر را، در عوامل غیرمشترک ضرب کنیم. یعنی: عوامل غیرمشترک \times عوامل مشترک با بالاترین توان = ک.م.م

مثال حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{4x^2 - 12x}{x^2 + x - 12} + \frac{2}{x-4}$ ب) $\frac{x^2}{x^3 - x^4} - \frac{x}{x^2 + 1}$ پ) $\frac{1}{y^2(x-1)} + \frac{1}{y(x^2-1)}$

پاسخ با توجه به مراحل گفته‌شده برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا داریم:

$$\Rightarrow \frac{4x^2 - 12x}{x^2 + x - 12} + \frac{2}{x-4} = \frac{4x}{x+4} + \frac{2}{x-4} = \frac{4x(x-4) + 2(x+4)}{x^2 - 16} = \frac{4x^2 - 16x + 2x + 8}{x^2 - 16} = \frac{4x^2 - 14x + 8}{x^2 - 16}$$

$$\frac{x^2}{x^3 - x^4} = \frac{x^2}{x^4(x - x^3)} = \frac{1}{x - x^3} = \frac{1}{x(1-x)} \Rightarrow \frac{x^2}{x^3 - x^4} - \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x(1-x)} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2(1-x)}{x(1-x)(x^2 + 1)} = \frac{x^2 + 1 - x^2 + x^3}{x(1-x)(x^2 + 1)} = \frac{1 + x^3}{x(1-x)(x^2 + 1)}$$

$$\frac{1}{y^2(x-1)} + \frac{1}{y(x^2-1)} = \frac{1}{y^2(x-1)} + \frac{1}{y(x-1)(x+1)} = \frac{x+1+y}{y^2(x-1)(x+1)} = \frac{x+y+1}{y^2(x^2-1)}$$

مثال محیط مستطیل روبه‌رو را به دست آورید.

$$\frac{6mn^2}{\lambda m^3} \quad \frac{n^2}{16m}$$

محیط مستطیل = ۲ × (طول + عرض)

پاسخ می‌دانیم محیط مستطیل از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\Rightarrow P_{\text{مستطیل}} = 2 \left(\frac{6mn^2}{\lambda m^3} + \frac{n^2}{16m} \right) = 2 \left(\frac{3n^2}{4m^2} + \frac{n^2}{16m} \right) = 2 \left(\frac{12n^2 + n^2 m}{16m^2} \right) = \frac{12n^2 + n^2 m}{8m^2}$$

مثال ساده‌شده عبارت $A = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ را به دست آورید.

پاسخ ابتدا حاصل هر یک از پرانتزها را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم و سپس آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-x+2x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x}$$

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1-x}{x} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{1-x} \times \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

عبارت‌های گویای مرکب

تا حالا با عبارت‌های گویایی سروکار داشتیم که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای بود. بعضی از کسرها مانند $\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{2x}{x+1}}$ وجود دارند که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای نیست، اما هر یک از عبارت‌های صورت و مخرج، خود عبارتی گویا است. به این عبارت‌ها **گویای مرکب** می‌گویند.

برای ساده کردن این عبارت‌ها، دو راه کلی وجود دارد:

۱ با ضرب کردن عبارت مناسب در صورت و مخرج، مخرج عبارت‌های صورت و مخرج را از بین می‌بریم و سپس عبارت باقی‌مانده را ساده می‌کنیم. با این روش عبارت گویای مرکب تبدیل به عبارت گویای ساده شود.

مثال حاصل عبارت $\frac{\frac{m^2 - n^2}{n-1}}{\frac{m^2 + n^2}{n+1}}$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

پاسخ عبارت داده‌شده، یک عبارت گویای مرکب است. اگر صورت و مخرج را در $(n-1)(n+1)$ ضرب کنیم، مخرج عبارت‌های صورت و مخرج از بین می‌رود.

$$\frac{\frac{m^2 - n^2}{n-1}}{\frac{m^2 + n^2}{n+1}} = \frac{(n-1)(n+1)\left(\frac{m^2 - n^2}{n-1}\right)}{(n-1)(n+1)\left(\frac{m^2 + n^2}{n+1}\right)} = \frac{(n+1)(m^2 - n^2)}{(n-1)(m^2 + n^2)} = \frac{nm^2 - n^3 + m^2 - n^2}{nm^2 + n^3 - m^2 - n^2}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید عبارت به دست آمده یک عبارت گویای ساده است.

۲ عبارت‌های صورت و مخرج عبارت گویای مرکب را، به طور جداگانه ساده می‌کنیم و سپس به وسیله انجام عملیات دور در دور و نزدیک در نزدیک، عبارت گویای مرکب را به گویای ساده تبدیل می‌کنیم. (می‌دونم عملیات دور در دور و نزدیک در نزدیک حسابی توپهوتون رو پلپ کرده! با به مثال همه چیز براتون روشن می‌شه! 😊)

مثال حاصل عبارت $\frac{\frac{x}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x} - 2}$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

پاسخ با توجه به این‌که عبارت داده‌شده یک عبارت گویای مرکب است، صورت و مخرج را به طور جداگانه ساده کرده و سپس آن‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{x-1} + 1 &= \frac{x+x-1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1} \\ \frac{x+1}{x} - 2 &= \frac{x+1-2x}{x} = \frac{1-x}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{x}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x} - 2} = \frac{\frac{2x-1}{x-1}}{\frac{1-x}{x}}$$

حالا برای ساده کردن عبارت به دست آمده، مطابق فلش‌های نمایش داده شده، عبارت‌های دورتر را در هم ضرب می‌کنیم تا صورت عبارت جدید به دست بیاید. هم‌چنین ضرب عبارت‌های نزدیک‌تر، مخرج عبارت جدید را به وجود می‌آورد.

دور در دور

$$\frac{\frac{2x-1}{x-1}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{(2x-1)(x)}{(x-1)(1-x)} = \frac{2x^2 - x}{-(x-1)^2}$$

مثال اگر $A = \frac{3x}{1-x}$ و $B = \frac{4x}{2+x^2}$ باشد، حاصل عبارت $B + \frac{1}{A^2}$ را به دست آورید.

پاسخ برای پاسخ به چنین سؤال‌هایی کافی است عبارت‌های معادل A و B را در عبارت خواسته شده (یعنی $B + \frac{1}{A^2}$) جای گذاری کنیم:

$$B + \frac{1}{A^2} \xrightarrow{\substack{A = \frac{3x}{1-x} \\ B = \frac{4x}{2+x^2}}} \frac{4x}{2+x^2} + \frac{1}{\left(\frac{3x}{1-x}\right)^2} = \frac{4x}{2+x^2} + \frac{(1-x)^2}{9x^2} = \frac{4x}{2+x^2} + \frac{1-2x+x^2}{9x^2}$$

$$= \frac{9x^2(4x) + (1-2x+x^2)(2+x^2)}{9x^2(2+x^2)} = \frac{36x^3 + 2+x^2 - 4x - 2x^2 + 2x^2 + x^4}{18x^2 + 9x^4} = \frac{x^4 + 34x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{18x^2 + 9x^4}$$

مثال اگر $A = \frac{x^2 - 4y^2}{xy^2}$ و $B = \frac{x^2 y}{4y^2 - x^2}$ باشد، آن گاه حاصل $\frac{A^2 B + 2A^2 B^2 + AB^3}{(A+B)^2}$ را به دست آورید.

پاسخ از ظاهر سفت این عبارت اصلاً نترسید! برای پاسخ به این سؤال، کافی است عبارت بر حسب A و B را ساده کنیم:

$$\frac{A^2 B + 2A^2 B^2 + AB^3}{(A+B)^2} = \frac{AB(A^2 + 2AB + B^2)}{(A+B)^2} = \frac{AB(A+B)^2}{(A+B)^2} = AB$$

حالا به راحتی مقادیر A و B را در AB جای گذاری می‌کنیم:

$$AB = \frac{x^2 - 4y^2}{x y^2} \times \frac{x^2 y}{4y^2 - x^2} = -\frac{x}{y}$$

پرسش‌های تشریحی

۱۲ هر یک از عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

۱ $\frac{5x^2 y^3}{36x^3 z^2} \times \frac{9z^5}{20y^3}$

۲ $\frac{8x^6}{5x^4 y^3} \div \frac{4x^2}{15y^2}$

۳ $\frac{x^2 y - y^2 x}{y} \times \frac{6xy}{(x-y)^2}$

۴ $\frac{x^2 + 5x + 6}{x+2} \div \frac{x+3}{x-4}$

۵ $\frac{x^2}{x-4} \times \frac{x^2 - 13x + 36}{x}$

۶ $\frac{x+2}{x^2 + 14x + 33} \times \frac{x+11}{x+2}$

۷ $\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 6x} \div \frac{x^2 + 11x + 10}{x-6}$

۸ $\frac{x+4}{x^2 + 8x + 16} \times \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 + 11x + 30}$

۹ $\frac{1-b^2}{1+b} \div \frac{b^2 - 49}{7-b}$

۱۰ $\frac{x^2 - 10x + 25}{3x^2 y - 15xy} \times \frac{x^2 - 8x + 15}{3x^2 - 8x - 3}$

۱۱ $\frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 5} \times \frac{2x^2 - 5x}{x^2 - x + 1}$

۱۳ جاهای خالی را با عبارت‌های جبری مناسب پر کنید.

۱ $\frac{x^2 + 11x + 28}{x+7} \times \frac{x-3}{\square} = 6 - 2x$

۲ $\frac{x^2 - y^2}{\square} \div \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{x^2 + y^2 + xy} = x^3 - y^3$

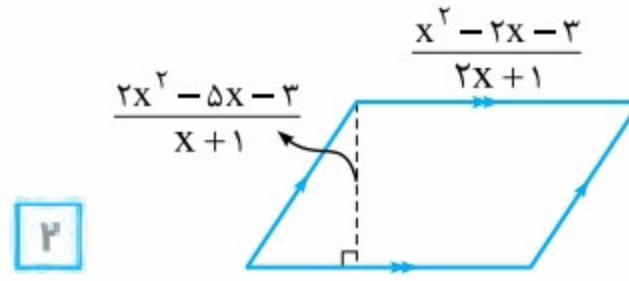
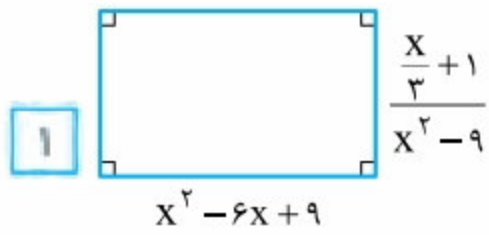
۳ $\frac{x^4 - y^4}{\square} \times \frac{6x^3 - 12x^2 y + 6xy^2}{6x} = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$

۱۴ برای هر یک از بخش‌های زیر، یک عبارت گویای مناسب بنویسید.

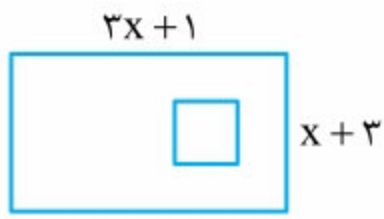
۱ عبارتی گویا پیدا کنید که وقتی در $\frac{x-1}{x+3}$ ضرب می‌شود، حاصل برابر $\frac{x+2}{x-1}$ شود.

۲ عبارتی گویا پیدا کنید که وقتی بر $\frac{x-3}{6x^2 + 7x + 2}$ تقسیم می‌شود، حاصل برابر $4x^2 + 4x + 1$ شود.

۱۵ با توجه به شکل‌های زیر، مساحت هر شکل را به دست آورید.



۱۶ حجم مکعب مستطیلی به طول $\frac{x+1}{x+3}$ و عرض $\frac{x-1}{x+5}$ برابر $\frac{x^2+2x+1}{x^2-9}$ است. ارتفاع این مکعب مستطیل را به صورت یک عبارت جبری گویا بنویسید.



۱۷ در شکل مقابل طول ضلع مربع، $\frac{1}{3}$ طول مستطیل است. اگر نسبت مساحت مستطیل به مساحت مربع برابر $\frac{9}{4}$ باشد، آن‌گاه محیط مستطیل برابر چه عددی است؟

۱۸ حاصل جمع و تفریق‌های زیر را به دست آورید.

۱ $\frac{5}{x} + \frac{10}{-x}$

۲ $\frac{5x+6}{3x-4} + \frac{9-2x}{3x-4}$

۳ $\frac{-3x-9}{6x+11} - \frac{3x+2}{6x+11}$

۴ $\frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{y-x}$

۵ $\frac{x+3}{x} - \frac{5x-1}{x(x+2)}$

۶ $\frac{4x^2-12}{4x^2-9} - \frac{2x+1}{2x+3}$

۷ $\frac{3}{2x(x+y)} + \frac{y+1}{y(x+y)^2}$

۸ $\frac{x}{x^2+5x+6} - \frac{5}{x^2+6x+8}$

۹ $\frac{x^2-y^2}{x+y} - \frac{y^3-x^3}{x^2-y^2}$

۱۰ $\frac{9+x^2-3x}{x+3} - x-3$

۱۱ $\frac{4x^2}{x^2-8} - \frac{1}{x-2}$

۱۲ $\frac{x-2}{x^2+3x^2+3x+1} - \frac{x-4}{(x^2-1)(x+1)}$

۱۳ $\frac{4x}{x^2+4x+4} + \frac{1}{x^2-4} - \frac{3}{x+2}$

۱۹ در هر قسمت، یک عبارت جبری گویای مناسب بنویسید.

۱ عبارتی گویا پیدا کنید که وقتی با $\frac{x-3}{x^2+3x+2}$ جمع می‌شود، حاصل برابر $\frac{1}{x+1}$ شود.

۲ عبارتی گویا پیدا کنید که وقتی $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ از آن کم می‌شود، حاصل برابر $\frac{x^2}{x+3}$ شود.

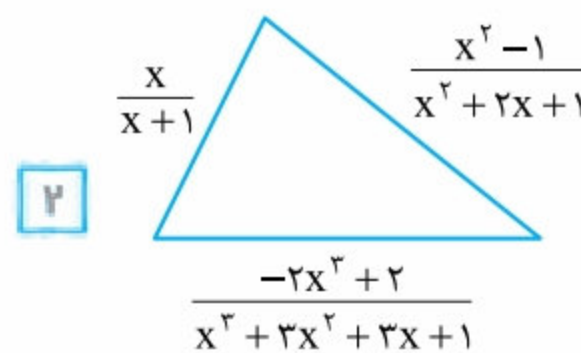
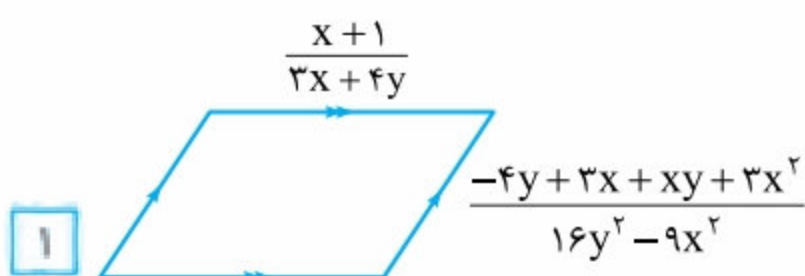
۲۰ برای هر یک از بخش‌های زیر، پاسخ مناسب بنویسید.

۱ دو عبارت گویا بنویسید که حاصل جمع آن‌ها برابر $\frac{1}{1-x}$ باشد.

۲ دو عبارت گویا بنویسید که حاصل تفریق آن‌ها برابر $\frac{-x}{x^2+3x-10}$ باشد و ضمناً این دو عبارت هم‌مخرج نباشند.

۳ اگر $\frac{A}{x-1} - \frac{Bx+1}{2x^2-2} = \frac{1}{x+1}$ باشد، آن‌گاه مقادیر عددی A و B را به دست آورید.

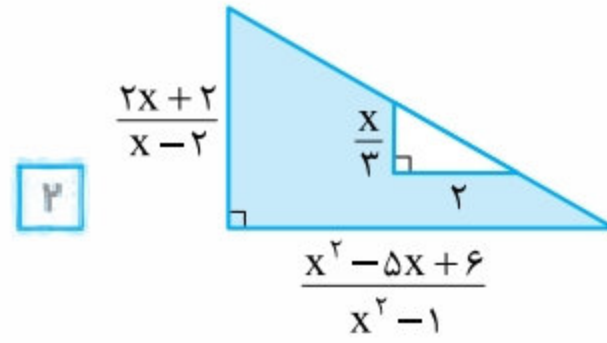
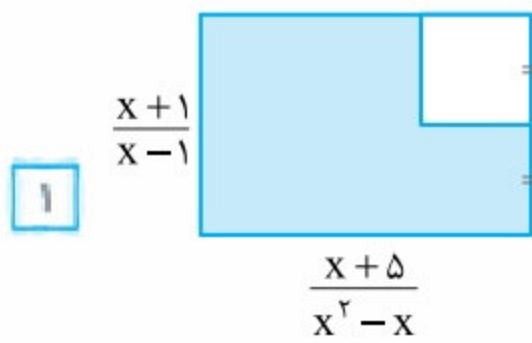
۲۱ محیط هر یک از شکل‌های زیر را به دست آورید.



۲۲ محیط یک مستطیل برابر $\frac{2}{4x^2+x-3}$ و طول آن برابر $\frac{1}{x+1}$ است. عرض مستطیل را به صورت یک عبارت جبری گویا به دست آورید.



۳۳ با توجه به شکل‌های زیر، در هر قسمت مساحت قسمت رنگی را به صورت یک عبارت جبری گویا به دست آورید.



۳۴ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۱ $1 + \frac{2}{x} - \frac{15}{x^2}$
 $1 + \frac{4}{x} - \frac{21}{x^2}$

۲ $\frac{2}{x} - \frac{5}{x+2}$
 $\frac{5}{x+2} - \frac{2}{x}$

۳ $\frac{5 - \frac{4}{2x+1}}{3 - 2}$
 $\frac{5 - \frac{4}{2x+1}}{2x+1} - 2$

۴ $\frac{3x}{2x-y} - \frac{2y}{2x+y}$
 $\frac{2x}{2x+y} - \frac{3y}{2x-y}$

۳۵ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۱ $\frac{x - \frac{x^2}{x+y}}{1 + \frac{y^2}{x^2 - y^2}}$

۲ $\frac{\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y}}{\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y}}$

۳ $\frac{\frac{3}{x-y} - \frac{4}{x+y}}{\frac{x^2 - 49y^2}{(x+y)^2}}$

۴ $\frac{\frac{x^2 - x}{1 - x^2}}{\frac{x}{x-1} + x}$

پرسش‌های چندگزینه‌ای

(نمونه دولتی - لرستان - ۹۷ - ۹۶)

۳۱ حاصل عبارت $\frac{-2x+2}{x^2-1} \div \frac{4x+4}{x^2+2x+1}$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

-2 (۲)

2 (۱)

(نمونه دولتی - گلستان - ۹۷ - ۹۶)

۳۲ کدام گزینه، حاصل عبارت $\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-5)^2} \div \frac{x^2 - 1}{-5+x}$ است؟

$(x+5)^{-2}$ (۴)

$(x-1)^{-1}$ (۳)

$\frac{1}{x+5}$ (۲)

$\frac{1}{x-5}$ (۱)

(نمونه دولتی - سمنان - ۹۶ - ۹۵)

۳۳ کدام گزینه، ساده‌شده عبارت $\frac{x^2 - 4}{\frac{2}{x} + 1} \div \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$ است؟

$\frac{x-2}{x+1}$ (۴)

$\frac{2x}{x-1}$ (۳)

$\frac{x-1}{x(x+1)}$ (۲)

$\frac{x^2}{x-1}$ (۱)

$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 10x + 21}$

۳۴ حاصل تقسیم مقابل کدام است؟

(نمونه دولتی - یزد - ۹۶ - ۹۵)

$\frac{x-1}{x-3}$ (۲)

$\frac{x+1}{x-3}$ (۱)

$\frac{x+1}{x-1}$ (۴)

$\frac{x-1}{x+1}$ (۳)

(نمونه دولتی - گلستان - ۹۷ - ۹۶)

۳۵ چه عبارتی را بر $x^2 - x - 6$ تقسیم کنیم تا حاصل آن برابر $\frac{3x}{x-3}$ شود؟ ($x \neq -2$, $x \neq 3$)

$9x^2$ (۴)

$3x^2 + 6$ (۳)

$3x^2 - 6x$ (۲)

$6x + 3x^2$ (۱)

(نمونه دولتی - سمنان - ۹۷ - ۹۶)

۳۶ اگر $\frac{ax^2 + ax}{6x} \times \frac{2x-6}{x^2 - 2x - 3} = 3$ باشد، مقدار a کدام است؟

9 (۴)

6 (۳)

3 (۲)

1 (۱)

(نمونه دولتی - بوشهر - ۹۷ - ۹۶)

۳۷ اگر $\frac{ax^2 + ax}{2x^3 + 12x^2} \div \frac{x^2 - 1}{x^3 + 5x^2 - 6x} = 3$ ، آن‌گاه a برابر است با: (مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است.)

10 (۴)

8 (۳)

6 (۲)

3 (۱)

۳۸ اگر بدانیم $\frac{a^2 - 2a + 2}{a + 2} \times \frac{2a}{a - 2} \times \frac{2a + 4}{a^2 - 5a} = \frac{6a - y}{a - 5}$ مقدار y کدام است؟

(نمونه دولتی - آذربایجان شرقی - ۹۶ - ۹۵)

(۱) ۶ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۶

۳۹ حاصل عبارت $\frac{a^2 b^2}{(1 - 2a + a^2)} \times \frac{(1 - a^2)(a^2 + 2a + 2)}{(a + 2)(b^2 a^2)(a + 1)}$ برابر با کدام گزینه است؟

(نمونه دولتی - گلستان - ۹۷ - ۹۶)

(۱) $\frac{-(a + 1)}{-a + 1}$ (۲) $\frac{-(a + 1)}{b(a - 1)}$ (۳) $\frac{-a - 1}{-ba - b}$ (۴) $\frac{a + 1}{b(a + 1)}$

۴۰ ساده شده عبارت C کدام است؟

(نمونه دولتی - فارس - ۹۶ - ۹۵)

$$C = (2xy + 3y^2)^{-2} \div \frac{4x^2y - 12xy^2 + 9y^3}{4x^2 - 9y^2}$$

(۱) $\frac{y}{4x^2 - 9y^2}$ (۲) $\frac{y^2}{4x^2 + 9y^2}$ (۳) $\frac{1}{y^2(4x^2 - 9y^2)}$ (۴) $\frac{1}{y^2(2 + 3y)}$

۴۱ در عبارت $\frac{5x - 3}{x^2 - 4} \div \frac{3x - 6}{2x - 8}$ متغیر x چه اعدادی نمی تواند باشد؟

(نمونه دولتی - گلستان - ۹۷ - ۹۶)

(۱) ۲، -۲، ۴ و ۲ (۲) -۲، -۴ و ۲ (۳) -۲ و ۴ (۴) -۲ و ۲

۴۲ عبارت C به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

(نمونه دولتی - تهران - ۹۷ - ۹۶)

$$C = \frac{x - 1}{5x^2 + 2\sqrt{5}x + 1} \div \frac{x^3 - 5x}{1 - \sqrt{5}x}$$

(۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ، $\pm\sqrt{5}$ و صفر (۲) $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ ، $\pm\sqrt{5}$ و صفر (۴) ۱، صفر و $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

۴۳ ساده شده عبارت $-a - \frac{1 - a}{a - 1}$ کدام است؟

(نمونه دولتی - ایلام - ۹۷ - ۹۶)

(۱) $-a - 1$ (۲) $1 - a$ (۳) $a + 1$ (۴) $-1 + a$

۴۴ حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟

(نمونه دولتی - اصفهان - ۹۷ - ۹۶)

$$\frac{x - 8}{x^2 - x - 6} + \frac{x - 2}{x - 3}$$

(۱) $\frac{x + 4}{x + 2}$ (۲) $\frac{x - 4}{x - 3}$ (۳) $\frac{x - 2}{x - 3}$ (۴) $\frac{x + 3}{x + 2}$

۴۵ حاصل عبارت مقابل برابر کدام گزینه است؟ (همهٔ مخارجها مخالف صفر هستند.)

(نمونه دولتی - فراسان رضوی - ۹۷ - ۹۶)

$$\frac{a^2 - 8a}{a^2 - 16} + \frac{a - 4}{a + 4}$$

(۱) $\frac{2a - 16}{a - 4}$ (۲) $\frac{2a - 8}{a - 4}$ (۳) $\frac{a - 8}{a - 4}$ (۴) $\frac{2a - 8}{a - 4}$

۴۶ حاصل عبارت $\frac{2}{3x - 3} - \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{2x + 2}$ کدام است؟

(نمونه دولتی - آذربایجان شرقی - ۹۷ - ۹۶)

(۱) $\frac{1}{6x + 6}$ (۲) $\frac{1}{6(x - 1)}$ (۳) $\frac{1}{6(x^2 - 1)}$ (۴) $\frac{x}{6(x^2 - 1)}$

۴۷ حاصل عبارت $\frac{2x}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{1 + x}$ برابر کدام گزینه است؟

(نمونه دولتی - گلستان - ۹۷ - ۹۶)

(۱) $\frac{-x + 3}{(x - 1)(x + 1)^2}$ (۲) $\frac{x}{x - 2}$ (۳) $\frac{x + 3}{(x - 1)^2}$ (۴) $\frac{x + 2}{(x - 2)(x - 1)}$

۴۸ اگر $\frac{8x-10}{x^2-2x} + \frac{3}{2-x} = \frac{A}{x}$ مقدار A کدام است؟ (نمونه دولتی - یزد - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) -۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) -۶

۴۹ اگر $\frac{8x-6}{x^2-3x} + \frac{6}{3-x} = \frac{C}{x}$ عدد C کدام است؟ (نمونه دولتی - گلستان - ۹۶ - ۹۵)

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲

۵۰ اگر $\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{7x+1}{2x^2+x-1}$ آن‌گاه حاصل عبارت A - B کدام است؟ (نمونه دولتی - مازندران - ۹۶ - ۹۵)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

۵۱ اگر $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{3x-x^2} = \frac{x+5}{x}$ آن‌گاه حاصل Ax - B کدام است؟ (نمونه دولتی - مازندران - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $x^2 - 9$ (۲) $x^2 + 2x - 15$ (۳) $x + 17$ (۴) $x - 13$

۵۲ اگر $A = \frac{3}{2x-4}$ و $A + B = \frac{x}{2(x^2-4)}$ عبارت B کدام گزینه است؟ (نمونه دولتی - سمنان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $\frac{x+3}{x-2}$ (۲) $\frac{-x+3}{(x-2)(x+2)}$ (۳) $\frac{-x-3}{x^2-4}$ (۴) $\frac{x-3}{x^2-4}$

۵۳ حاصل عبارت $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} + \frac{(b^2-a^2)}{(a+b)^2}$ به ازای $a = 1395$ و $b = 1396$ کدام است؟ (نمونه دولتی - هرمزگان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۱۳۹۵ (۴) ۱۳۹۶

۵۴ مقدار عددی عبارت $\frac{\Delta b}{\Delta a - \Delta b} - \frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} + \frac{a+b}{-a-b}$ به ازای $a = 1396$ و $b = 2017$ کدام است؟ (نمونه دولتی - کرمان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) ۱۳۹۶ (۲) -۲ (۳) -۲۰۱۷ (۴) صفر

۵۵ کدام گزینه، مقدار عددی عبارت روبه‌رو به ازای $x = 2\sqrt{5}$ و $y = 3\sqrt{7}$ است؟ (نمونه دولتی - زنجان - ۹۶ - ۹۵)

$$\frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} + \frac{xy}{xy + x^2} + \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x-2)}$$

(۱) ۶ (۲) $6\sqrt{35}$ (۳) $\sqrt{35}$ (۴) ۲

(نمونه دولتی - زنجان - ۹۶ - ۹۵)

۵۶ ساده‌شده عبارت $\frac{1-x}{1+x} - \frac{x}{1-x}$ کدام است؟ (نمونه دولتی - قم - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) ۱ (۲) x (۳) $1-x$ (۴) $1+x$

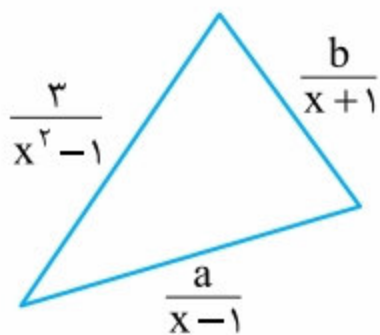
۵۷ حاصل $\frac{2}{a-1} - \frac{4}{a^2-1}$ برابر با کدام گزینه است؟ (با فرض مخالف صفر بودن مخرج‌ها) (نمونه دولتی - گلستان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $\frac{2a-1}{2a-2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{a-1}{a-2}$ (۴) $\frac{2a-2}{a+1}$

۵۸ اگر $A = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ ، $B = \frac{1-A}{1+A}$ و $C = \frac{1-B}{1+B}$ سه عبارت گویا باشند، کدام یک از گزینه‌ها درست است؟ (نمونه دولتی - گلستان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $A = B$ (۲) $A = C$ (۳) $B = C$ (۴) $A = B + C$

۵۹ با توجه به شکل زیر، اگر محیط مثلث برابر $\frac{6x+1}{x^2-1}$ باشد، آن‌گاه حاصل عددی $2a + 3b$ برابر است با:



- (۱) ۱۲

- (۲) ۱۶

- (۳) -۴

- (۴) -۸

$$A = \frac{2x - \frac{3}{x} + \frac{1}{2}}{3y + \frac{2}{y}}$$

۶۰ اگر x و y قرینه معکوس یکدیگر باشند، آن‌گاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

- (۱) $2y$
(۲) $3y$
(۳) $-3y$
(۴) $-2y$

۶۱ مجموع دو عدد $\frac{5}{4}$ و حاصل ضرب آن‌ها $\frac{3}{4}$ است. مجموع معکوس‌های این دو عدد کدام است؟ (نمونه دولتی - آذربایجان غربی - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) $\frac{5}{6}$
(۲) $\frac{6}{5}$
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) $\frac{15}{8}$

۶۲ اگر $a + b + c = 1$ و $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 10$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + (\frac{a}{c} + \frac{c}{a}) + (\frac{b}{c} + \frac{c}{b})$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) ۹
(۲) ۸
(۳) ۷
(۴) ۶

۶۳ اگر بدانیم $c = 1$ ، $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = c = 1$ ، آن‌گاه حاصل ساده‌شده عبارت زیر برابر کدام گزینه است؟

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac}{c^2 - (a^2 + b^2 + 2ab)} \times \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac - 2bc + 2ab}{(a^2 + c^2 + 2ac) - b^2}$$

- (۱) صفر
(۲) $\frac{1}{36}$
(۳) $-\frac{1}{36}$
(۴) $-\frac{1}{9}$

درس سوم: تقسیم چند جمله‌ای‌ها

در فصل ۵، جمع، تفریق و ضرب چند جمله‌ای‌ها را یاد گرفتیم، اما صحبتی از تقسیم چند جمله‌ای‌ها نداشتیم. در این قسمت می‌خواهیم انواع تقسیم چند جمله‌ای‌ها را یاد بگیریم. (تا فدایی نکرده بین چهار عمل اصلی تبعیض قائل نشده باشیم!)

سه حالت کلی برای تقسیم چند جمله‌ای‌ها وجود دارد:

۱- تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

فرض کنید می‌خواهیم یک جمله‌ای $3a^2b^3$ را بر $15a^3b$ تقسیم کنیم. با استفاده از قوانین ساده کردن کسرها، می‌توانیم اعداد، متغیرها و توان‌های مربوط به آن‌ها را در صورت و مخرج ساده کنیم؛ یعنی:

$$\frac{1 \quad 1 \quad b^3}{3 \quad a^3 \quad b^3} = \frac{b^2}{15 \quad a^3 \quad b}$$

$$\frac{1 \quad 1 \quad b^2}{5 \quad a^3 \quad 1} = \frac{b^2}{5a}$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{5x^3y^2z^5}{35xy^3z}$

ب) $-\frac{8m^2n^3}{12m^{-3}n^4}$

پاسخ با توجه به این که هر دو عبارت تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای است، داریم:

الف) $\frac{1 \quad x^3 \quad 1 \quad y^2 \quad z^5}{5 \quad x^3 \quad y^3 \quad z} = \frac{x^2z^4}{7y}$

ب) $-\frac{8m^2n^3}{12m^{-3}n^4} = \frac{-8m^2n^3}{12n^4} \times m^3 = -\frac{2m^5}{3n}$

۲- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای شباهت زیادی به تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای دارد. برای انجام این کار باید تک تک جملات

چند جمله‌ای صورت را به طور جداگانه بر یک جمله‌ای مخرج تقسیم کنیم. مثلاً برای تقسیم $\frac{3ab^2 - a^3}{6ab}$ داریم:

$$\frac{3ab^2 - a^3}{6ab} = \frac{1 \quad 1 \quad b^2}{3 \quad a \quad b} - \frac{a^3}{6 \quad a \quad b} = \frac{b}{2} - \frac{a^2}{6b}$$

مثال حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\frac{ab^3 - 3a^2b + 6b}{5a^2b^2}$

ب) $\frac{-m^3n^2 + 10mn^2 - 2m^{-1}}{5mn^2}$

پاسخ با توجه به این که هر دو عبارت داده شده، تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای است، داریم:

الف) $\frac{ab^3 - 3a^2b + 6b}{5a^2b^2} = \frac{a \overset{b}{b^3}}{5 \overset{a}{a^2} \overset{b^2}{b^2}} - \frac{3 \overset{a^2}{a^2} \overset{b}{b}}{5 \overset{a^2}{a^2} \overset{b^2}{b^2}} + \frac{6 \overset{b}{b}}{5 \overset{a^2}{a^2} \overset{b^2}{b^2}} = \frac{b}{5a} - \frac{3}{5b} + \frac{6}{5a^2b}$

ب) $\frac{-m^3n^2 + 10mn^2 - 2m^{-1}}{5mn^2} = \frac{-m^3n^2}{5mn^2} + \frac{10mn^2}{5mn^2} - \frac{2m^{-1}}{5mn^2} = -\frac{m^2}{5} + \frac{2}{m} - \frac{2}{5m^2n^2}$

مثال اگر مساحت مستطیلی برابر $5m^2n - 3m^3$ باشد و بدانیم عرض این مستطیل برابر $3mn$ است، طول مستطیل را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم مساحت مستطیل برابر حاصل ضرب طول در عرض آن است. بنابراین داریم:

$\text{طول} = \frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{عرض}} \Rightarrow \text{طول} = \frac{5m^2n - 3m^3}{3mn} = \frac{5m^2n}{3mn} - \frac{3m^3}{3mn} = \frac{5m}{3} - \frac{m^2}{n}$

۳- تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای نسبت به دو تقسیم قبلی که یاد گرفتیم، کمی متفاوت‌تر و پیچیده‌تر است. (اما اصلاً نترسید!) برای انجام این کار مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

- ۱ عبارتهای مقسوم و مقسوم‌علیه را براساس توان نزولی متغیرشان مرتب (استاندارد) می‌کنیم.
 - ۲ اولین جمله سمت چپ مقسوم را بر اولین جمله سمت چپ مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم تا اولین جمله خارج قسمت به دست آید.
 - ۳ جمله به دست آمده خارج قسمت را در تک تک جمله‌های مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و عبارت به دست آمده را از مقسوم کم می‌کنیم.
 - ۴ باقی‌مانده به دست آمده در مرحله قبل را به عنوان مقسوم جدید در نظر گرفته و دوباره مراحل ۲ تا ۴ را تکرار می‌کنیم تا به زمان توقف تقسیم برسیم.
 - ۵ عمل تقسیم زمانی متوقف می‌شود که درجه عبارت باقی‌مانده از درجه عبارت مقسوم‌علیه کم‌تر باشد.
- آقا اجازه! به نظر فیلی پیچیده می‌آید! 😊
- نه بچه‌ها! ظاهر این مراحل کمی سفت به نظر می‌آید، اما فیلی ساده‌ست. بایه مثال همه پی‌رو کامل یاد می‌گیرین! 😊

مثال حاصل عبارت $(2x - 4x^3 + 25) \div (2 - x)$ را به دست آورید.

پاسخ با توجه به این که عبارت سؤال تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای است، ۵ مرحله بیان شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$2x - 4x^3 + 25 = -4x^3 + 2x + 25$

$2 - x = -x + 2$

مرحله ۱ استانداردسازی مقسوم و مقسوم‌علیه:

مراحل ۲ و ۳

$$\begin{array}{r}
 -4x^3 + 2x + 25 \quad \overline{) \quad -x + 2} \\
 \underline{-(-4x^3 + 8x^2)} \\
 -8x^2 + 2x + 25 \quad \leftarrow 4x^2(-x+2) \\
 \underline{-(-8x^2 + 16x)} \\
 -14x + 25 \quad \leftarrow 8x(-x+2) \\
 \underline{-(-14x + 28)} \\
 -3 \quad \leftarrow 14(-x+2)
 \end{array}$$

$\frac{-4x^3}{-x} = 4x^2$
 $\frac{-8x^2}{-x} = 8x$
 $\frac{-14x}{-x} = 14$

مرحله ۵ همان‌طور که مشاهده می‌کنید، درجه باقی‌مانده (یعنی عدد ۳-) برابر صفر است و از درجه مقسوم‌علیه (یعنی $-x+2$) که برابر ۱ است، کوچک‌تر است؛ بنابراین تقسیم را متوقف می‌کنیم.

آقا اجازه! از کجا می‌تونیم مطمئن بشیم که عمل تقسیم رو درست انجام دادیم؟

بچه‌ها! برای این‌که مطمئن بشیم تقسیم رو درست انجام دادیم، می‌تونیم مثل تقسیم اعداد بر هم، از رابطه تقسیم استفاده کنیم:

$$\text{باقی‌مانده} + \text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم‌علیه} = \text{مقسوم}$$

مثلاً برای اثبات درستی تقسیم مثال قبل داریم:

$$-4x^3 + 2x + 25 = (-x+2)(4x^2 + 8x + 14) + (-3) = -4x^3 - 8x^2 - 14x + 8x^2 + 16x + 28 + (-3) = -4x^3 + 2x + 25$$

هالا فیالتون راحت شد که تقسیم رو درست انجام دادیم!

مثال اگر در تقسیم عبارت $x^2 - 6x + a$ بر $x - 2$ ، خارج قسمت برابر $x - 4$ و باقی‌مانده برابر -1 باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ برای حل این سؤال کافی است رابطه تقسیم را بنویسیم و هر یک از اجزای آن را با توجه به اطلاعات مسئله جای گذاری کنیم و عبارت‌های به دست آمده را ساده کنیم تا a به دست بیاید:

$$\text{باقی‌مانده} + \text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم‌علیه} = \text{مقسوم}$$

$$x^2 - 6x + a = (x-2) \times (x-4) + (-1) \Rightarrow x^2 - 6x + a = x^2 - 6x + 8 + (-1) \Rightarrow x^2 - 6x + a = x^2 - 6x + 7 \Rightarrow a = 7$$

نکته اگر باقی‌مانده تقسیم دو چندجمله‌ای بر هم، برابر صفر شود، می‌گوییم آن دو چندجمله‌ای بر هم بخش پذیر هستند.

مثال مقدار a را به گونه‌ای مشخص کنید که عبارت $3x^2 - 2x + a$ بر $x - 1$ بخش پذیر باشد.

پاسخ با توجه به نکته بالا، برای این‌که دو عبارت بر هم بخش پذیر باشند، باقی‌مانده تقسیم

آن‌ها بر هم باید صفر شود، بنابراین داریم:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x + a \quad | \quad x - 1 \\ -(3x^2 - 3x) \quad \quad 3x + 1 \\ \hline x + a \\ -(x - 1) \\ \hline a + 1 \end{array}$$

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

حالا باقی‌مانده تقسیم را برابر صفر قرار می‌دهیم:

• به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم دو چندجمله‌ای بدون انجام تقسیم

شاید برایتان جالب باشد بدانید که می‌توان باقی‌مانده تقسیم دو چندجمله‌ای بر هم را بدون انجام عملیات تقسیم مشخص کرد. برای انجام این کار از رابطه دوست‌داشتنی تقسیم استفاده می‌کنیم.

برای مثال فرض کنید می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم $3x^3 + 5x^2 - 1$ را بر $x - 2$ به دست بیاوریم. اگر خارج قسمت را با حرف Q و باقی‌مانده را با حرف R نشان دهیم، رابطه این تقسیم به صورت مقابل نوشته خواهد شد:

$$3x^3 + 5x^2 - 1 = (x-2) \times Q + R$$

حالا اگر به جای x ، عدد ۲ را که باعث صفر شدن مقسوم‌علیه می‌شود، قرار دهیم، تساوی بالا به فرم زیر درمی‌آید:

$$3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 1 = \underbrace{(2-2)}_0 \times Q + R \Rightarrow \underbrace{3 \times 8 + 5 \times 4 - 1}_{43} = 0 + R \Rightarrow 43 = R$$

همان‌طور که می‌بینید بدون انجام عمل تقسیم و فقط با قراردادن عددی در مقسوم به جای متغیر که باعث صفر شدن مقسوم‌علیه می‌شود، مقدار باقی‌مانده (یا همون R همون) را به دست آوردیم.

نتیجه برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم دو چندجمله‌ای بدون انجام عمل تقسیم، کافی است به جای متغیر، مقداری که باعث صفر شدن مقسوم‌علیه می‌شود را در مقسوم قرار دهیم. حاصل به دست آمده برابر باقی‌مانده است.

مثال باقی‌مانده تقسیم $4x^2 + x - 5$ را بر $x + 2$ به دست آورید.

پاسخ با توجه به نتیجه بالا داریم: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = 4 \times (-2)^2 + (-2) - 5 = 4 \times 4 - 2 - 5 = 16 - 7 = 9$

پرسش‌های تشریحی

۲۶ تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

۱ $\frac{-3x^2y^4z^5}{24x^2y^2z^6}$

۲ $\frac{3x^2y + 12ay^2 - 15axy^3}{3y^2}$

۳ $\frac{32y^5 - 16y^4 + 8y^3 - 4y^2}{-2y}$

۲۷ تقسیم‌های زیر را انجام داده و در هر قسمت، خارج قسمت و باقی‌مانده را تعیین کنید.

۱ $3x^2 - 9x - 18 \mid x - 3$

۲ $3x^2 - 13x - 88 \mid x - 8$

۳ $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \mid x + 1$

۴ $x^3 - 64 \mid x + 3$

۵ $5x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \mid x^2 + 1$

۶ $10x^4 - 5x^3 + x^2 - 4 \mid x^2 - x + 2$

۷ $3x^5 + 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 5x - 6 \mid x - 2$

۲۸ در تقسیم عبارت گویای P بر $x^2 - x + 1$ ، خارج قسمت برابر $2x - 3$ و باقی‌مانده برابر $2x + 3$ شده است. عبارت گویای P را پیدا کنید.

۲۹ می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم عبارت $4x^2 + x - 3$ بر $x + 2$ با باقی‌مانده تقسیم عبارت P بر $x - 3$ برابر است. اگر خارج قسمت تقسیم

P بر $x - 3$ برابر $2x + 1$ باشد، آن‌گاه عبارت P را به دست آورید.

۳۰ اگر بدانیم عبارت $A = 6x^2 + 11x + 1 + 6x$ بر $2x + 1$ بخش پذیر است، آن‌گاه دو عبارت گویای دیگر پیدا کنید که A بر آن‌ها بخش پذیر باشد.

۳۱ حجم یک مکعب مستطیل به طول $2x + 2$ و عرض $2x + 1$ برابر $24x^3 + 46x^2 + 29x + 6$ شده است. ارتفاع این مکعب مستطیل

چه قدر است؟ (برحسب عبارت گویای جبری)

۳۲ اگر عدد ۱ ریشه معادله $2x^3 + 7x^2 + x - 10 = 0$ باشد، آن‌گاه دو ریشه دیگر برای این معادله پیدا کنید.

۳۳ چه عددی از عبارت $x^3 + 2x + 27$ کم کنیم تا عبارت جدید بر $x + 3$ بخش پذیر شود؟

۳۴ اگر چند جمله‌ای $A = x^4 + 2x^2 + 3x^3 - ax + 1$ بر $x + 2$ بخش پذیر باشد، آن‌گاه مقدار عددی a چند است؟

۳۵ اگر بدانیم دو عبارت $x^2 + 2x^2 - 5x + a$ و $x^2 + ax - 5$ در تقسیم بر $x - 3$ هم باقی‌مانده هستند، آن‌گاه مقدار عددی a چه قدر است؟

۳۶ اگر عبارت $A = 2x^3 + ax^2 - bx + 1$ هم بر $x + 1$ و هم بر $x - 3$ بخش پذیر باشد، آن‌گاه مقادیر عددی a و b را بیابید.

۳۷ اگر عبارت $x^2 + 2x^2 - ax + b$ بر $x - 3$ بخش پذیر بوده و در تقسیم به $x + 3$ به باقی‌مانده ۵ برسد، آن‌گاه مقادیر عددی a و b را پیدا کنید.

۳۸ اگر بدانیم عبارت $x^3 - x^2y + 2xy^2 - 2y^3 + 2a - 6$ بر $x - y$ بخش پذیر است، آن‌گاه مقدار عددی a چه قدر است؟

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۶۴ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $-x^2 - 12 + 8x$ بر عبارت $x + 3$ ، برابر است با:

(۲) -۹

(۱) $-33x - 12$

(۴) -۱۵

(۳) $4x + 3$

۶۵ خارج قسمت تقسیم $x^2 + 5x^2 + 7$ بر $3x - 6$ کدام است؟

(۲) $\frac{x^2}{3} - x - \frac{2}{3}$

(۱) $\frac{x^2}{2} - 7x + \frac{14}{3}$

(۴) $\frac{x^2}{3} + \frac{7x}{3} + \frac{14}{3}$

(۳) $\frac{x^2}{3} - \frac{7x}{3} - \frac{14}{3}$

باقی مانده تقسیم مقابل، کدام است؟

$$(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 3x - 4) \div (x+1)(x^2 - 16)$$

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۶
- (نمونه دولتی - اردبیل - ۹۷ - ۹۶)

در تقسیم چندجمله‌ای P بر عبارت $x^2 + 1$ ، به خارج قسمت $x^2 - x + 2$ و باقی مانده $x - 3$ رسیده‌ایم. در این صورت حاصل جمع ضرایب عددی جملات P برابر است با:

- (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) ۴

در تقسیم $x^2 - x + a$ بر $x - a$ ، خارج قسمت، $x + 2$ و باقی مانده، $3a$ شده است. مقدار a کدام است؟ (نمونه دولتی - مازندران - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) -۴

اگر خارج قسمت تقسیم $x^2 - 7x + b$ بر $x + a$ برابر $x - 2$ و باقی مانده ۵ باشد، مقادیر a و b برابر است با:

- (۱) $a = 15, b = -15$ (۲) $a = 15, b = -5$ (۳) $a = -5, b = 15$ (۴) $a = -5, b = -15$
- (نمونه دولتی - آذربایجان شرقی - ۹۷ - ۹۶)

اگر عبارت $(2m + n)x + (3n + 7m)x^2 + 8x - 8$ بخش پذیر بوده و دارای خارج قسمت $x + 2$ باشد، آن گاه حاصل عددی $mn + 2$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) -۲۰ (۲) -۱۸ (۳) -۱۶ (۴) -۱۴

اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $6 + 3x^2 - 2x^3$ بر $x^2 - 5$ برابر $ax + b$ باشد، مقدار عددی ba برابر است با:

- (۱) ۹۰ (۲) -۹۰ (۳) ۱۰ (۴) -۹
- (نمونه دولتی - فارس - ۹۷ - ۹۶)

اگر باقی مانده تقسیم عبارت $5 + 7x^2 - 2x^3$ بر عبارت $x^2 - 8$ برابر $ax + b$ باشد، حاصل $3a + b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴) -۳
- (نمونه دولتی - البرز - ۹۷ - ۹۶)

اگر باقی مانده تقسیم $a + 5x - 2x^2$ بر $x - 2$ برابر ۵ باشد، a چه قدر است؟ (نمونه دولتی - زنجان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) -۵ (۴) -۷

باقی مانده تقسیم $a + 4x + 10x^2 + 4x^3$ بر $2x + 2$ برابر -۷ است. مقدار a برابر کدام گزینه زیر است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۷ (۴) -۹
- (نمونه دولتی - گلستان - ۹۷ - ۹۶)

اگر باقی مانده تقسیم $4 + 5x - 2x^2$ بر $x^2 + 3x$ برابر $ax + b$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟ (نمونه دولتی - سمنان - ۹۷ - ۹۶)

- (۱) -۴۰ (۲) -۵۵ (۳) -۴۹ (۴) -۴۵

اگر چندجمله‌ای $a + 10x - 23x^2 + 20x^3$ بر $4x + 3$ بخش پذیر باشد، مقدار a کدام است؟ $(x \neq \frac{-3}{4})$ (نمونه دولتی - ۹۶ - ۹۵)

- (۱) ۱۲ (۲) -۱۲ (۳) ۲۴ (۴) -۲۴

اگر باقی مانده تقسیم دو عبارت $a + 10x - 23x^2 + 20x^3$ و $9 + 9x - 2x^2$ بر عبارت $x - 1$ یکسان باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۳۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳۱
- (نمونه دولتی - فارس - ۹۶ - ۹۵)

اگر باقی مانده تقسیم $b + ax^2 + 3x^4$ بر $x + 1$ و بر $x - 2$ برابر -۲ باشد، مقدار $(a - b)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) $\frac{1}{30}$ (۳) -۳۰ (۴) $-\frac{1}{30}$
- (نمونه دولتی - تهران - ۹۷ - ۹۶)

۷۹ اگر عبارت $x^2 + ax^2 - bx + 4$ بر عبارت‌های $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم $ax^2 + bx + 5$ بر $x - a(b - 1)$ چه قدر است؟

- (۱) ۲۷
(۲) -۲۷
(۳) -۲۲
(۴) ۲۲

۸۰ مساحت یک مثلث $3x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ و قاعده آن برابر $3x - 2$ است. ارتفاع مثلث کدام می‌باشد؟

- (۱) $x + \frac{1}{2}$
(۲) $2x + 1$
(۳) $2x - 1$
(۴) $x - \frac{1}{2}$
(نمونه دولتی - سیستان و بلوچستان - ۹۶ - ۹۷)

۸۱ چند جمله‌ای $5x^4 + 13x^2 + a$ ، مساحت مستطیلی است که عرض آن $x^2 + 2$ می‌باشد. کدام گزینه، مقدار a است؟

- (۱) ۶
(۲) -۶
(۳) ۸
(۴) -۸
(فراسان رضوی - نمونه دولتی - ۹۶ - ۹۷)

۸۲ حجم مکعب مستطیلی به طول $x + 5$ و عرض $x + 1$ برابر $2x^3 + 11x^2 + 4x - 5$ است. به ازای کدام مقدار عددی x ، ارتفاع این مکعب مستطیل نصف طول آن خواهد بود؟

- (۱) $\frac{7}{3}$
(۲) $\frac{7}{4}$
(۳) $\frac{7}{5}$
(۴) $\frac{7}{6}$

۸۳ می‌دانیم معادله $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ سه ریشه دارد. اگر یکی از ریشه‌ها برابر ۱ باشد، آن گاه حاصل جمع دو ریشه دیگر چه قدر است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) -۱
(۴) -۴

۸۴ اگر باقی مانده تقسیم عبارت $mx + n + (95x - 94)^{2016} + (96x - 95)^{2017} + (97x - 96)^{2018}$ بر $x - 1$ برابر ۶ باشد، آن گاه مقدار عددی $m + n$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۸۵ اگر عبارت $A = mx^{1397} + nx^{2018} + 2x - 5$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد، آن گاه حاصل mn برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) +۱۰
(۲) -۱۰
(۳) ۵
(۴) -۵

۸۶ اگر عبارت $A = (2x + 1)^{98} + (3 - 14x)^m$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، آن گاه مقدار عددی m برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) ۴۳
(۲) ۴۷
(۳) ۴۵
(۴) ۴۹

۸۷ اگر باقی مانده تقسیم عبارت $4x^2 - 17x - 8$ بر $x - m$ برابر ۷ باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم همین عبارت بر $x - 2m$ برابر است با: ($m > 0$)

- (۱) ۱۱۰
(۲) ۲۲۰
(۳) ۲۲۲
(۴) ۱۱۱

۸۸ اگر عبارت $A = 2x^2 + my^2 + xy - 4x + 4y$ بر $x - y$ بخش پذیر باشد، آن گاه حاصل جمع ضرایب عددی x و y در خارج قسمت تقسیم A بر $x - y$ برابر کدام گزینه است؟ ($x, y \neq 0$)

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) ۵
(۴) -۱

۸۹ اگر حاصل عبارت $A = \frac{x^3 + x^2 - 4x + 2a}{x + 1}$ به ازای هر مقدار صحیح x ($x \neq -1$) برابر عددی صحیح شود، آن گاه مقدار عددی a برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) -۴



پاسخ ۴

کافیست در هر مورد ریشه‌های مخرج را پیدا کنیم.

$$x = 0$$

۱

همواره تعریف شده است.

۲

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

۳

۴

$$(x-3)(2x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ 2x+7=0 \Rightarrow 2x=-7 \\ \Rightarrow x=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| = 3$$

۵

$$\Rightarrow x = +3 \text{ یا } x = -3$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-2) = 0$$

۶

$$\Rightarrow \begin{cases} x+7=0 \Rightarrow x=-7 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$$(4x^2 - 16)(x^2 + 6x + 9) = 0$$

۷

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 16 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| = 2 \\ \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2 \\ x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x+3)^2 = 0 \\ \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

ابتدا عبارت $2x^2 - 9x - 5$ را تجزیه می‌کنیم.

۸

$$A = 2x^2 - 9x - 5 \Rightarrow 2A = (2x)^2 - 9(2x) - 10$$

$$\Rightarrow 2A = (2x-10)(2x+1) \Rightarrow 2A = 2(x-5)(2x+1)$$

$$\Rightarrow A = (x-5)(2x+1)$$

حالا با توجه به تجزیه به دست آمده، کافیست ریشه‌های عبارت زیر را به دست آوریم:

$$(2x^2 - 9x - 5)(x^3 - 8) = (x-5)(2x+1)(x^3 - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ 2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \\ x^3-8=0 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x^3=2^3 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

دقت کنید که x^4 همواره نامنفی است، پس $x^4 + 2$ هم

۹

حتماً نامنفی و بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است، یعنی هیچ وقت نمی‌تواند برابر صفر شود، یعنی عبارت مخرج ریشه ندارد؛ در نتیجه کل عبارت داده‌شده به ازای همه مقادیر تعریف شده است.

پاسخ پرسش‌های تشریحی

پاسخ ۱

عبارت گویا است.

۱

گویا نیست. چون زیر رادیکال متغیر وجود دارد.

۲

دقت کنید که $3x - 9 = 3(x - 3)$ ، پس داریم:

۳

$$\frac{8\sqrt{x-3}}{6\sqrt{3x-9}} = \frac{8\sqrt{x-3}}{6\sqrt{3(x-3)}} = \frac{8\sqrt{x-3}}{6\sqrt{3}\sqrt{x-3}} = \frac{8}{6\sqrt{3}}$$

پس عبارت موردنظر گویا است.

گویا نیست. چون شامل قدرمطلق است.

۴

به کمک ساده‌سازی عبارت‌ها داریم:

۵

$$\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{y^2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = 1$$

پس عبارت گویاست.

ابتدا عبارت را ساده‌سازی می‌کنیم.

۶

$$\frac{|\frac{5x-2y-6}{12+4y-10x}| + \frac{\sqrt{2}}{x-y}}{|\frac{5x-2y-6}{-2(-6-2y+5x)}| + \frac{\sqrt{2}}{x-y}} = \frac{|\frac{5x-2y-6}{-2||5x-2y-6||} + \frac{\sqrt{2}}{x-y}}{|\frac{5x-2y-6}{-2||5x-2y-6||} + \frac{\sqrt{2}}{x-y}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{x-y}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{x-y}}$$

پس عبارت گویا است.

می‌دانیم $\sqrt{5x^2} = \sqrt{5}|x|$ ، پس عبارت موردنظر گویا نیست.

۷

پاسخ ۲

در عبارت داده‌شده به جای x مقدار عددی ۲ را قرار داده و حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$x=2 \Rightarrow A = \frac{9(2)^2 + 3(2) - 6}{(2-3)(2(2)^2 - 11)} = \frac{9 \times 4 + 6 - 6}{(-1)(8-11)} = \frac{36}{(-1)(-3)} = \frac{36}{+3} = 12$$

پاسخ ۳

چون $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = 2$ ، در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{2} = 2 &\Rightarrow a = 4 \\ \frac{b}{3} = 2 &\Rightarrow b = 6 \\ \frac{c}{4} = 2 &\Rightarrow c = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab + 2ac - 2bc}$$

$$= \frac{(4)^2 + (6)^2 - (8)^2}{2(4)(6) + 2(4)(8) - 2(6)(8)} = \frac{16 + 36 - 64}{48 + 64 - 96} = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$$

۲ با قراردادن مقادیر ۸ و -۲ به جای x در عبارت مخرج و حل دستگاه دو معادله، مقدارهای c و d به دست می‌آیند. اما ما در این جا از روش دیگری برای پیدا کردن این مقادیر استفاده می‌کنیم. اگر m و n ریشه‌های عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ باشند، آن‌گاه رابطه روبه‌رو برقرار است:

$$a(x-m)(x-n) = ax^2 + bx + c$$

پس با توجه به نکته مطرح شده باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} 3x^2 + cx - d &= 3(x+2)(x-8) \\ \Rightarrow 3x^2 + cx - d &= 3(x^2 - 6x - 16) \\ \Rightarrow 3x^2 + cx - d &= 3x^2 - 18x - 48 \\ \Rightarrow \begin{cases} c = -18 \\ -d = -48 \Rightarrow d = 48 \end{cases} \end{aligned}$$

۳ اگر m ریشه عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ باشد، آن‌گاه رابطه مقابل برقرار است:

$$ax^2 + bx + c = a(x-m)^2$$

بنابراین چون عبارت $5x^2 + ex + f$ فقط شامل ریشه -۲ است، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} 5x^2 + ex + f &= 5(x - (-2))^2 \\ \Rightarrow 5x^2 + ex + f &= 5(x^2 + 4x + 4) \\ \Rightarrow 5x^2 + ex + f &= 5x^2 + 20x + 20 \Rightarrow \begin{cases} e = 20 \\ f = 20 \end{cases} \end{aligned}$$

پاسخ ۷

در هر یک از موارد، در صورت امکان صورت و مخرج را با هم ساده کرده و حاصل را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3x-2}{2-3x} = \frac{3x-2}{-1(-2+3x)} = \frac{3x-2}{-(3x-2)} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \text{۱}$$

$$\frac{4y+1}{4y-1} \quad \text{۲}$$

ساده نمی‌شود، پس لزوماً حاصل عبارت برابر با عدد نیست.

$$\frac{2x-3}{-4x+6} = \frac{2x-3}{-2(2x-3)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \quad \text{۳}$$

$$\frac{a-b-c}{b-a-c} \quad \text{۴}$$

ساده نمی‌شود، چون صورت و مخرج مضربی از هم نیستند.

$$\frac{x+2y-3z}{12z-8y-4x} = \frac{x+2y-3z}{-4(-3z+2y+x)} \quad \text{۵}$$

$$= \frac{x+2y-3z}{-4(x+2y-3z)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

پاسخ ۸

صورت و مخرج تمام عبارت‌های ۱ تا ۴ را در (-۱) ضرب می‌کنیم. در این صورت تمام عبارت‌های سمت راست به دست می‌آیند. نهایتاً آن‌هایی که با هم برابرند را به هم وصل می‌کنیم.

۱ به (ب) وصل می‌شود.

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{-1(x+3)}{-1(x-2)} = \frac{-x-3}{-x+2} = \frac{-3-x}{2-x}$$

۱۰ کفایست ریشه مخرج تک تک عبارت‌های داده شده را محاسبه کنیم، پس داریم:

$$I) x = 0 \quad II) (x^2 + 1)(x^2 - 10x + 21) = 0, \quad III) 3x^2 - 27 = 0$$

$$II) \begin{cases} x^2 + 1 = 0 & (\text{امکان پذیر نیست!}) \\ x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-7) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x-7 = 0 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

$$III) 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

۱۱ ابتدا ریشه‌های مخرج دو کسر $\frac{5x-3}{x^2+2x^2+x}$ و $\frac{x}{x^2-9}$ را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| = 3$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -3$$

$$x^2 + 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow x(x+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

حالا توجه کنید چون عبارت اول بر عبارت دوم تقسیم شده و هیچ عبارتی نمی‌تواند بر صفر تقسیم شود، پس صورت کسر دوم نیز نمی‌تواند برابر صفر شود و اگر برابر صفر باشد، در این صورت حاصل باز هم تعریف نشده خواهد بود؛ بنابراین ریشه صورت کسر دوم هم جزء پاسخ ما است، پس داریم:

$$5x - 3 = 0 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

پاسخ ۵

حاصل مخرج به ازای $x=1$ برابر با صفر است، پس داریم:

$$2x^2 - 6x + a = 0 \xrightarrow{x=1} 2(1)^2 - 6(1) + a = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 6 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

پاسخ ۶

۱ روش اول اعداد ۵ و -۱، مخرج را صفر می‌کنند، پس داریم:

$$\begin{cases} (-1)^2 - (-1) \times a + b = 0 \\ 5^2 - 5a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ -5a + b = -25 \end{cases} \times (-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 5a - b = 25 \end{cases} \Rightarrow 6a = 24 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow 4 + b = -1 \Rightarrow b = -5$$

روش دوم اگر a و b ریشه‌های عبارت درجه دوم $x^2 + cx + d$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$x^2 + cx + d = (x-a)(x-b)$$

پس با توجه به نکته مطرح شده به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x^2 - ax + b = (x - (-1))(x - 5)$$

$$\Rightarrow x^2 - ax + b = (x+1)(x-5)$$

$$\Rightarrow x^2 - ax + b = x^2 - 4x - 5 \Rightarrow \begin{cases} -a = -4 \Rightarrow a = 4 \\ b = -5 \end{cases}$$

۲ به (ت) وصل می‌شود.

$$\frac{x-3}{x-2} = \frac{-1(x-3)}{-1(x-2)} = \frac{-x+3}{-x+2} = \frac{3-x}{2-x}$$

۳ به (الف) وصل می‌شود.

$$\frac{x+2}{x+3} = \frac{-1(x+2)}{-1(x+3)} = \frac{-x-2}{-x-3}$$

۴ به (پ) وصل می‌شود.

$$\frac{x-3}{x+2} = \frac{-1(x-3)}{-1(x+2)} = \frac{-x+3}{-x-2} = \frac{3-x}{-2-x}$$

پاسخ ۹

۱ این عبارت با عبارت داده‌شده برابر نیست. چون y باید هم در k ضرب شود و هم در p تا عبارت $ky - py$ حاصل شود. (داخل پرانتز) برابر است، چون داریم:

$$\frac{xy(k-p)}{p} = \frac{y}{p} \times x(k-p) = \frac{y}{p} \times (kx - px)$$

۳ برابر نیستند، چون نمی‌توان p در مخرج را با p عبارت $ky - p$ ساده کرده و به جای آن عدد ۱ را قرار دهیم.

۴ برابر است، چون داریم:

$$\frac{xy(k-p)}{p} = \frac{x(ky - py)}{p} = x \left(\frac{ky}{p} - \frac{py}{p} \right) = x \left(\frac{ky}{p} - y \right)$$

پاسخ ۱۰

در هر قسمت به کمک فاکتورگیری و تجزیه، حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{24x^2}{18x^6} = \frac{4}{3x^4}$$

$$\frac{16a^2 b^4 c^2}{36a^2 b^2 c^2} = \frac{4a}{9bc^2}$$

$$\frac{y-c}{c-y} = \frac{y-c}{-1(-c+y)} = \frac{y-c}{-1(y-c)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\frac{a-ax}{a} = \frac{a(1-x)}{a} = 1-x$$

$$\frac{3x-2}{12-18x} = \frac{3x-2}{6(2-3x)} = \frac{3x-2}{-6(-2+3x)}$$

$$= \frac{3x-2}{-6(3x-2)} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{16x^2}{8x^2-4x} = \frac{16x^2}{4x(2x-1)} = \frac{4x}{2x-1}$$

$$\frac{6x^2+9x}{3x^2+15x} = \frac{3x(2x+3)}{3x(x+5)} = \frac{2x+3}{x+5}$$

$$\frac{x^2-25}{2x+10} = \frac{x^2-5^2}{2x+10} = \frac{(x-5)(x+5)}{2(x+5)} = \frac{x-5}{2}$$

۹

$$\frac{36x^2-25y^2}{15y-18x} = \frac{(6x)^2-(5y)^2}{3(5y-6x)} = \frac{(6x-5y)(6x+5y)}{-3(-5y+6x)}$$

$$= \frac{(6x-5y)(6x+5y)}{-3(6x-5y)} = \frac{6x+5y}{-3} = -\frac{6x+5y}{3}$$

۱۰

$$\frac{64-t^6}{t^3-8} = \frac{2^6-t^6}{t^3-2^3} = \frac{(2^2)^3-(t^2)^3}{t^3-2^3} = \frac{(\lambda-t^2)(\lambda+t^2)}{-1(-t^3+8)}$$

$$= \frac{(\lambda-t^2)(\lambda+t^2)}{-(\lambda-t^3)} = \frac{(\lambda+t^2)}{-1} = -(\lambda+t^2) = -8-t^3$$

۱۱

$$\frac{5-x}{x^2-2x-15} = \frac{5-x}{x^2+(-5+3)x+((-5)(3))}$$

$$= \frac{5-x}{(x-5)(x+3)} = \frac{-1(-5+x)}{(x-5)(x+3)} = \frac{-(x-5)}{(x-5)(x+3)}$$

$$= \frac{-1}{x+3}$$

۱۲

$$\frac{x^2+13x^2+42x^2}{x^2+6x^2} = \frac{x^2(x^2+13x+42)}{x^2(x+6)}$$

$$= \frac{x^2+(6+7)x+(6)(7)}{x+6} = \frac{(x+6)(x+7)}{(x+6)} = x+7$$

۱۳ ابتدا عبارت داده‌شده در صورت را به کمک روش A تجزیه می‌کنیم:

$$A = 6x^2 + 7x + 2 \Rightarrow 6A = (6x)^2 + 7(6x) + 12$$

$$\Rightarrow 6A = (6x+3)(6x+4) \Rightarrow 6A = 3(2x+1)2(3x+2)$$

$$\Rightarrow 6A = 6(2x+1)(3x+2) \Rightarrow A = (2x+1)(3x+2)$$

$$\Rightarrow \frac{6x^2+7x+2}{2x+1} = \frac{(2x+1)(3x+2)}{2x+1} = 3x+2$$

۱۴ ابتدا صورت و مخرج را به کمک روش A تجزیه می‌کنیم:

$$A = 3x^2 + 5x - 2 \Rightarrow 3A = (3x)^2 + 5(3x) - 6$$

$$\Rightarrow 3A = (3x+6)(3x-1) \Rightarrow 3A = 3(x+2)(3x-1)$$

$$\Rightarrow A = (x+2)(3x-1)$$

$$B = 12x^2 + 5x - 3 \Rightarrow 12B = (12x)^2 + 5(12x) - 36$$

$$\Rightarrow 12B = (12x+9)(12x-4)$$

$$\Rightarrow 12B = 3(4x+3) \cdot 4(3x-1) \Rightarrow B = (4x+3)(3x-1)$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+5x-2}{12x^2+5x-3} = \frac{(x+2)(3x-1)}{(4x+3)(3x-1)} = \frac{x+2}{4x+3}$$

۱۵ عبارت‌های صورت و مخرج را به صورت زیر نوشته و نهایتاً با هم ساده می‌کنیم:

$$3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2) = 3(x^2 - 1 + x - 1)$$

$$= 3((x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1))$$

$$= 3((x-1)(x^2 + x + 1 + 1)) = 3(x-1)(x^2 + x + 2)$$



$$\frac{x^2y - y^2x}{y} \times \frac{6xy}{(x-y)^2} = \frac{xy(x-y)}{y} \times \frac{6xy}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{6x^2y}{x-y}$$

۳

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x+2} \div \frac{x+3}{x-4} = \frac{x^2 + (2+3)x + (2)(3)}{x+2} \times \frac{x-4}{x+3}$$

$$= \frac{(x+3)(x+2)}{x+2} \times \frac{x-4}{x+3} = x-4$$

۴

$$\frac{x^2}{x-4} \times \frac{x^2(-4-9)x + (-4)(-9)}{x}$$

$$= \frac{x^2}{x-4} \times \frac{(x-4)(x-9)}{x} = x(x-9)$$

۵

$$\frac{x+2}{x^2 + (11+3)x + (11)(3)} \times \frac{x+11}{x+2}$$

$$= \frac{1}{(x+3)(x+11)} \times \frac{x+11}{1} = \frac{1}{x+3}$$

۶

$$\frac{x^2 + (-7+1)x + (-7)(+1)}{x(x-6)} \div \frac{x^2 + (10+1)x + (10)(1)}{x-6}$$

$$= \frac{(x-7)(x+1)}{x(x-6)} \times \frac{x-6}{(x+10)(x+1)} = \frac{(x-7)}{x(x+10)}$$

۷

$$\frac{x+4}{x^2 + (2 \times 4)x + 4^2} \times \frac{x^2 + (4+5)x + (4)(5)}{x^2 + (6+5)x + (6)(5)}$$

$$= \frac{x+4}{(x+4)^2} \times \frac{(x+4)(x+5)}{(x+6)(x+5)} = \frac{1}{x+6}$$

۸

$$\frac{1-b^2}{1+b} \div \frac{b^2-49}{b-7} = \frac{(1-b)(1+b)}{1+b} \times \frac{b-7}{b^2-(7)^2}$$

$$= \frac{(1-b)(1+b)}{1+b} \times \frac{-1(-7+b)}{(b-7)(b+7)}$$

۹

$$= \frac{1-b}{1} \times \frac{-(b-7)}{(b-7)(b+7)} = \frac{(1-b) \times (-1)}{b+7} = -\frac{(1-b)}{b+7}$$

۱۰ ابتدا عبارت $3x^2 - 8x - 3$ را به کمک روش A تجزیه می‌کنیم:

$$A = 3x^2 - 8x - 3 \Rightarrow 2A = (3x)^2 - 8(3x) - 9$$

$$\Rightarrow 2A = (3x-9)(3x+1) \Rightarrow 2A = 2(x-3)(3x+1)$$

$$\Rightarrow A = (x-3)(3x+1)$$

پس داریم:

$$\frac{x^2 + 2(-5)x + (-5)^2}{3xy(x-5)} \times \frac{x^2 + (-3-5)x + (-3)(-5)}{(x-3)(3x+1)}$$

$$= \frac{(x-5)^2}{3xy(x-5)} \times \frac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(3x+1)} = \frac{(x-5)^2}{3xy(3x+1)}$$

$$2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2) = 2(x^2 - 1 + x - 1)$$

$$= 2((x-1)(x+1) + (x-1)) = 2((x-1)((x+1)+1))$$

$$= 2((x-1)(x+2))$$

$$\Rightarrow \frac{2(x-1)(x^2+x+2)}{2(x-1)(x+2)} = \frac{2(x^2+x+2)}{2(x+2)}$$

پاسخ ۱۱

به کمک تجزیه و اتحادها و البته طرفین وسطین کردن، حاصل عبارت‌هایی که باید در جاهای خالی قرار بگیرند را به دست می‌آوریم.

$$\frac{5x-2}{6} = \frac{1}{6} \times A \Rightarrow A = 5x-2$$

۱

$$\frac{(2x-1) \times B}{(3x-1)(2x-1)} = 5+x \Rightarrow \frac{B}{3x-1} = 5+x$$

۲

$$\Rightarrow B = (5+x)(3x-1) \Rightarrow B = 3x^2 + 14x - 5$$

۳

$$\frac{2x+3}{x-2} = \frac{C}{x^2 + 5x - 14} \Rightarrow \frac{2x+3}{x-2} = \frac{C}{(x+7)(x-2)}$$

$$\Rightarrow (2x+3)(x+7) = C \Rightarrow C = 2x^2 + 17x + 21$$

$$\frac{x^2 + 12x + 27}{D} = \frac{x + 18x + 81}{x+6}$$

۴

$$\Rightarrow \frac{(x+3)(x+9)}{D} = \frac{(x+9)^2}{x+6} \Rightarrow \frac{x+3}{D} = \frac{x+9}{x+6}$$

$$\Rightarrow D(x+9) = (x+3)(x+6) \Rightarrow D = \frac{x^2 + 9x + 18}{x+9}$$

$$\frac{x^2 - 16}{E} = \frac{x^2 + 12x + 32}{x^2 + 4x - 32}$$

۵

$$\Rightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{E} = \frac{(x+4)(x+8)}{(x+8)(x-4)}$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{E} = \frac{1}{x-4} \Rightarrow E = (x-4)^2 \Rightarrow E = x^2 + 16 - 8x$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 + 3x^2y + 3xy^2 + y^2} = \frac{F}{x+y}$$

۶

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2} = \frac{F}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{F}{x+y} \Rightarrow F = 1$$

پاسخ ۱۲

به کمک تجزیه و فاکتورگیری، حاصل عبارت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5x^2y^2}{36x^2z^2} \times \frac{9z^2}{20y^2} = \frac{z^2}{4x \times 4} = \frac{z^2}{16x}$$

۱

$$\frac{8x^6}{5x^4y^2} \div \frac{4x^2}{15y^2} = \frac{8x^6}{5x^4y^2} \times \frac{15y^2}{4x^2} = \frac{2 \times 3}{y} = \frac{6}{y}$$

۲

پاسخ ۱۴

۱ فرض کنید عبارت مورد نظر A باشد. در این صورت باید داشته باشیم:

$$A \times \frac{x-1}{x+3} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\xrightarrow{\times(x+3)} A \times (x-1) = \frac{x+2}{x-1} \times (x+3)$$

$$\xrightarrow{\div(x-1)} A = \frac{x+2}{x-1} \times \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow A = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 2x + 1}$$

۲ فرض کنید عبارت مورد نظر B باشد، پس باید داشته باشیم:

$$B \div \frac{x-3}{6x^2 + 7x + 2} = 4x^2 + 4x + 1$$

حالا ابتدا عبارت $6x^2 + 7x + 2$ را تجزیه کرده و سپس مسئله را حل می‌کنیم:

$$A = 6x^2 + 7x + 2 \Rightarrow 6A = (6x)^2 + 7(6x) + 12$$

$$\Rightarrow 6A = (6x+3)(6x+4)$$

$$\Rightarrow 6A = 3(2x+1) \cdot 2(3x+2)$$

$$\Rightarrow A = (2x+1)(3x+2)$$

$$B \times \frac{(2x+1)(3x+2)}{x-3} = 4x^2 + 4x + 1 \quad \text{بنابراین:}$$

$$\Rightarrow B \times \frac{(2x+1)(3x+2)}{x-3} = (2x+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{B \times (3x+2)}{x-3} = (2x+1)$$

$$\Rightarrow B \times (3x+2) = (2x+1)(x-3)$$

$$\Rightarrow B = \frac{(2x+1)(x-3)}{3x+2} \Rightarrow B = \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x+2}$$

پاسخ ۱۵

۱ مساحت مستطیل برابر است با طول \times عرض؛ بنابراین داریم:

$$S = \frac{\frac{x}{3} + 1}{x^2 - 9} \times (x^2 - 6x + 9) = \frac{\frac{1}{3}(x+3)}{(x-3)(x+3)} \times \frac{(x-3)^2}{x-3}$$

$$= \frac{x-3}{3}$$

۲ ابتدا عبارت $2x^2 - 5x - 3$ را به کمک روش A تجربه می‌کنیم:

$$A = 2x^2 - 5x - 3 \Rightarrow 2A = (2x)^2 - 5(2x) - 6$$

$$\Rightarrow 2A = (2x-6)(2x+1) \Rightarrow 2A = 2(x-3)(2x+1)$$

$$\Rightarrow A = (x-3)(2x+1)$$

حالا توجه کنید مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با ارتفاع \times قاعده:

$$S = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x+1} \times \frac{2x^2 - 5x - 3}{x+1} \quad \text{پس داریم:}$$

$$= \frac{x^2 + (-3+1)x + (-3)(1)}{2x+1} \times \frac{(x-3)(2x+1)}{x+1}$$

$$= \frac{(x-3)(x+1)}{1} \times \frac{(x-3)}{x+1} = (x-3)^2$$

۱۱ ابتدا عبارت $2x^2 - 3x - 5$ را به کمک روش A تجزیه می‌کنیم:

$$A = 2x^2 - 3x - 5 \Rightarrow 2A = (2x)^2 - 3(2x) - 10$$

$$\Rightarrow 2A = (2x-5)(2x+2) \Rightarrow 2A = (2x-5) \cdot 2(x+1)$$

$$\Rightarrow A = (2x-5)(x+1)$$

$$\frac{x^2+1}{(2x-5)(x+1)} \times \frac{x(2x-5)}{x^2-x+1} \quad \text{حالا کسر را ساده می‌کنیم:}$$

$$= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} \times \frac{x}{x^2-x+1} = x$$

پاسخ ۱۳

به کمک تجزیه و اتحادها و البته طرفین‌وسطین کردن، حاصل عبارت‌هایی که باید در جای خالی قرار بگیرند را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x^2 + (4+7)x + (4)(7)}{x+7} \times \frac{x-3}{A} = 6-2x \quad 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x+4)(x+7)}{x+7} \times \frac{x-3}{A} = 6-2x$$

$$\Rightarrow \frac{(x+4)(x-3)}{A} = \frac{6-2x}{1}$$

$$\Rightarrow A(6-2x) = (x+4)(x-3)$$

$$\Rightarrow A = \frac{(x+4)(x-3)}{6-2x} = \frac{(x+4)(x-3)}{-2(-3+x)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(x+4)(x-3)}{-2(x-3)} = \frac{x+4}{-2}$$

$$\frac{(x-y)(x+y)}{B} \div \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2+xy} \quad 2$$

$$= (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)(x+y)}{B} \times \frac{x^2+y^2+xy}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y}$$

$$= (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)(x^2+y^2+xy)}{B(x-y)} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{1}$$

$$\Rightarrow B(x-y)^2(x^2+xy+y^2) = (x+y)(x^2+xy+y^2)$$

$$\Rightarrow B = \frac{x+y}{(x-y)^2} \quad 3$$

$$\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{C} \times \frac{6x(x^2-2xy+y^2)}{6x} = (x-y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x-y)^2}{C} = (x-y)^2$$

$$\Rightarrow C(x-y)^2 = (x-y)^2(x+y)(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow C = (x+y)(x^2+y^2)$$



پاسخ ۱۶

حجم هر مکعب مستطیل برابر حاصل ضرب طول، عرض و ارتفاع است، پس اگر فرض کنیم ارتفاع برابر h است، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$\frac{x+1}{x+3} \times \frac{x-1}{x+5} \times h = \frac{x^2+2x+1}{x^2-9}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x+3} \times \frac{x-1}{x+5} \times h = \frac{(x+1)^2}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+5} \times h = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{(x+1)(x+5)}{(x-3)(x-1)} \Rightarrow h = \frac{x^2+6x+5}{x^2-4x+3}$$

پاسخ ۱۷

چون طول ضلع مربع، $\frac{1}{3}$ طول مستطیل است، پس اندازه آن برابر می‌باشد با $\frac{3x+1}{3}$ ، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\text{مربع}}} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{(3x+1)(x+3)}{(3x+1) \times \frac{(3x+1)}{3}} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+3)}{\frac{(3x+1)}{3}} = \frac{9}{2} \Rightarrow 2(x+3) = \frac{9(3x+1)}{3}$$

$$\Rightarrow 2x+6 = 3x+1 \Rightarrow 3x-2x = 6-1 \Rightarrow x = 5$$

بنابراین محیط مستطیل برابر است با:

$$2(\text{طول} + \text{عرض}) = 2(3x+1+x+3) = 2(4x+4)$$

$$\stackrel{x=5}{=} 2(4 \times 5 + 4) = 48$$

پاسخ ۱۸

به کمک مخرج مشترک‌گیری (در صورت نیاز)، حاصل عبارت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{5}{x} + \frac{10}{-x} = \frac{5}{x} - \frac{10}{x} = \frac{5-10}{x} = \frac{-5}{x} = -\frac{5}{x} \quad 1$$

$$\frac{5x+6}{3x-4} + \frac{9-2x}{3x-4} = \frac{5x+6+9-2x}{3x-4} = \frac{3x+15}{3x-4} \quad 2$$

$$\frac{-3x-9}{6x+11} - \frac{3x+2}{6x+11} = \frac{-3x-9-(3x+2)}{6x+11} = \frac{-3x-9-3x-2}{6x+11} = \frac{-6x-11}{6x+11} = \frac{-(6x+11)}{6x+11} = -1 \quad 3$$

$$\frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{y-x} = \frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{-(x-y)} = \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{x-y} = \frac{x^2+y^2}{x-y} \quad 4$$

$$\frac{x+3}{x} - \frac{5x-1}{x(x+2)} = \frac{(x+3)(x+2) - (5x-1)}{x(x+2)} = \frac{x^2+5x+6-5x+1}{x^2+2x} = \frac{x^2+7}{x^2+2x} \quad 5$$

$$\frac{4x^2-12}{4x^2-9} - \frac{2x+1}{2x+3} = \frac{4x^2-12}{(2x-3)(2x+3)} - \frac{2x+1}{2x+3} \quad 6$$

$$= \frac{4x^2-12-(2x+1)(2x-3)}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{4x^2-12-(4x^2-4x-3)}{(2x-3)(2x+3)}$$

$$= \frac{4x^2-12-4x^2+4x+3}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{4x-9}{4x^2-9}$$

$$\frac{3}{2x(x+y)} + \frac{y+1}{y(x+y)^2} = \frac{3y(x+y)+2x(y+1)}{2xy(x+y)^2} \quad 7$$

$$= \frac{3xy+3y^2+2xy+2x}{2xy(x+y)^2} = \frac{3y^2+2x+5xy}{2xy(x+y)^2}$$

$$\frac{x}{x^2+5x+6} - \frac{5}{x^2+6x+8} \quad 8$$

$$= \frac{x}{(x+2)(x+3)} - \frac{5}{(x+2)(x+4)}$$

$$= \frac{x(x+4)-5(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{x^2+4x-5x-15}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{x^2-x-15}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$\frac{x^2-y^2}{x+y} - \frac{y^2-x^2}{x^2-y^2} \quad 9$$

$$= \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} - \frac{(y-x)(y^2+x^2+xy)}{(x-y)(x+y)}$$

$$= x-y + \frac{y^2+x^2+xy}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)+y^2+x^2+xy}{x+y}$$

$$= \frac{x^2-y^2+y^2+x^2+xy}{x+y} = \frac{2x^2+xy}{x+y}$$

$$\frac{9+x^2-3x}{x+3} - x-3 = \frac{9+x^2-3x}{x+3} - (x+3) \quad 10$$

$$= \frac{9+x^2-3x-(x+3)^2}{x+3} = \frac{9+x^2-3x-(x^2+6x+9)}{x+3}$$

$$= \frac{9+x^2-3x-x^2-6x-9}{x+3} = \frac{-9x}{x+3}$$

$$\frac{4x^2}{x^2-8} - \frac{1}{x-2} = \frac{4x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)} - \frac{1}{x-2} \quad 11$$

$$= \frac{4x^2-(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{4x^2-x^2-2x-4}{x^2-8}$$

$$= \frac{3x^2-2x-4}{x^2-8}$$

$$\frac{x-2}{x^2+3x^2+3x+1} - \frac{x-4}{(x^2-1)(x+1)} \quad 12$$

$$= \frac{x-2}{(x+1)^2} - \frac{x-4}{(x-1)(x+1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{A(x-2)+B(x+5)}{(x+5)(x-2)} = \frac{-x}{x^2+3x-10}$$

$$\Rightarrow A(x-2)+B(x+5)=-x \Rightarrow Ax-2A+Bx+5B=-x$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A+B)}_{-1}x + \underbrace{5B-2A}_0 = -x \Rightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ 5B-2A=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A+2B=-2 \\ 5B-2A=0 \end{cases} \Rightarrow 7B=-2 \Rightarrow B=-\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow A-\frac{2}{7}=-1 \Rightarrow A=-\frac{5}{7}$$

پس کسرهای مورد نظر به صورت $\frac{-2}{7x-14}$ و $\frac{-5}{7x+35}$ هستند.

۳ به کمک مخرج مشترک‌گیری، مقدارهای A و B را به دست می‌آوریم:

$$\frac{A}{x-1} - \frac{Bx+1}{2x^2-2} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{A}{x-1} - \frac{Bx+1}{2(x^2-1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x-1} - \frac{Bx+1}{2(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{A \times 2(x+1) - (Bx+1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2A(x+1) - Bx - 1}{2x-2} = 1 \Rightarrow 2Ax + 2A - Bx - 1 = 2x - 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2A-B)}_x + \underbrace{2A-1}_{-1} = 2x - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A-B=2 \\ 2A-1=-2 \Rightarrow 2A=-1 \Rightarrow A=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(-\frac{1}{2}) - B = 2 \Rightarrow -1 - B = 2 \Rightarrow -B = 3 \Rightarrow B = -3$$

پاسخ ۲۱

۱ محیط متوازی‌الاضلاع به طول ضلع‌های a و b برابر است با

۲(a+b)؛ پس داریم:

$$\text{محیط} = 2 \left(\frac{x+1}{3x+4y} + \frac{-4y+3x+xy+3x^2}{16y^2-9x^2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{x+1}{3x+4y} + \frac{-4y+3x+xy+3x^2}{(4y-3x)(4y+3x)} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{(x+1)(4y-3x) - 4y + 3x + xy + 3x^2}{(3x+4y)(4y-3x)} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{4xy - 3x^2 + 4y - 3x - 4y + 3x + xy + 3x^2}{(3x+4y)(4y-3x)} \right)$$

$$= 2 \times \frac{5xy}{16y^2-9x^2} = \frac{10xy}{16y^2-9x^2}$$

$$= \frac{(x-2)(x-1) - (x-4)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-3x+2 - (x^2-3x-4)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-3x+2-x^2+3x+4}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{6}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$\frac{4x}{x^2+4x+4} + \frac{1}{x^2-4} - \frac{3}{x+2}$$

$$= \frac{4x}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)(x-2)} - \frac{3}{x+2}$$

$$= \frac{4x(x-2) + 1(x+2) - 3(x+2)(x-2)}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$= \frac{4x^2 - 8x + x + 2 - 3(x^2 - 4)}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$= \frac{4x^2 - 8x + x + 2 - 3x^2 + 12}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{x^2 - 7x + 14}{(x+2)^2(x-2)}$$

۱۳

پاسخ ۱۹

۱ فرض کنید عبارتی که باید با $\frac{x-3}{x^2+3x+2}$ جمع شود برابر A باشد، پس داریم:

$$\frac{x-3}{x^2+3x+2} + A = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{x-3}{(x+2)(x+1)} + A = \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{x+1} - \frac{(x-3)}{(x+2)(x+1)} \Rightarrow A = \frac{1 \times (x+2) - (x-3)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{x+2-x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{5}{(x+1)(x+2)}$$

۲ فرض کنید عبارتی که باید $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ از آن کم شود، برابر B باشد، پس داریم:

$$B - \left(\frac{x^2-9}{x^2+6x+9} \right) = \frac{x^2}{x+3} \Rightarrow B = \frac{x^2}{x+3} + \frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$$

$$\Rightarrow B = \frac{x^2}{x+3} + \frac{x^2-9}{(x+3)^2} = \frac{x^2(x+3) + x^2-9}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{x^3+3x^2+x^2-9}{(x+3)^2} \Rightarrow B = \frac{x^3+4x^2-9}{(x+3)^2}$$

پاسخ ۲۰

۱ حاصل جمع دو عبارت $\frac{1-x}{1-x^2}$ و $\frac{x}{1-x^2}$ برابر $\frac{1}{1-x^2}$ است.

۲ ابتدا توجه کنید که $x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$ ، حالا

فرض می‌کنیم دو کسر مورد نظر به صورت $\frac{A}{x+5}$ و $\frac{B}{x-2}$ باشند،

$$\frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} = \frac{-x}{x^2+3x-10}$$

پس باید داشته باشیم:



۲ عبارت‌های مربوط به اضلاع را با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{محیط} &= \frac{x}{x+1} + \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} + \frac{-2x^3+2}{x^3+3x^2+3x+1} \\ &= \frac{x}{x+1} + \frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{-2x^3+2}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x(x+1)^2 + (x^2-1)(x+1) - 2x^3+2}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x(x^2+2x+1) + (x^3+x^2-x-1) - 2x^3+2}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x^3+2x^2+x+x^3+x^2-x-1-2x^3+2}{(x+1)^3} \\ &= \frac{3x^2+1}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

پاسخ ۲۲

محیط مستطیل دو برابر حاصل جمع طول و عرض آن است، پس حاصل جمع طول و عرض این مستطیل برابر $\frac{1}{4x^2+x-3}$ می‌باشد و چون طول برابر $\frac{1}{x+1}$ است، بنابراین عرض مستطیل از

$$\text{رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید: } \text{عرض} = \frac{1}{4x^2+x-3} - \frac{1}{x+1}$$

حالا توجه کنید که $4x^2+x-3$ به صورت زیر قابل تجزیه است:

$$\begin{aligned} A = 4x^2 + x - 3 &\Rightarrow 4A = (4x)^2 + 1(4x) - 12 \\ \Rightarrow 4A &= (4x+4)(4x-3) \Rightarrow 4A = 4(x+1)(4x-3) \\ \Rightarrow A &= (x+1)(4x-3) \end{aligned}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} \text{عرض} &= \frac{1}{(x+1)(4x-3)} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-(4x-3)}{(x+1)(4x-3)} \\ &= \frac{1-4x+3}{(x+1)(4x-3)} = \frac{4-4x}{(x+1)(4x-3)} \end{aligned}$$

پاسخ ۲۳

۱ مساحت مستطیل را محاسبه کرده و منهای مساحت مربع

$$\begin{aligned} S_{\text{مستطیل}} &= \frac{x+1}{x-1} \times \frac{x+5}{x^2-x} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x-1) \cdot x(x-1)} \\ &= \frac{x^2+6x+5}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$S_{\text{مربع}} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \times \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \frac{x^2+2x+1}{4(x-1)^2}$$

$$S_{\text{قسمت رنگی}} = \frac{x^2+6x+5}{x(x-1)^2} - \frac{x^2+2x+1}{4(x-1)^2}$$

$$= \frac{4(x^2+6x+5) - x(x^2+2x+1)}{4x(x-1)^2}$$

$$= \frac{4x^2+24x+20-x^3-2x^2-x}{4x(x-1)^2} = \frac{2x^2+23x+20-x^3}{4x(x-1)^2}$$

۲ مساحت مثلث بزرگ‌تر را به دست آورده و منهای مساحت

مثلث کوچک‌تر می‌کنیم.

$$\begin{aligned} S_{\text{مثلث بزرگ}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x+2}{x-2} \times \frac{x^2-5x+6}{x^2-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2(x+1)}{x-2} \times \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2(x-3)}{x-1} \right) = \frac{x-3}{x-1} \end{aligned}$$

$$S_{\text{مثلث کوچک}} = \frac{2 \times \frac{x}{3}}{2} = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\text{قسمت رنگی}} = \frac{x-3}{x-1} - \frac{x}{3} = \frac{3(x-3) - x(x-1)}{3(x-1)}$$

$$= \frac{3x-9-x^2+x}{3(x-1)} = \frac{-x^2+4x-9}{3(x-1)}$$

پاسخ ۲۴

۱ صورت و مخرج کسر داده‌شده را در x^2 ضرب کرده و حاصل

عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 \times \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{15}{x^2}\right)}{x^2 \times \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{21}{x^2}\right)} &= \frac{x^2+2x-15}{x^2+4x-21} \\ &= \frac{x^2+(5-3)x+(5)(-3)}{x^2+(7-3)x+(7)(-3)} = \frac{(x+5)(x-3)}{(x+7)(x-3)} = \frac{x+5}{x+7} \end{aligned}$$

۲ صورت و مخرج کسر داده‌شده را در $x(x+2)$ ضرب کرده و

حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{x(x+2) \left(\frac{2}{x} - \frac{5}{x+2}\right)}{x(x+2) \left(\frac{5}{x+2} - \frac{2}{x}\right)} &= \frac{2(x+2) - 5x}{5x - 2(x+2)} \\ &= \frac{-1(-2(x+2) + 5x)}{5x - 2(x+2)} = \frac{-(5x - 2(x+2))}{(5x - 2(x+2))} = -1 \end{aligned}$$

۳ صورت و مخرج کسر داده‌شده را در $2x+1$ ضرب کرده و حاصل

عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{(2x+1) \left(5 - \frac{4}{2x+1}\right)}{(2x+1) \left(\frac{3}{2x+1} - 2\right)} &= \frac{5(2x+1) - 4}{3 - 2(2x+1)} \\ &= \frac{10x+5-4}{3-4x-2} = \frac{10x+1}{-4x+1} \end{aligned}$$

۴ صورت و مخرج کسر داده‌شده را در $(2x-y)(2x+y)$ ضرب

کرده و حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{(2x-y)(2x+y) \left(\frac{3x}{2x-y} - \frac{2y}{2x+y}\right)}{(2x-y)(2x+y) \left(\frac{2x}{2x+y} - \frac{3y}{2x-y}\right)} &= \frac{3x(2x+y) - 2y(2x-y)}{2x(2x-y) - 3y(2x+y)} \\ &= \frac{6x^2+3xy-4xy+2y^2}{4x^2-2xy-6xy-3y^2} = \frac{6x^2-xy+2y^2}{4x^2-8xy-3y^2} \end{aligned}$$

پاسخ ۲۵

در هر قسمت حاصل عبارت صورت و مخرج را جداگانه به دست آورده و سپس بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\text{صورت: } x - \frac{x^2}{x+y} = \frac{x(x+y) - x^2}{x+y} = \frac{x^2 + xy - x^2}{x+y} = \frac{xy}{x+y}$$

$$\text{مخرج: } 1 + \frac{y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - y^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2}{x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{xy}{x+y}}{\frac{x^2}{x^2 - y^2}} = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2(x+y)} = \frac{y(x-y)(x+y)}{x(x+y)} = \frac{y(x-y)}{x}$$

$$\text{صورت: } \frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} = \frac{x(x+y) + y(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2 + xy + yx - y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x-y)(x+y)}$$

$$\text{مخرج: } \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} = \frac{x(x-y) - y(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - xy - yx - y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x-y)(x+y)}}{\frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x+y)(x-y)}} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - 2xy - y^2}$$

$$\text{صورت: } \frac{3}{x-y} - \frac{4}{x+y} = \frac{3(x+y) - 4(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{3x + 3y - 4x + 4y}{(x-y)(x+y)} = \frac{-x + 7y}{(x-y)(x+y)}$$

$$\text{مخرج: } \frac{x^2 - 49y^2}{(x+y)^2} = \frac{(x-7y)(x+7y)}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\frac{-x + 7y}{(x-y)(x+y)}}{\frac{(x-7y)(x+7y)}{(x+y)^2}} = \frac{-x + 7y}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{(x-7y)(x+7y)} = \frac{-x + 7y}{(x-y)(x+7y)} = \frac{-1}{x+y}$$

$$\text{صورت: } \frac{x^2 - x}{1 - x^2} = \frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)}$$

$$\text{مخرج: } \frac{x}{x-1} + x = \frac{x + x(x-1)}{x-1} = \frac{x + x^2 - x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{x(x-1)(x-1)}{(1-x)(1+x)x^2} = \frac{(x-1)^2}{-1(-1+x)(1+x)x}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{-(x-1)(1+x)x} = \frac{+(x-1)}{-(1+x)x} = \frac{x-1}{(-1-x)x}$$

پاسخ ۲۶

در هر قسمت، عبارت‌های داده شده را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-3x^2 y^2 z^5}{24x^2 y^2 z^6} = -\frac{y^2}{8xz}$$

$$\frac{3x^2 y + 12ay^2 - 15axy^2}{3y^2}$$

$$= \frac{3x^2 y}{3y^2} + \frac{12ay^2}{3y^2} - \frac{15axy^2}{3y^2} = \frac{x^2}{y} + 4a - 5axy$$

$$\frac{32y^5 - 16y^4 + 8y^3 - 4y^2}{-2y}$$

$$= \frac{16y^4}{-2y} - \frac{8y^3}{-2y} + \frac{4y^2}{-2y} - \frac{4y^2}{-2y}$$

$$= -16y^3 + 4y^2 - 2y + 2y$$

پاسخ ۲۷

در هر قسمت تقسیم مورد نظر را انجام داده و خارج قسمت و باقی مانده را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 9x - 18 \quad | \quad x - 3 \\ -(3x^2 - 9x) \quad \quad \quad 3x \\ \hline -18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 13x - 88 \quad | \quad x - 8 \\ -(3x^2 - 24x) \quad \quad \quad 3x + 11 \\ \hline + 11x - 88 \\ -(11x - 88) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x^2 + 3x - 4 \quad | \quad x + 1 \\ -(x^2 - x^2) \quad \quad \quad x^2 - 3x + 6 \\ \hline -3x^2 + 3x - 4 \\ -(-3x^2 - 3x) \quad \quad \quad 6x - 4 \\ \hline -(-3x^2 - 3x) \quad \quad \quad 6x - 4 \\ \hline -(-6x - 6) \quad \quad \quad -10 \end{array}$$



پاسخ ۲۹

ابتدا باقی مانده تقسیم عبارت $4x^2 + x - 3$ بر $x + 2$ را به دست می آوریم:

$$\begin{array}{r} 4x^2 + x - 3 \quad | \quad x+2 \\ -(4x^2 + 8x) \quad \quad 4x-7 \\ \hline -7x - 3 \\ -(-7x - 14) \\ \hline 11 \end{array}$$

پس باقی مانده عبارت P بر $x - 3$ هم باید ۱۱ باشد؛ بنابراین با توجه به رابطه تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} P & | \quad x-3 \\ \hline \therefore 2x+1 & \Rightarrow P = (x-3)(2x+1) + 11 \\ \hline 11 & \\ = 2x^2 + x - 6x - 3 + 11 & = 2x^2 - 5x + 8 \end{aligned}$$

پاسخ ۳۰

ابتدا عبارت A را بر $2x + 1$ تقسیم کرده و خارج قسمت آن را به دست می آوریم:

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 \quad | \quad 2x+1 \\ -(6x^3 + 3x^2) \quad \quad 3x^2+4x+1 \\ \hline 8x^2 + 6x + 1 \\ -(8x^2 + 4x) \\ \hline 2x + 1 \\ -(2x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

حالا برای به دست آوردن دو عبارت دیگر، با توجه به این که A برابر حاصل ضرب مقسوم علیه در خارج قسمت تقسیم انجام شده است، کفایت خارج قسمت را به کمک روش A تجزیه کنیم تا دو عبارت دیگر به دست آیند.

$$\begin{aligned} A = 3x^2 + 4x + 1 & \Rightarrow 3A = (3x)^2 + 4(3x) + 3 \\ \Rightarrow 3A = (3x+1)(3x+3) & \Rightarrow 3A = (3x+1) \cdot 3(x+1) \\ \Rightarrow A = (3x+1)(x+1) & \end{aligned}$$

بنابراین A به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$A = (2x+1)(3x+1)(x+1)$$

پاسخ ۳۱

ابتدا توجه کنید که حاصل ضرب طول و عرض مستطیل برابر است با: $(3x+2)(2x+1) = 6x^2 + 3x + 4x + 2 = 6x^2 + 7x + 2$ حالا با تقسیم حجم بر عبارت به دست آمده، ارتفاع مکعب مستطیل را پیدا می کنیم:

$$\begin{array}{r} 24x^3 + 46x^2 + 29x + 6 \quad | \quad 6x^2+7x+2 \\ -(24x^3 + 28x^2 + 8x) \quad \quad 4x+3 \\ \hline 18x^2 + 21x + 6 \\ -(18x^2 + 21x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

پس با توجه به تقسیم فوق نتیجه می گیریم ارتفاع مکعب مستطیل برابر $4x + 3$ است.

۴

$$\begin{array}{r} x^2 - 64 \quad | \quad x+3 \\ -(x^2 + 3x^2) \quad \quad x^2-3x+9 \\ \hline -3x^2 - 64 \\ -(-3x^2 - 9x) \\ \hline 9x - 64 \\ -(9x + 27) \\ \hline -91 \end{array}$$

۵

$$\begin{array}{r} 5x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \quad | \quad x^2+1 \\ -(5x^3 + 5x) \quad \quad 5x-3 \\ \hline -3x^2 - x - 2 \\ -(-3x^2 - 3) \\ \hline -x + 1 \end{array}$$

۶

$$\begin{array}{r} 10x^4 - 5x^3 + x^2 - 4 \quad | \quad x^2-x+2 \\ -(10x^4 - 10x^3 + 20x^2) \quad \quad 10x^2+5x-14 \\ \hline 5x^3 - 19x^2 - 4 \\ -(5x^3 - 5x^2 + 10x) \\ \hline -14x^2 - 10x - 4 \\ -(-14x^2 + 14x - 28) \\ \hline -24x + 24 \end{array}$$

۷

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 5x - 6 \quad | \quad x-2 \\ -(3x^5 - 6x^4) \quad \quad 3x^4+8x^3 \\ \hline 8x^4 - x^3 + 4x^2 + 5x - 6 \quad +15x^2 \\ -(8x^4 - 16x^3) \quad \quad +34x+73 \\ \hline 15x^3 + 4x^2 + 5x - 6 \\ -(15x^3 - 30x^2) \\ \hline 34x^2 + 5x - 6 \\ -(34x^2 - 68x) \\ \hline 73x - 6 \\ -(73x - 146) \\ \hline 140 \end{array}$$

پاسخ ۲۸

با توجه به رابطه تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} P & | \quad x^2-x+1 \\ \hline - \dots \quad 2x-3 \\ 2x+3 & \\ \hline \Rightarrow P = (x^2-x+1)(2x-3) + (2x+3) \\ & = 2x^2 - 3x^2 - 2x^2 + 3x + 2x - 3 + 2x + 3 \\ & = 2x^2 - 5x^2 + 7x \end{aligned}$$

پاسخ ۳۲

چون ۱ ریشه معادله $2x^2 + 7x + x - 10 = 0$ است، پس $x - 1$ ، ریشه‌ی عبارت $2x^2 + 7x + x - 10$ می‌باشد. حالا با تقسیم این عبارت بر $x - 1$ داریم:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 7x + x - 10 \quad | \quad x - 1 \\ -(2x^2 - 2x) \\ \hline 9x + x - 10 \\ -(9x - 9) \\ \hline 10x - 10 \\ -(10x - 10) \\ \hline 0 \end{array}$$

پس: $2x^2 + 7x + x - 10 = (x - 1)(2x^2 + 9x + 10) + 0$
در نتیجه برای به دست آوردن دو ریشه دیگر، کافی است پرانتز دوم را تجزیه کرده و ریشه‌های آن را به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} A = 2x^2 + 9x + 10 &\Rightarrow 2A = (2x)^2 + 9(2x) + 20 \\ \Rightarrow 2A = (2x + 4)(2x + 5) &\Rightarrow 2A = 2(x + 2)(2x + 5) \\ \Rightarrow A = (x + 2)(2x + 5) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 7x + x - 10 = (x - 1)(x + 2)(2x + 5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

پاسخ ۳۳

ابتدا با کمک روش سریع، باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^2 + 2x + 27$ بر $x + 3$ را به دست می‌آوریم: $x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x + 27 = (-3)^2 + 2(-3) + 27 = -27 - 6 + 27 = -6$
پس با توجه به این که مقدار باقی‌مانده برابر -6 شد، اگر به عبارت اولیه، 6 واحد اضافه کنیم (-6 واحد کم کنیم)، آن‌گاه مقدار باقی‌مانده برابر صفر می‌شود، در نتیجه عبارت $x^2 + 2x + 27 + 6$ بر $x + 3$ بخش‌پذیر خواهد بود.

پاسخ ۳۴

چون A بر $x + 2$ بخش‌پذیر است، پس مقدار عددی عبارت A به ازای $x = -2$ ، برابر صفر می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} x = -2 &\Rightarrow x^4 + 2x^2 + 3x^3 - ax + 1 = \\ &(-2)^4 + 2(-2)^2 + 3(-2)^3 - a(-2) + 1 = 0 \\ &\Rightarrow 16 + 2(4) + 3(-8) + 2a + 1 = 0 \\ &\Rightarrow 16 + 8 - 24 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow 2a + 1 = 0 \\ &\Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

پاسخ ۳۵

حاصل هر عبارت به ازای $x = 3$ ، باید با هم برابر باشد، پس داریم:
 $x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x^2 - 5x + a = (3)^2 + 2(3)^2 - 5(3) + a = 27 + 18 - 15 + a = 30 + a$
 $x = 3 \Rightarrow x^2 + ax - 5 = (3)^2 + a(3) - 5 = 9 + 3a - 5 = 3a + 4$
 $\Rightarrow 30 + a = 3a + 4 \Rightarrow a - 3a = 4 - 30$
 $\Rightarrow -2a = -26 \Rightarrow a = 13$

پاسخ ۳۶

حاصل عبارت A به ازای $x = -1$ و $x = 3$ ، صفر است، پس داریم:
 $x = -1 \Rightarrow 2x^2 + ax^2 - bx + 1 = 2(-1)^2 + a(-1)^2 - b(-1) + 1 = 0$
 $\Rightarrow 2(-1) + a(1) + b + 1 = 0 \Rightarrow -2 + a + b + 1 = 0$
 $\Rightarrow a + b = 1$
 $x = 3 \Rightarrow 2x^2 + ax^2 - bx + 1 = 2(3)^2 + a(3)^2 - b(3) + 1 = 0$
 $\Rightarrow 2(27) + a(9) - 3b + 1 = 0 \Rightarrow 54 + 9a - 3b + 1 = 0$
 $\Rightarrow 9a - 3b = -55$

حال با حل دستگاه دو معادله، مقدار a و b را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \times 3 \begin{cases} a + b = 1 \\ 9a - 3b = -55 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3a + 3b = 3 \\ 9a - 3b = -55 \end{cases} \\ \xrightarrow{+} 12a = -52 &\Rightarrow a = \frac{-52}{12} \Rightarrow a = -\frac{13}{3} \\ a + b = 1 \xrightarrow{a = -\frac{13}{3}} &-\frac{13}{3} + b = 1 \Rightarrow b = 1 + \frac{13}{3} = \frac{16}{3} \\ \Rightarrow b = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

پاسخ ۳۷

عبارت $x^2 + 2x^2 - ax + b$ به ازای $x = +3$ برابر صفر و به ازای $x = -3$ برابر 5 است، پس داریم:
 $x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x^2 - ax + b = (3)^2 + 2(3)^2 - a(3) + b = 0 \Rightarrow 27 + 2(9) - 3a + b = 0$
 $\Rightarrow 27 + 18 - 3a + b = 0 \Rightarrow -3a + b = -45$
 $x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x^2 - ax + b = (-3)^2 + 2(-3)^2 - a(-3) + b = 5$
 $\Rightarrow -27 + 2(9) + 3a + b = 5$
 $\Rightarrow -27 + 18 + 3a + b = 5 \Rightarrow 3a + b = 5 + 9$
 $\Rightarrow 3a + b = 14$

حالا با حل دستگاه دو معادله، جواب a و b را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} \begin{cases} -3a + b = -45 \\ 3a + b = 14 \end{cases} &\xrightarrow{+} 2b = -31 \Rightarrow b = -\frac{31}{2} \\ -3a + b = -45 \xrightarrow{b = -\frac{31}{2}} &-3a - \frac{31}{2} = -45 \\ \Rightarrow -3a = -45 + \frac{31}{2} &\Rightarrow -3a = \frac{-90 + 31}{2} = \frac{-59}{2} \Rightarrow a = \frac{59}{6} \end{aligned}$$



پاسخ ۳۸

چون عبارت $x^3 - x^2y + 2xy^2 - 2y^3 + 2a - 6$ به ازای $x = y$ برابر صفر است، داریم:

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow x^3 - x^2y + 2xy^2 - 2y^3 + 2a - 6 \\ &= (y)^3 - (y)^2y + 2(y)y^2 - 2y^3 + 2a - 6 = 0 \\ &\Rightarrow y^3 - y^3 + 2y^3 - 2y^3 + 2a - 6 = 0 \\ &\Rightarrow 2a - 6 = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱ گزینه ۲: عبارتهای (ب) و (پ) گویا نیستند، چون متغیر آن‌ها زیر رادیکال قرار گرفته و ساده نمی‌شود.

دقت کنید که عبارت (ت) گویا است، چون داریم:

$$\frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} = x \Rightarrow \text{گویا}$$

۲ گزینه ۲: عبارتهای داده‌شده را بررسی و در صورت امکان ساده‌سازی می‌کنیم:

$$\frac{fa^2 - 2}{1 - 2a^2} = \frac{2(2a^2 - 1)}{-1(2a^2 - 1)} = \frac{2}{-1} = -2 \quad \checkmark$$

دست می‌آوریم: $\frac{2+m}{-m}$ ساده نمی‌شود.

$$\frac{-12 + 8x}{-4x + 6} = \frac{4(-3 + 2x)}{-2(2x - 3)} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \checkmark$$

ساده نمی‌شود: $\frac{2-2b}{2b-1}$

پس دوتا از عبارتهای برابر ۲ یا -۲ هستند.

۳ گزینه ۲: عبارتهای را بررسی کرده و در صورت ساده‌شدن، ساده می‌کنیم:

$$\text{الف) } \frac{3-2z}{2z+3} \quad \text{ساده نمی‌شود.} \quad \times$$

$$\text{ب) } \frac{\Delta m + \Delta n - 3}{3 - \Delta m - \Delta n} = \frac{\Delta m + \Delta n - 3}{-1(\Delta m + \Delta n - 3)} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } &\frac{4xy}{(x+y)^2 - (x-y)^2} \\ &= \frac{4xy}{(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2)} \\ &= \frac{4xy}{4xy} = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

پس دوتا از عبارتهای برابر ۱ یا -۱ هستند.

۴ گزینه ۲: به کمک ساده‌سازی عبارت‌ها داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{x^1 - b^1}{b^1 - x^1} \times \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - x^2 - 1} \\ &= \frac{x^1 - b^1}{-1(-b^1 + x^1)} \times \frac{x^2 - 2x + 1}{-(-2x + x^2 + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^1 - b^1}{-1(x^1 - b^1)} \times \frac{x^2 - 2x + 1}{-1(x^2 - 2x + 1)} \\ &= \frac{1}{-1} \times \frac{1}{-1} = (-1) \times (-1) = 1 \end{aligned}$$

۵ گزینه ۲: عبارت گزینه (۳) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} \frac{m}{tn} \left(\frac{px - py + pz}{mn} \right) &= \frac{m}{tn} \times \frac{p}{mn} \times (x - y + z) \\ &= \frac{p}{tn^2} (x - y + z) \end{aligned}$$

که این عبارت هم با عبارت $\frac{mp(x-y+z)}{tmn}$ یا همان $\frac{p(x-y+z)}{tn}$ یکسان نیست.

۶ گزینه ۲: عبارت گزینه (۴) به صورت زیر قابل ساده‌سازی است:

$$\begin{aligned} \frac{4 + x^2 - 4x}{-2 + x} &= \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{x^2 - 2(2)(x) + 2^2}{x - 2} \\ &= \frac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2 \end{aligned}$$

عبارتهای سایر گزینه‌ها قابل ساده‌شدن نیستند. امتحان کنید!

۷ گزینه ۲: عبارت داده‌شده را ساده‌سازی کرده و حاصل را به

$$\begin{aligned} \text{دست می‌آوریم: } &\frac{b^{-1} + a^{-1}}{ax + bx} = \frac{\frac{1 \times a}{b \times a} + \frac{1 \times b}{a \times b}}{x(a+b)} = \frac{\frac{a+b}{ab}}{x \times \left(\frac{a+b}{ab}\right)} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

۸ گزینه ۲: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): قابل ساده‌سازی نیست.

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{2a - a^2 - 1} = \frac{a^2 - 2a + 1}{-1(-2a + a^2 + 1)} \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$= \frac{a^2 - 2a + 1}{-1(a^2 - 2a + 1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\frac{a^2 - 9}{(3-a)(3+a)} = \frac{a^2 - 3^2}{(3-a)(3+a)} \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$= \frac{(a-3)(a+3)}{-(a-3)(a+3)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\frac{2a - 3b - 6a}{4a + 3b} = \frac{-4a - 3b}{4a + 3b} = \frac{-1(4a + 3b)}{4a + 3b} = \frac{-1}{1} = -1$$

پس گزینه (۱) با سایر گزینه‌ها فرق دارد.

۹ گزینه ۲: به کمک تجزیه عبارتهای جبری داریم:

$$\begin{aligned} \frac{-12 - 8x + 4x^2}{-2x + 6} &= \frac{4x^2 - 8x - 12}{-2x + 6} = \frac{4(x^2 - 2x - 3)}{-2(x-3)} \\ &= \frac{4(x^2 + ((-3)+1)x + (-3)(1))}{-2(x-3)} = \frac{4(x-3)(x+1)}{-2(x-3)} \\ &= -2(x+1) = -2x - 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+2)(x-3) = B(x-1)$$

$$\xrightarrow{\div(x-1)} \frac{(x+1)(x+2)(x-3)}{x-1} = B$$

پس مقدار B به ازای $x=2$ ، برابر است با:

$$B = \frac{(2+1)(2+2)(2-3)}{2-1} = \frac{3 \times 4 \times (-1)}{1} = -12$$

گزینه ۱۳ •• برای محاسبه خارج قسمت تقسیم $x^f - y^f$ بر

$x+y$ کافیست حاصل ساده‌شده عبارت $\frac{x^f - y^f}{x+y}$ را پیدا کنیم. پس داریم:

$$\frac{x^f - y^f}{x+y} = \frac{(x^f)^f - (y^f)^f}{x+y} = \frac{(x^f - y^f)(x^f + y^f)}{x+y}$$

$$= \frac{(x+y)(x-y)(x^f + y^f)}{(x+y)} = (x-y)(x^f + y^f)$$

$$= x^f + xy^f - x^f y - y^f = x^f - x^f y + xy^f - y^f$$

گزینه ۱۴ • عبارت داده‌شده را ساده‌سازی کرده و برابر ۱ قرار می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$\frac{2x^3 - 16}{3x^2 - 12x + 12} = \frac{2(x^3 - 8)}{3(x^2 - 4x + 4)}$$

$$= \frac{2(x^3 - 2^3)}{3(x^2 - 2(2)(x) + 2^2)} = \frac{2(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{3(x-2)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 + 2x + 4)}{3(x-2)} \Rightarrow \frac{2(x^2 + 2x + 4)}{3(x-2)} = 1$$

$$\xrightarrow{\times \frac{3}{2}} \frac{x^2 + 2x + 4}{x-2} = \frac{3}{2} = 1/5$$

گزینه ۱۵ •• ابتدا طرفین تساوی $x^f + y^f = \frac{x^f - y^f}{x^f - y^f}$ را ساده‌سازی می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\frac{x^f - y^f}{x^f - y^f} = x^f + y^f \Rightarrow x^f - y^f = (x^f - y^f)(x^f + y^f)$$

$$\Rightarrow (x^f)^f - (y^f)^f = ((x^f)^f - (y^f)^f)(x^f + y^f)$$

$$\Rightarrow (x^f - y^f)((x^f)^f + (y^f)^f + x^f y^f)$$

$$= (x^f - y^f)(x^f + y^f)(x^f + y^f)$$

$$\Rightarrow x^f + y^f + x^f y^f = x^f + 2x^f y^f + y^f$$

$$\Rightarrow x^f y^f = 2x^f y^f \Rightarrow x^f y^f = 0 \Rightarrow xy = 0$$

حالا با توجه به مقدار xy حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست

$$\frac{x^f + 2xy}{x^f - 3xy} = \frac{x^f + 2 \times 0}{x^f - 3 \times 0} = \frac{x^f}{x^f} = 1$$

می‌آوریم:

گزینه ۱۰ • پراتزهای صورت کسر را تجزیه کرده و سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x-2)(x+3)(x^2+2x)}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x+3) \cdot x(x+2)}{x^2-2^2}$$

$$= \frac{(x-2)(x+3)(x)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = (x+3)(x) = x^2 + 3x$$

گزینه ۱۱ •• عبارت سمت چپ تساوی داده‌شده در صورت سؤال را ساده‌سازی کرده و سعی می‌کنیم آن را شبیه عبارت سمت راست بنویسیم و سپس a ، b و c را به دست آوریم:

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + (3+4)x + 3 \times 4 = (x+3)(x+4)$$

$$4x^2 - 24x + 36 = 4(x^2 - 6x + 9)$$

$$= 4(x^2 - 2 \times (3) \times x + 3^2) = 4(x-3)^2$$

$$\frac{2x+8}{x^2+7x+12} = \frac{4x^2-24x+36}{m(x-a)(x+b)^2}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{2(x+4)}{(x+3)(x+4)} = \frac{4(x-3)^2}{m(x-a)(x+b)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+3} = \frac{2(x-3)^2}{m(x-a)(x+b)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \frac{1}{m(x-a)(x+b)^2} = \frac{2(x+3)(x-3)^2}{m(x-a)(x+b)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ x-a=x+3 \Rightarrow -a=3 \Rightarrow a=-3 \\ (x+b)^2=(x-3)^2 \Rightarrow x+b=x-3 \Rightarrow b=-3 \end{cases}$$

پس حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$\frac{2(a+b)}{m} = \frac{2(-3-3)}{2} = \frac{2 \times (-6)}{2} = -6$$

گزینه ۱۲ • ابتدا به کمک ساده‌سازی عبارت $\frac{x^f - x^2}{x^f + 3x^2 + 2x^2}$ ، عبارت A را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{x^f - x^2}{x^f + 3x^2 + 2x^2} = \frac{x^2(x^2-1)}{x^2(x^2+3x+2)}$$

$$= \frac{x^2(x^2-1^2)}{x^2(x^2+(1+2)x+1 \times 2)} = \frac{x^2(x-1)(x+1)}{x^2(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{A} \Rightarrow A(x-1) = (x+1)(x+2)$$

$$\xrightarrow{\div(x-1)} A = \frac{(x+1)(x+2)}{x-1}$$

حالا با توجه به عبارت A و رابطه $\frac{A}{B} = \frac{1}{x-3}$ داریم:

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x-1} = \frac{1}{x-3} \Rightarrow \frac{(x+1)(x+2)}{B(x-1)} = \frac{1}{x-3}$$



گزینه ۱۶ •• به کمک تجزیه عبارت‌های داده شده در صورت سؤال و ساده‌سازی، مقادیر a ، b و c را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1-t^4}{t^2-1} = \frac{(1+t^2)(1+t^2)}{(t+1)(at^2+bt+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{1^2-(t^2)^2}{t^2-1} = \frac{(1+t^2)(1^2+t^2)}{(t+1)(at^2+bt+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{(1-t^2)(1+t^2)}{t^2-1} = \frac{(1+t^2)(1+t)(t^2-t+1)}{(t+1)(at^2+bt+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{1-t^2}{t^2-1} = \frac{t^2-t+1}{at^2+bt+c} \Rightarrow \frac{-1(t^2-1)}{t^2-1} = \frac{t^2-t+1}{at^2+bt+c}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{t^2-t+1}{at^2+bt+c} \Rightarrow \underline{-at^2 - bt - c = t^2 - t + 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \Rightarrow a = -1 \\ -b = -1 \Rightarrow b = 1 \\ -c = 1 \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$2a + 3b - c = 2(-1) + 3(1) - (-1) = -2 + 3 + 1 = 4 - 2 = 2$$

گزینه ۱۷ •• چون $3^m + 1 = k$ ، پس $3^m = k - 1$. حالا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\frac{27^m - 8}{4 - 9^m} = \frac{(3^3)^m - 2^3}{2^2 - (3^2)^m} = \frac{(3^m)^3 - 2^3}{2^2 - (3^m)^2}$$

$$= \frac{(k-1)^3 - 2^3}{2^2 - (k-1)^2} = \frac{(k-1-2)((k-1)^2 + 2^2 + 2(k-1))}{(2-(k-1))(2+k-1)}$$

$$= \frac{(k-3)(k^2 - 2k + 1 + 4 + 2k - 2)}{(2-k+1)(k+1)} = \frac{(k-3)(k^2 + 3)}{(3-k)(k+1)}$$

$$= \frac{-(-k+3)(k^2 + 3)}{(3-k)(k+1)} = \frac{-k^2 - 3}{k+1}$$

گزینه ۱۸ •• ابتدا تک‌تک عبارت‌های سمت چپ تساوی داده شده در صورت سؤال را تجزیه کرده و سپس به کمک ساده‌سازی، مقدارهای a و b را پیدا می‌کنیم:

$$A = 2x^2 + 9x + 10 \Rightarrow 2A = (2x)^2 + 9(2x) + 20$$

$$\Rightarrow 2A = (2x)^2 + (4+5)(2x) + 4 \times 5$$

$$\Rightarrow 2A = (2x+4)(2x+5) \Rightarrow 2A = 2(x+2)(2x+5)$$

$$\Rightarrow A = (x+2)(2x+5)$$

$$B = 2x^2 - 7x - 30 \Rightarrow 2B = (2x)^2 - 7(2x) - 60$$

$$\Rightarrow 2B = (2x)^2 + ((-12)+5)(2x) + (-12)(5)$$

$$\Rightarrow 2B = (2x-12)(2x+5) \Rightarrow 2B = 2(x-6)(2x+5)$$

$$\Rightarrow B = (x-6)(2x+5)$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 + 9x + 10}{2x^2 - 7x - 30} = \frac{(x+2)(2x+5)}{(x-6)(2x+5)} = \frac{x+2}{x-6}$$

$$= \frac{2(x+2)}{2(x-6)} = \frac{2x+4}{2x-12} \Rightarrow \frac{2x+4}{2x-12} = \frac{2x+a}{2x-b} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=12 \end{cases}$$

پس با توجه به مقادیر a و b ، حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{6} = \frac{4}{3} + \frac{12}{6} = 2 + 2 = 4$$

گزینه ۱۹ •• ابتدا عبارت $\frac{2x^2 - 5x - 3}{5x^2 - 14x - 3}$ را به کمک تجزیه ساده‌سازی می‌کنیم:

$$A = 2x^2 - 5x - 3 \Rightarrow 2A = (2x)^2 - 5(2x) - 6$$

$$\Rightarrow 2A = (2x)^2 + ((-5)+1)(2x) + (-6)(1)$$

$$\Rightarrow 2A = (2x-6)(2x+1) \Rightarrow 2A = 2(x-3)(2x+1)$$

$$\Rightarrow A = (x-3)(2x+1)$$

$$B = 5x^2 - 14x - 3 \Rightarrow 5B = (5x)^2 - 14(5x) - 15$$

$$\Rightarrow 5B = (5x)^2 + ((-14)+1)(5x) + (-15)(1)$$

$$\Rightarrow 5B = (5x-15)(5x+1) \Rightarrow 5B = 5(x-3)(5x+1)$$

$$\Rightarrow B = (x-3)(5x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 5x - 3}{5x^2 - 14x - 3} = \frac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)(5x+1)} = \frac{2x+1}{5x+1}$$

$$\frac{mx+b}{nx+c} = \frac{2x+1}{5x+1}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} mx+b = 2x+1 \Rightarrow m=2, b=1 \\ nx+c = 5x+1 \Rightarrow n=5, c=1 \end{cases}$$

پس پاسخ مسئله برابر است با:

$$mn - bc = 2 \times 5 - 1 \times 1 = 10 - 1 = 9$$

گزینه ۲۰ •• چون $x - y = 5$ ، پس $x = y + 5$ ، یا به عبارت دیگر $y = x - 5$ و چون $y - z = 3$ ، پس $y = z + 3$ ، یا به عبارت دیگر $z = y - 3$ ، بنابراین داریم:

$$\frac{(x^2 - 5x)(z^2 + 3z)}{(y^2 + 5y)(3y - y^2)} = \frac{x(x-5) \cdot z(z+3)}{y(y+5) \cdot y(3-y)}$$

$$\frac{x \cdot y \cdot z \cdot y}{y \cdot x \cdot y \cdot (-z)} = \frac{z}{-z} = -1$$

گزینه ۲۱ •• باید ریشه‌های عبارت مخرج را پیدا کنیم. پس ابتدا آن را تجزیه کرده و سپس با توجه به تجزیه به دست آمده، ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x^2 - 2^2) = x(x-2)(x+2)$$

$$\Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

پس عبارت داده شده به ازای مقادیر 0 ، 2 و -2 تعریف نشده است.

۲۶ گزینه •• توجه کنید اگر دو عدد a و b ریشه‌های معادله

درجه دوم $kx^2 + mx + n$ باشند، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$k(x-a)(x-b) = kx^2 + mx + n$$

بنابراین با توجه به نکته مطرح شده، چون در عبارت $3x^2 - 7ax + 6b$ ،

ضریب x^2 برابر ۳ است و ضمناً اعداد ۲ و ۵ ریشه‌های این معادله هستند،

باید داشته باشیم: $3(x-2)(x-5) = 3x^2 - 7ax + 6b$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 7x + 10) = 3x^2 - 7ax + 6b$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 21x + 30 = 3x^2 - 7ax + 6b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -21x = -7ax \Rightarrow -21 = -7a \Rightarrow a = 3 \\ 30 = 6b \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

پس پاسخ مسئله برابر است با: $2a - b = 2 \times 3 - 5 = 6 - 5 = 1$

۲۷ گزینه •• عبارت $(2x-1)^2$ چون مربع کامل است، پس

همواره نامنفی است، بنابراین توان سوم آن یعنی $((2x-1)^2)^3$

هم همواره نامنفی می‌باشد و وقتی این عبارت با عدد ۴ جمع شود،

حاصل به دست آمده بزرگ‌تر یا مساوی ۴ بوده و هیچ وقت نمی‌تواند

برابر صفر باشد، پس عبارت مخرج ریشه ندارد، یعنی کل عبارت

داده شده به ازای هر مقدار دلخواه برای x ، تعریف شده است.

۲۸ گزینه •• توجه کنید که اگر a و b هر دو مثبت باشند، آن‌گاه

$ax^2 + b$ هم مثبت است؛ چون $a > 0$ و $x^2 > 0$ ، پس $ax^2 > 0$ و

هم‌چنین چون $b > 0$ ، بنابراین $ax^2 + b > 0$. به همین ترتیب اگر

a و b هر دو منفی باشند، آن‌گاه عبارت $ax^2 + b$ هم مشابه استدلال

قبل برابر عددی منفی بوده و ریشه ندارد، پس شرط ریشه‌نداشتن

مخرج یا به عبارت دیگر تعریف شده بودن عبارت داده شده، هم‌علامت

بودن a و b است. ضمناً اگر a و b هم‌علامت باشند، آن‌گاه رابطه

$\frac{a}{b} > 0$ همواره برقرار است. پس گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

۲۹ گزینه •• چون عبارت به ازای $x=3$ تعریف نشده است، پس

حاصل $x^2 - 11x + m$ به ازای $x=3$ باید برابر صفر باشد، در نتیجه

داریم: $x=3 \Rightarrow x^2 - 11x + m = 3^2 - 11 \times 3 + m = 0$

$$\Rightarrow 9 - 33 + m = 0 \Rightarrow m - 24 = 0 \Rightarrow m = 24$$

حالا دقت کنید که چون $m=24$ ، پس عبارت مخرج به صورت

زیر قابل تجزیه است:

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 + (-3-8)x + (-3)(-8) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 8 \end{cases}$$

پس مقدار عددی k برابر ۸ است و در نتیجه داریم:

$$\frac{m+k}{m-k} = \frac{24+8}{24-8} = \frac{32}{16} = 2$$

۲۲ گزینه •• توجه کنید که چون x^4 همواره نامنفی است،

پس $x^4 + 1$ همواره برابر عددی مثبت و بزرگ‌تر از ۱ است، یعنی

$x^4 + 1$ هیچ وقت نمی‌تواند برابر صفر شود، یعنی این عبارت ریشه

ندارد. به همین ترتیب عبارت $x^6 + 1$ هم ریشه ندارد. بنابراین

ریشه‌های مخرج فقط برابر ریشه‌های عبارت $x^2 - 5$ هستند، یعنی

اعداد $+\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$ که تعداد آن‌ها نیز برابر ۲ تا است.

$$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x = +\sqrt{5} \text{ یا } x = -\sqrt{5}$$

۲۳ گزینه •• ریشه تک‌تک کسرهای شرکت‌کننده در عبارت

A را به دست می‌آوریم. این ریشه‌ها همان مقادیری هستند که A

به ازای آن‌ها تعریف نشده است. $x=0$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad \checkmark$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + ((-2) + (-3))x + (-2)(-3)$$

$$= (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 & \checkmark \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 & \checkmark \end{cases}$$

پس عبارت A به ازای مقادیر $\{0, 2, 3\}$ تعریف نشده است.

۲۴ گزینه •• عبارت $-x^4 - 1$ یا همان $-(x^4 + 1)$ همواره

منفی است، پس ریشه ندارد.

دیگر ریشه‌های مخرج نیز به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x^2 + 64 = 0 \Rightarrow x^2 = -64 \Rightarrow x^2 = (-4)^2 \Rightarrow x = -4$$

$$\text{و } 2x^2 - 16 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} x = +\sqrt{8}, x = -\sqrt{8}$$

پس حاصل ضرب مقادیری که عبارت موردنظر به ازای آن‌ها تعریف نشده

است، برابر است با: $(-4) \times (-\sqrt{8}) \times \sqrt{8} = -4 \times (-8) = 32$

۲۵ گزینه •• روش اول چون مقادیر ۱ و ۲ ریشه‌های مخرج

هستند، پس داریم:

$$x=1 \Rightarrow 1+a+b=0$$

$$x=2 \Rightarrow 4+2a+b=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=-4 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -a-b=1 \\ 2a+b=-4 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{a} = \frac{-3}{-3} \Rightarrow a = -3$$

$$\Rightarrow -3+b=-1 \Rightarrow b=2$$

پس پاسخ مسئله برابر $a-b = -3-2 = -5$ است.

روش دوم اگر ۱ و ۲ ریشه‌های عبارت $x^2 + ax + b$ باشند،

آن‌گاه این عبارت به صورت $(x-1)(x-2)$ قابل نوشتن است، پس

$$x^2 + ax + b = (x-1)(x-2)$$

داریم:

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 3x + 2$$

$$\Rightarrow a = -3, b = 2 \Rightarrow a - b = -3 - 2 = -5$$



گزینه ۳۶ عبارت سمت چپ تساوی داده‌شده را ساده کرده و مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$\frac{ax^2 + ax}{6x} \times \frac{2x - 6}{x^2 - 2x - 3} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{ax(x+1)}{6x} \times \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+1)} = 3 \Rightarrow \frac{a}{3} = 3 \Rightarrow a = 9$$

گزینه ۳۷ به کمک ساده‌سازی سمت چپ تساوی داده‌شده، مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$\frac{ax^2 + ax}{2x^2 + 12x^2} \div \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x^2 - 6x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{ax(x+1)}{2x^2(x+6)} \times \frac{x(x^2 + 5x - 6)}{(x-1)(x+1)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{ax(x+1)}{2x^2(x+6)} \times \frac{x(x+6)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{ax}{2x^2} \times x = 3 \Rightarrow \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = 6$$

گزینه ۳۸ عبارت سمت چپ تساوی داده‌شده را ساده کرده و سپس مقدار y را با توجه به حاصل به دست آمده، محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{a^2 - 3a + 2}{a + 2} \times \frac{3a}{a - 2} \times \frac{2a + 4}{a^2 - 5a}$$

$$= \frac{(a-1)(a-2)}{(a+2)} \times \frac{3a}{(a-2)} \times \frac{2(a+2)}{a(a-5)}$$

$$= \frac{(a-1) \times 3 \times 2}{a-5} = \frac{6(a-1)}{a-5} = \frac{6a-6}{a-5}$$

$$\Rightarrow \frac{6a-6}{a-5} = \frac{6a-y}{a-5} \Rightarrow 6a-6 = 6a-y \Rightarrow y = 6$$

گزینه ۳۹ به کمک تجزیه عبارت‌ها داریم:

$$\frac{a^2 b^2}{(1-2a+a^2)} \times \frac{(1-a^2)(a^2+3a+2)}{(a+2)(b^2 a^2)(a+1)}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{(1-a)^2} \times \frac{(1-a)(1+a)(a+1)(a+2)}{(a+2)(b^2 a^2)(a+1)}$$

$$= \frac{a^2 b^2 (a+1)}{b^2 a^2 (1-a)} = \frac{a+1}{b(1-a)} = \frac{a+1}{-b(a-1)} = \frac{-(a+1)}{b(a-1)}$$

گزینه ۴۰ به کمک تجزیه عبارت‌ها، جواب مسئله را محاسبه می‌کنیم.

$$(2xy + 3y^2)^{-2} \div \frac{4x^2 y - 12xy^2 + 9y^3}{4x^2 - 9y^2}$$

$$= \frac{1}{(2xy + 3y^2)^2} \times \frac{4x^2 - 9y^2}{4x^2 y - 12xy^2 + 9y^3}$$

گزینه ۳۰ واضح است که عبارت A به ازای مقادیر زیر تعریف نشده است:

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$9 - 3x = 0 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

و حالا چون عبارت $5x^2 + ax - b$ نیز فقط به ازای یک مقدار برابر صفر می‌شود، بنابراین ریشه آن یا فقط برابر ۲ است یا فقط برابر ۳، در غیر این صورت عبارت A حداقل به ازای سه مقدار مختلف تعریف نشده است که این خلاف فرض مسئله می‌باشد.

گزینه ۳۱ به کمک تجزیه، عبارت‌های داده‌شده را ساده‌سازی می‌کنیم.

$$\frac{-2x + 2}{x^2 - 1} \div \frac{4x + 4}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x^2 + 2x + 1}{4x + 4}$$

$$= \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x+1)^2}{4(x+1)} = -2 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳۲ به کمک تجزیه عبارت‌های داده‌شده، حاصل کلی عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-5)^2} \div \frac{x^2 - 1}{-5 + x} = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)^2} \times \frac{x-5}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)^2} \times \frac{(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1}$$

گزینه ۳۳ به کمک تجزیه و ساده‌سازی داریم:

$$\frac{x^2 - 4}{\frac{2}{x} + 1} \div \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{2+x} \times \frac{x}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{x(x-2)(x+2)}{x+2} \times \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{x^2}{x-1}$$

گزینه ۳۴ عبارت‌ها را تجزیه کرده و با تبدیل تقسیم به ضرب، حاصل ساده‌شده عبارت کلی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 10x + 21}$$

$$= \frac{x^2 + (3-1)x + 3(-1)}{x^2 - 3^2} \times \frac{x^2 + (-3-7)x + (-3)(-7)}{x^2 + (-7+1)x + 1(-7)}$$

$$= \frac{(x+3)(x-1)}{(x-3)(x+3)} \times \frac{(x-3)(x-7)}{(x-7)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

گزینه ۳۵ فرض کنید عبارت A در تقسیم بر $x^2 - x - 6$ برابر $\frac{3x}{x-3}$ می‌شود، در این صورت داریم:

$$A \div (x^2 - x - 6) = \frac{3x}{x-3} \Rightarrow \frac{A}{x^2 - x - 6} = \frac{3x}{x-3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3x}{x-3} \times (x^2 - x - 6) \Rightarrow A = \frac{3x}{(x-3)} \times (x-3)(x+2)$$

$$\Rightarrow A = 3x(x+2) \Rightarrow A = 3x^2 + 6x$$

۴۳ گزینه •• دقت کنید که:

$$\frac{1-a}{a-1} = \frac{-(-1+a)}{a-1} = \frac{-1(a-1)}{(a-1)} = -1$$

$$-a - \frac{1-a}{a-1} = -a - (-1) = -a + 1 = 1 - a$$

بنابراین داریم:

۴۴ گزینه • به کمک تجزیه و مخرج مشترک‌گیری مسئله را حل می‌کنیم:

$$\frac{x-8}{x^2-x-6} + \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-8}{(x-3)(x+2)} + \frac{x-2 \times (x+2)}{x-3 \times (x+2)}$$

$$= \frac{x-8+(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x-8+x^2-4}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+x-12}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+4}{x+2}$$

۴۵ گزینه • به کمک تجزیه و مخرج مشترک‌گیری، حاصل عبارت داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{a^2-80}{a^2-16} + \frac{a-4}{a+4} = \frac{a^2-80}{a^2-4^2} + \frac{a-4}{a+4}$$

$$= \frac{a^2-80}{(a-4)(a+4)} + \frac{a-4 \times (a-4)}{a+4 \times (a-4)} = \frac{a^2-80+(a-4)^2}{(a+4)(a-4)}$$

$$= \frac{a^2-80+a^2+16-8a}{(a+4)(a-4)} = \frac{2a^2-8a-64}{(a+4)(a-4)}$$

$$= \frac{2(a^2-4a-32)}{(a+4)(a-4)} = \frac{2(a^2+(-8+4)a+(-8)(4))}{(a+4)(a-4)}$$

$$= \frac{2(a-8)(a+4)}{(a-4)(a+4)} = \frac{2(a-8)}{a-4} = \frac{2a-16}{a-4}$$

۴۶ گزینه •• به کمک مخرج مشترک‌گیری و تجزیه داریم:

$$\frac{2}{3x-3} - \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{2x+2}$$

$$= \frac{2 \times 2(x+1)}{2(x-1) \times 2(x+1)} - \frac{x \times 6}{(x-1)(x+1) \times 6} + \frac{1 \times 2(x-1)}{2(x+1) \times 2(x-1)}$$

$$= \frac{4(x+1)-6x+2(x-1)}{6(x-1)(x+1)} = \frac{4x+4-6x+2x-2}{6(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)}{6(x-1)(x+1)} = \frac{1}{6(x-1)}$$

۴۷ گزینه • با تجزیه مخرج‌ها و مخرج مشترک‌گیری حاصل عبارت

$$\frac{2x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1}$$

را به دست می‌آوریم:

$$= \frac{2x \times (x-1)}{(x+1)^2 \times (x-1)} + \frac{1 \times (x+1)}{(x-1)(x+1) \times (x+1)}$$

$$= \frac{2 \times (x+1)(x-1)}{(x+1) \times (x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x(x-1) + (x+1) - 2(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$= \frac{1}{(y(2x+3y))^2} \times \frac{(2x)^2 - (3y)^2}{y((2x)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2)}$$

$$= \frac{1}{y^2 \times (2x+3y)^2} \times \frac{(2x-3y)(2x+3y)}{y(2x-3y)^2}$$

$$= \frac{1}{y^2(2x+3y)(2x-3y)} = \frac{1}{y^2((2x)^2 - (3y)^2)}$$

$$= \frac{1}{y^2(4x^2 - 9y^2)}$$

۴۱ گزینه • عبارت داده‌شده به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\frac{5x-3}{x^2-4} \div \frac{3x-6}{2x-8} = \frac{5x-3}{x^2-4} \times \frac{2x-8}{3x-6} = \frac{(5x-3)(2x-8)}{(x^2-4)(3x-6)}$$

پس این عبارت به ازای مقادیر زیر تعریف نشده است:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| = 2$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2$$

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

و

اما از طرف دیگر دقت کنید که $2x - 8$ مخرج کسر $\frac{3x-6}{2x-8}$ هم هست، بنابراین این عبارت هم اگر صفر شود، آن‌گاه کل عبارت داده‌شده قابل تعریف نیست، پس داریم:

$$2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

در نتیجه عبارت داده‌شده به ازای مقادیر 2 ، -2 و 4 تعریف نشده است.

۴۲ گزینه •• ابتدا ریشه مخرج‌های دو کسر داده‌شده را به

$$\Delta x^2 + 2\sqrt{5}x + 1 = 0$$

دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow (\sqrt{5}x)^2 + 2(\sqrt{5}x) \times 1 + 1^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{5}x + 1)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{5}x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}x = -1 \xrightarrow{\div \sqrt{5}} x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1 - \sqrt{5}x = 0 \Rightarrow \sqrt{5}x = 1 \xrightarrow{\div \sqrt{5}} x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

و

$$\xrightarrow{\times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

از طرف دیگر دقت کنید که چون C به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$C = \frac{x-1}{5x^2 + 2\sqrt{5}x + 1} \times \frac{1 - \sqrt{5}x}{x^2 - 5x}$$

پس ریشه‌های معادله $x^2 - 5x = 0$ ، عبارت موردنظر را تعریف نشده

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 5) = 0$$

می‌کند، پس داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

بنابراین به ازای پنج مقدار 0 ، $+\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{5}$ ، $\frac{\sqrt{5}}{5}$ و $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ عبارت C

تعریف نشده است.



$$\frac{x(x-2)}{Ax-B} \rightarrow Ax-B = (x+5)(x-2)$$

$$\Rightarrow Ax-B = x^2 + 2x - 10$$

گزینه ۵۲ • با توجه به رابطه $A+B = \frac{x}{2(x^2-4)}$ و این که $A = \frac{3}{2x-4}$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{3}{2x-4} + B = \frac{x}{2(x^2-4)} \Rightarrow B = \frac{x}{2(x^2-4)} - \frac{3}{2x-4}$$

$$\Rightarrow B = \frac{x}{2(x-2)(x+2)} - \frac{3 \times (x+2)}{2(x-2) \times (x+2)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{x - 3(x+2)}{2(x-2)(x+2)} \Rightarrow B = \frac{x - 3x - 6}{2(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{-2x - 6}{2(x-2)(x+2)} \Rightarrow B = \frac{-x - 3}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{-x-3}{x^2-4}$$

گزینه ۵۳ • ابتدا به کمک تجزیه و مخرج مشترک‌گیری، عبارت

$$\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} + \frac{(b^2-a^2)}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{a-b}{(a-b)(a+b)} + \frac{(b-a)(b+a)}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-a}{a+b} = \frac{a-b+b-a}{a+b} = \frac{0}{a+b} = 0$$

پس حاصل عبارت در هر صورت برابر صفر است.

گزینه ۵۴ • ابتدا عبارت داده شده را ساده‌سازی می‌کنیم:

$$\frac{\Delta b}{\Delta a - \Delta b} - \frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} + \frac{a+b}{-a-b}$$

$$= \frac{\Delta b}{\Delta(a-b)} - \frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)} + \frac{a+b}{-(a+b)}$$

$$= \frac{b}{a-b} - \frac{a}{a-b} - 1 = \frac{b-a}{a-b} - 1 = \frac{-(a-b)}{(a-b)} - 1 = -1 - 1 = -2$$

پس بدون نیاز به مقادیر a و b نتیجه می‌گیریم حاصل عبارت داده شده برابر -2 است.

گزینه ۵۵ • ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} + \frac{xy}{xy + x^2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x(x-y)}{(x-y)(x+y)} + \frac{xy}{x(x+y)} + \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} + 1 = \frac{x+y}{x+y} + 1 = 1 + 1 = 2$$

پس بدون نیاز به مقادیر x و y نتیجه می‌گیریم که حاصل عبارت داده شده همواره برابر 2 است.

$$= \frac{2x^2 - 2x + x + 1 - 2(x^2 - 1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + x + 1 - 2x^2 + 2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{-x+3}{(x+1)^2(x-1)}$$

گزینه ۴۸ • حاصل عبارت سمت چپ تساوی داده شده را به دست آورده و سپس به کمک آن مقدار A را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{Ax-10}{x^2-2x} + \frac{3}{2-x} = \frac{Ax-10}{x(x-2)} + \frac{3}{-(x-2)}$$

$$= \frac{Ax-10}{x(x-2)} - \frac{3}{x-2} = \frac{Ax-10-3 \times x}{x(x-2)} = \frac{\Delta x - 10}{x(x-2)}$$

$$= \frac{\Delta(x-2)}{x(x-2)} = \frac{\Delta}{x} \Rightarrow \frac{\Delta}{x} = \frac{A}{x} \Rightarrow A = \Delta$$

گزینه ۴۹ • حاصل عبارت سمت چپ تساوی را محاسبه کرده و سپس C را به دست می‌آوریم:

$$\frac{Ax-6}{x^2-3x} + \frac{6}{3-x} = \frac{Ax-6}{x(x-3)} + \frac{6}{-(x-3)}$$

$$= \frac{Ax-6}{x(x-3)} - \frac{6}{x-3} = \frac{Ax-6-6x}{x(x-3)} = \frac{2x-6}{x(x-3)}$$

$$= \frac{2(x-3)}{x(x-3)} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{C}{x} \Rightarrow C = 2$$

گزینه ۵۰ • به کمک مخرج مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(2x-1)}{(2x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{Ax + A + 2Bx - B}{2x^2 + x - 1} = \frac{(A+2B)x + (A-B)}{2x^2 + x - 1}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{(A+2B)x + (A-B)}{2x^2 + x - 1} = \frac{7x+1}{2x^2 + x - 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+2B=7 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+2B=7 \\ -A+B=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3B=6 \Rightarrow B=2 \Rightarrow A-2=1 \Rightarrow A=3$$

پس پاسخ مسئله برابر $A-B=3-2=1$ خواهد بود.

گزینه ۵۱ • ابتدا حاصل عبارت سمت چپ تساوی داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{3x-x^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x(3-x)}$$

$$= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{-x(x-3)}$$

$$= \frac{A \times x}{(x-3) \times x} - \frac{B}{x(x-3)} = \frac{Ax-B}{x(x-3)}$$

حالا با توجه به تساوی صورت سؤال باید داشته باشیم:

$$\frac{Ax-B}{x(x-3)} = \frac{x+5}{x} \Rightarrow \frac{Ax-B}{x-3} = x+5$$



گزینه ۵۶ • حاصل صورت و مخرج را جداگانه حساب کرده و سپس بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\text{صورت: } \frac{1}{1-x} - \frac{x}{x+1} = \frac{1(x+1) - x(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{x+1-x+x^2}{1-x^2} = \frac{x^2+1}{1-x^2}$$

$$\text{مخرج: } \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x} = \frac{1(1-x) + x(1+x)}{(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{1-x+x+x^2}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \frac{x^2+1}{1-x^2} = 1$$

گزینه ۵۷ • حاصل صورت و مخرج را جداگانه حساب کرده و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\text{صورت: } \frac{2}{a-1} - \frac{4}{a^2-1} = \frac{2}{a-1} - \frac{4}{(a-1)(a+1)}$$

$$= \frac{2(a+1) - 4}{(a-1)(a+1)} = \frac{2a+2-4}{(a-1)(a+1)} = \frac{2a-2}{(a-1)(a+1)}$$

$$= \frac{2(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{2}{a+1}$$

$$\text{مخرج: } \frac{3}{a+1} - \frac{a+1}{a^2-1} = \frac{3}{a+1} - \frac{a+1}{(a-1)(a+1)}$$

$$= \frac{3}{a+1} - \frac{1}{a-1} = \frac{3(a-1) - (a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{3a-3-a-1}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{2a-4}{(a-1)(a+1)} \Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \frac{2}{a+1} - \frac{2a-4}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{2(a+1)(a-1) - (2a-4)}{(a+1)(2a-4)} = \frac{2(a-1)}{2(a-2)} = \frac{a-1}{a-2}$$

گزینه ۵۸ • ابتدا حاصل A را به ساده‌ترین صورت ممکن حساب می‌کنیم:

$$A = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

حالا با توجه به عبارت A، عبارت B و سپس عبارت C را به دست می‌آوریم:

$$B = \frac{1 - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow B = \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1) + (x-1)}$$

$$B = \frac{x+1-x+1}{x+1+x-1} \Rightarrow B = \frac{2}{2x} \Rightarrow B = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1-B}{1+B} \Rightarrow C = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

پس با توجه به عبارت C نتیجه می‌گیریم A = C.

گزینه ۵۹ • با توجه به طول اضلاع، محیط مثلث را به دست آورده

و برابر $\frac{6x+1}{x^2-1}$ قرار می‌دهیم، سپس مقادیر a و b را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{محیط} = \frac{3}{x^2-1} + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

$$= \frac{3}{(x-1)(x+1)} + \frac{b}{x+1} + \frac{a}{x-1}$$

$$= \frac{3 + b(x-1) + a(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3 + bx - b + ax + a}{x^2-1}$$

$$= \frac{(a+b)x + (3-b+a)}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)x + (3-b+a)}{x^2-1} = \frac{6x+1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ 3-b+a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ a-b=-2 \end{cases} \xrightarrow{+} 2a=4$$

$$\Rightarrow a=2 \Rightarrow 2+b=6 \Rightarrow b=4$$

پس پاسخ مسئله برابر است با:

$$2a + 3b = 2 \times 2 + 3 \times 4 = 4 + 12 = 16$$

گزینه ۶۰ • چون X و Y قرینه معکوس هم هستند، پس داریم

$x = -\frac{1}{y}$ ، بنابراین حاصل عبارت A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A = \frac{2x - \frac{3}{x}}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3y + \frac{2}{y}}{2}} \Rightarrow A = \frac{2(-\frac{1}{y}) - \frac{3}{(-\frac{1}{y})}}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3y + \frac{2}{y}}{2}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-\frac{2}{y} + 3y}{2} + \frac{3y + \frac{2}{y}}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-\frac{2}{y} + 3y + 3y + \frac{2}{y}}{2} \Rightarrow A = \frac{6y}{2} \Rightarrow A = 3y$$

گزینه ۶۱ • فرض کنید اعداد مورد نظر a و b باشند، در این

$$\text{صورت داریم: } a+b = \frac{5}{4}, \quad ab = \frac{3}{2}$$

حالا با تقسیم a+b بر ab نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{10}{12} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{5}{6}$$



۶۵ گزینه **۳۳** با تقسیم عبارت $x^2 + 5x^2 + 7$ بر $3x - 6$ ، خارج قسمت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x^2 + 7 \quad | \quad 3x - 6 \\ - (x^2 - 2x^2) \quad | \quad \frac{x^2}{3} + \frac{7}{3}x + \frac{14}{3} \\ \hline 7x^2 + 7 \\ - (7x^2 - 14x) \\ \hline 14x + 7 \\ - (14x - 28) \\ \hline 35 \end{array}$$

۶۶ گزینه **۳۳** ابتدا مقسوم و مقسوم‌علیه را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \frac{(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 3x - 4)}{(x+1)(x^2 - 16)} \\ &= \frac{(x-4)(x+2)(x+4)(x-1)}{(x+1)(x-4)(x+4)} = \frac{(x+2)(x-1)}{x+1} \\ &= \frac{x^2 + x - 2}{x+1} \end{aligned}$$

پس برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم کافیت عبارت $x^2 + x - 2$ را بر $x + 1$ تقسیم کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \quad | \quad x+1 \\ - (x^2 + x) \quad | \quad x \\ \hline -2 \end{array}$$

پس باقی‌مانده تقسیم برابر -2 است.

۶۷ گزینه **۳۳** به کمک رابطه تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} & P \quad | \quad x^2 + 1 \\ & - \dots \quad x^2 - x + 2 \Rightarrow P = (x^2 + 1)(x^2 - x + 2) + x - 3 \\ & x - 3 \\ & = x^4 - x^3 + 2x^2 + x^2 - x + 2 + x - 3 = x^4 - x^3 + 3x^2 - 1 \\ & \text{پس حاصل جمع ضرایب عددی جملات برابر است با:} \\ & 1 + (-1) + 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

۶۸ گزینه **۳۳** به کمک رابطه تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} & x^2 - x + a \quad | \quad x-a \\ & - \dots \quad x+2 \Rightarrow x^2 - x + a = (x-a)(x+2) + 3a \\ & 3a \\ & \Rightarrow x^2 - x + a = x^2 - ax + 2x - 2a + 3a \\ & \Rightarrow x^2 - x + a = x^2 - (a-2)x + a \Rightarrow a-2=1 \Rightarrow a=3 \end{aligned}$$

۶۹ گزینه **۳۳** به کمک رابطه تقسیم، مقادیر a و b را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & x^2 - 7x + b \quad | \quad x+a \\ & - \dots \quad x-2 \Rightarrow x^2 - 7x + b = (x+a)(x-2) + 5 \\ & 5 \\ & \Rightarrow x^2 - 7x + b = x^2 + ax - 2x - 2a + 5 \end{aligned}$$

۶۲ گزینه **۳۳** با توجه به اطلاعات سؤال، حاصل عبارت را به

$$\begin{aligned} & \text{دست می‌آوریم:} \\ & \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \\ &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \\ &= \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} = \frac{1-b}{b} + \frac{1-a}{a} + \frac{1-c}{c} \\ &= \frac{1}{b} - \frac{b}{b} + \frac{1}{a} - \frac{a}{a} + \frac{1}{c} - \frac{c}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1 - 1 - 1 \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 = 10 - 3 = 7 \end{aligned}$$

۶۳ گزینه **۳۳** ابتدا کسرهای داده‌شده را به کمک اتحادهای مزدوج و مربع سه‌جمله‌ای ساده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac \\ &= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2c(-b) + 2ac = (a-b+c)^2 \\ & a^2 + b^2 + c^2 - 2ac - 2bc + 2ab \\ &= a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2a(-c) + 2b(-c) + 2ab \\ &= (a+b-c)^2 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac}{c^2 - (a^2 + b^2 + 2ab)} \\ & \times \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac - 2bc + 2ab}{(a^2 + c^2 + 2ac) - b^2} \\ &= \frac{(a-b+c)^2}{c^2 - (a+b)^2} \times \frac{(a+b-c)^2}{(a+c)^2 - b^2} \\ &= \frac{(a-b+c)^2 (a+b-c)^2}{(c-a-b)(c+a+b)(a+c-b)(a+c+b)} \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

حالا چون $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = c = 1$ ، نتیجه می‌گیریم $a = 2$ ، $b = 3$ و $c = 1$ ، پس پاسخ مسئله برابر است با:

$$\frac{(2-3+1)(2+3-1)}{(2+3+1)^2} = \frac{0}{36} = 0$$

۶۴ گزینه **۳۳** با تقسیم عبارت $-x^3 + 8x - 12$ بر $x + 3$ باقی‌مانده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} -x^3 + 8x - 12 \quad | \quad x+3 \\ - (-x^3 - 3x^2) \quad | \quad -x^2 + 3x - 1 \\ \hline 3x^2 + 8x - 12 \\ - (3x^2 + 9x) \\ \hline -x - 12 \\ - (-x - 3) \\ \hline -9 \end{array}$$

پس باقی‌مانده تقسیم برابر -9 است.



۷۴ گزینه ۲۲: چون عبارت $2x + 2$ به ازای $x = -1$ برابر صفر

است، پس اگر حاصل عبارت $4x^3 + 10x^2 + 4x + a$ را به ازای $x = -1$ حساب کنیم، حاصل باید برابر -7 شود، در نتیجه داریم:

$$4(-1)^3 + 10(-1)^2 + 4(-1) + a = -7$$

$$\Rightarrow -4 + 10 - 4 + a = -7 \Rightarrow 2 + a = -7 \Rightarrow a = -9$$

۷۵ گزینه ۲۲: باز هم به کمک رابطه تقسیم، باقی‌مانده را محاسبه

کرده و سپس برابر $ax + b$ قرار می‌دهیم تا مقادیر a و b به دست آیند.

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 5x + 4 \quad | \quad x^2 + 3x \\ -(2x^4 + 6x^3) \quad \quad 2x^2 - 6x + 18 \\ \hline -6x^3 - 5x + 4 \\ -(-6x^3 - 18x^2) \\ \hline 18x^2 - 5x + 4 \\ -(18x^2 + 54x) \\ \hline -59x + 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow -59x + 4 = ax + b \Rightarrow a = -59, b = 4$$

پس حاصل $a + b$ برابر است با: $a + b = -59 + 4 = -55$

۷۶ گزینه ۲۲: چندجمله‌ای داده‌شده را بر $4x + 3$ تقسیم کرده و

سپس باقی‌مانده به دست آمده را برابر صفر قرار می‌دهیم. پس داریم:

$$\begin{array}{r} 20x^3 + 23x^2 - 10x + a \quad | \quad 4x + 3 \\ -(20x^3 + 15x^2) \quad \quad 5x^2 + 2x - 4 \\ \hline 8x^2 - 10x + a \\ -(8x^2 + 6x) \\ \hline -16x + a \\ -(-16x - 12) \\ \hline a + 12 \end{array}$$

$$\Rightarrow a + 12 = 0 \Rightarrow a = -12$$

۷۷ گزینه ۲۲: چون عبارت $x - 1$ به ازای $x = 1$ برابر با صفر

است، پس حاصل هر دو عبارت به ازای $x = 1$ یکسان می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow 20(1) + 23(1) - 10(1) + a = +33 + a \\ 2(1) - 9(1) + 9 = 2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow +33 + a = 2 \Rightarrow a = -31$$

۷۸ گزینه ۲۲: دقت کنید که عبارت‌های $x + 1$ و $x - 2$ به

ترتیب به ازای $x = -1$ و $x = 2$ برابر صفر هستند، پس چون باقی‌مانده تقسیم $3x^4 + ax^2 + b$ بر این عبارت‌ها به ترتیب برابر 1 و -2 است، باید داشته باشیم:

$$x = -1 \Rightarrow 3(-1)^4 + a(-1)^2 + b = 1 \Rightarrow 3 + a + b = 1$$

$$\Rightarrow a + b = -2$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + b = x^2 + (a - 2)x + (-2a + 5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7 = a - 2 \Rightarrow a = -5 \\ b = -2a + 5 \Rightarrow b = -2 \times (-5) + 5 \\ \Rightarrow b = 10 + 5 \Rightarrow b = 15 \end{cases}$$

۷۰ گزینه ۲۲: عبارت داده‌شده بر $x - 8$ بخش‌پذیر بوده و دارای

خارج قسمت $x + 2$ است، پس طبق رابطه تقسیم، این عبارت باید دقیقاً برابر $(x + 2)(x - 8)$ باشد، پس داریم:

$$(x + 2)(x - 8) = x^2 - 6x - 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 16 = x^2 + (2m + n)x + (3n + 7m)$$

$$\begin{cases} 2m + n = -6 \\ 3n + 7m = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6m - 3n = +18 \\ 3n + 7m = -16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = 2 \Rightarrow 2 \times 2 + n = -6 \Rightarrow 4 + n = -6 \Rightarrow n = -10$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$$mn + 2 = 2(-10) + 2 = -20 + 2 = -18$$

۷۱ گزینه ۲۲: با تقسیم چندجمله‌ای $2x^3 - 3x^2 + 6$ بر

$x^2 - 5$ باقی‌مانده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 6 \quad | \quad x^2 - 5 \\ -(2x^3 - 10x) \quad \quad 2x - 3 \\ \hline -3x^2 + 10x + 6 \\ -(-3x^2 + 15) \\ \hline 10x - 9 \end{array}$$

$$\Rightarrow 10x - 9 = ax + b \Rightarrow a = 10, b = -9$$

پس پاسخ مسئله برابر است با: $ab = 10(-9) = -90$

۷۲ گزینه ۲۲: به کمک تقسیم، باقی‌مانده را محاسبه کرده و

برابر $ax + b$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 5 \quad | \quad x^2 - 8 \\ -(2x^3 - 16x) \quad \quad 2x - 7 \\ \hline -7x^2 + 16x + 5 \\ -(-7x^2 + 56) \\ \hline 16x - 51 \end{array}$$

$$\Rightarrow 16x - 51 = ax + b \Rightarrow a = 16, b = -51$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$$3a + b = 3 \times 16 - 51 = 48 - 51 = -3$$

۷۳ گزینه ۲۲: کفایت در عبارت $2x^2 - 5x + a$ به جای x

مقدار عددی 2 را قرار داده و حاصل را برابر 5 در نظر بگیریم، پس داریم:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 2x^2 - 5x + a = 2(2)^2 - 5(2) + a$$

$$= 8 - 10 + a = -2 + a \Rightarrow -2 + a = 5 \Rightarrow a = 7$$



۸۲ گزینه • ابتدا توجه کنید که حاصل ضرب طول مستطیل در عرض آن برابر است با:

$$(x+5) \times (x+1) = x^2 + x + 5x + 5 = x^2 + 6x + 5$$

حالا با تقسیم کردن حجم مکعب مستطیل بر حاصل به دست آمده، ارتفاع آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 11x^2 + 4x - 5 \quad | \quad x^2 + 6x + 5 \\ -(2x^3 + 12x^2 + 10x) \\ \hline -x^2 - 6x - 5 \\ -(-x^2 - 6x - 5) \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow h = 2x - 1$$

حالا برای این که ارتفاع مکعب مستطیل نصف طول آن باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= \frac{x+5}{2} \xrightarrow{\times 2} 2(2x-1) = x+5 \\ \Rightarrow 4x - 2 &= x + 5 \Rightarrow 4x - x = 5 + 2 \Rightarrow 3x = 7 \\ \Rightarrow x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

۸۳ گزینه •• چون عدد ۱ ریشه معادله است، پس مقدار عبارت سمت چپ تساوی به ازای $x=1$ برابر صفر می‌باشد، یعنی این عبارت بر $x-1$ بخش پذیر است. حالا با تقسیم این عبارت بر $x-1$ ، دو ریشه دیگر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad | \quad x - 1 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -5x^2 + 11x - 6 \\ -(-5x^2 + 5x) \\ \hline 6x - 6 \\ -(6x - 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= (x-1)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

پس دو ریشه دیگر عبارت‌اند از اعداد ۲ و ۳ که حاصل جمع آن‌ها نیز برابر ۵ است.

۸۴ گزینه •• حاصل عبارت داده شده به ازای $x=1$ باید برابر ۶ باشد، پس داریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow (97x - 96)^{2018} + (96x - 95)^{2017} \\ + (95x - 94)^{2016} + mx + n \\ = (97 - 96)^{2018} + (96 - 95)^{2017} \\ + (95 - 94)^{2016} + m + n = 6 \\ \Rightarrow 1 + 1 + 1 + m + n = 6 \Rightarrow m + n = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=2 \Rightarrow 3(2)^4 + a(2)^2 + b = -2 \Rightarrow 48 + 4a + b = -2 \text{ و} \\ \Rightarrow 4a + b = -50 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 4a + b = -50 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -a - b = 2 \\ 4a + b = -50 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 3a = -48 \Rightarrow a = -16 \Rightarrow -16 + b = -2 \Rightarrow b = 14$$

پس حاصل عبارت $(a-b)^{-1}$ برابر است با:

$$(-16 - 14)^{-1} = (-30)^{-1} = \frac{1}{-30} = -\frac{1}{30}$$

۷۹ گزینه •• چون $x^3 + ax^2 - bx + 4$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر می‌باشد، پس باقی مانده تقسیم این عبارت بر $x-2$ و $x+1$ برابر صفر است، یعنی حاصل این عبارت به ازای $x=-1$ و $x=2$ باید برابر صفر باشد، پس داریم:

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^3 + a(-1)^2 - b(-1) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + a + b + 4 = 0 \Rightarrow a + b = -3$$

$$x = 2 \Rightarrow 2^3 + a(2)^2 - b(2) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 8 + 4a - 2b + 4 = 0 \Rightarrow 4a - 2b = -12$$

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 4a - 2b = -12 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 2a + 2b = -6 \\ 4a - 2b = -12 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 6a = -18 \xrightarrow{(\div 6)} a = -3 \Rightarrow -3 + b = -3 \Rightarrow b = 0$$

بنابراین باید باقی مانده تقسیم $-3x^2 + 0x + 5 = -3x^2 + 5$ بر $x - (-3)(0 - 1) = x - 3$ را به دست آوریم که برای محاسبه باقی مانده نیز کافیست حاصل عبارت $-3x^2 + 5$ را به ازای $x=3$ به دست آوریم.

$$x = 3 \Rightarrow -3x^2 + 5 = -3(3)^2 + 5 = -27 + 5 = -22$$

۸۰ گزینه •• با توجه به رابطه «ارتفاع \times قاعده = مساحت» برای

به دست آوردن ارتفاع مثلث کافیست دو برابر عبارت $3x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ را بر $2x - 2$ تقسیم کنیم. در این صورت، عبارت خارج قسمت برابر با ارتفاع مثلث خواهد بود.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - x - 2 \quad | \quad 2x - 2 \\ -(6x^2 - 4x) \\ \hline 3x - 2 \\ -(3x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

پس ارتفاع مثلث برابر با $2x + 1$ خواهد بود.

۸۱ گزینه • می‌دانیم که مساحت مستطیل بر عرض آن بخش پذیر است، پس باقی مانده تقسیم عبارت $5x^4 + 13x^2 + a$ بر $x^2 + 2$ برابر با صفر خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 13x^2 + a \quad | \quad x^2 + 2 \\ -(5x^4 + 10x^2) \\ \hline 3x^2 + a \\ -(3x^2 + 6) \\ \hline a - 6 \end{array} \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

پس با توجه به مقدار m کافی است باقی‌مانده تقسیم $4x^2 - 17x - 8$ بر $x - 10$ را به دست آوریم که برای این کار نیز کافیست حاصل عبارت اولیه را به ازای $x = 10$ حساب کنیم:

$$4(10)^2 - 17(10) - 8 = 400 - 170 - 8 = 222$$

گزینه **۸۸** حاصل عبارت A به ازای $x = y$ برابر صفر است. بنابراین اگر در عبارت A به جای همه x ها عبارت y را قرار دهیم، حاصل کلی عبارت باید برابر با صفر شود، پس داریم:

$$x = y \Rightarrow A = 2y^2 + my^2 + y \times y - 4y + 4y$$

$$= 2y^2 + my^2 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2 + m + 1)y^2 = 0 \Rightarrow (3 + m)y^2 = 0 \Rightarrow m + 3 = 0$$

$$\Rightarrow m = -3$$

حالا برای به دست آوردن خارج قسمت تقسیم A بر $x - y$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3y^2 + xy - 4x + 4y \quad | \quad x - y \\ -(2x^2 - 3y^2 + 2xy - 2xy) \quad | \quad 2x + 3y - 4 \\ \hline - 4x + 4y \\ - (-4x + 4y) \\ \hline 0 \end{array}$$

حاصل جمع ضرایب عددی x و y در خارج قسمت برابر است با:

$$2 + 3 = 5$$

گزینه **۸۹** برای این که حاصل عبارت A همواره برابر عددی صحیح باشد، باید عبارت صورت بر عبارت مخرج بخش پذیر باشد، یعنی اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، باقی‌مانده برابر صفر شود، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{array}{r} x^2 + x^2 - 4x + 2a \quad | \quad x + 1 \\ -(x^2 + x^2) \quad | \quad x^2 - 4 \\ \hline - 4x + 2a \\ - (-4x - 4) \\ \hline 2a + 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2a + 4 = 0 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

گزینه **۸۵** می‌دانیم $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ، پس برای این که A بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد، A هم باید بر $x - 1$ بخش پذیر باشد و هم بر $x + 1$ ، یعنی حاصل A به ازای $x = 1$ و $x = -1$ باید برابر صفر شود؛ بنابراین داریم:

$$x = 1 \Rightarrow A = m \times 1^{1397} + n \times 1^{2018} + 2 \times 1 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow m + n - 3 = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow A = m(-1)^{1397} + n(-1)^{2018} + 2 \times (-1) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow -m + n - 7 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = 3 \\ -m + n = 7 \end{cases} \xrightarrow{+} 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

$$\Rightarrow m + 5 = 3 \Rightarrow m = -2$$

در نتیجه حاصل mn برابر است با: $5 \times (-2) = -10$

گزینه **۸۶** حاصل عبارت A به ازای $x = 2$ باید برابر صفر شود؛ بنابراین داریم:

$$x = 2 \Rightarrow A = (2 \times 2 + 1)^{98} + (3 - 14 \times 2)^m = 0$$

$$\Rightarrow 5^{98} + (-25)^m = 0 \Rightarrow 5^{49 \times 2} + (-25)^m = 0$$

$$\Rightarrow (5^2)^{49} + (-25)^m = 0 \Rightarrow 25^{49} + (-25)^m = 0$$

$$\Rightarrow (-25)^m = -25^{49} \Rightarrow (-25)^m = (-25)^{49} \Rightarrow m = 49$$

گزینه **۸۷** حاصل عبارت $4x^2 - 17x - 8$ به ازای $x = m$ باید برابر با 7 باشد، پس داریم:

$$4(m)^2 - 17m - 8 = 7 \Rightarrow 4m^2 - 17m - 15 = 0$$

حالا عبارت سمت چپ تساوی را به کمک روش A تجزیه کرده و m را پیدا می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} A &= 4m^2 - 17m - 15 \\ \Rightarrow 4A &= (4m)^2 - 17(4m) - 60 \\ \Rightarrow 4A &= (4m - 20)(4m + 3) \\ \Rightarrow 4A &= 4(m - 5)(4m + 3) \\ \Rightarrow A &= (m - 5)(4m + 3) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow (m - 5)(4m + 3) = 0 \Rightarrow m = 5 \quad \checkmark, m = -\frac{3}{4} \quad \times$$

