

فصل پنجم

عبارت‌های جبری

درس اول: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

عبارت جبری

عبارت‌های جبری در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات به خصوص جبر، کاربردهای فراوانی دارند. این عبارت‌ها در پیدایش مفهومی به نام **اتحادهای جبری** نقش بسیار مهمی را ایفا کرده‌اند. در این فصل از کتاب درسی با مفهوم اتحاد و چند اتحاد جبری مهم و برخی از دیگر مباحث مربوط به عبارت‌های جبری آشنا می‌شویم. اما قبل از شروع، بهتر است ابتدا مطالب مربوط به عبارت‌های جبری که در سال‌های گذشته با آن‌ها آشنا شدید را یک مرتبه دیگر یادآوری کنیم.

• **تعریف متغیر:** در جبر، **متغیرها** نمادهایی برای بیان **عددهای نامعلوم** و یا **مقادیر غیرمشخص** هستند. معمولاً متغیرها را با استفاده از حروف انگلیسی نمایش می‌دهند. به عنوان مثال اگر بخواهیم فرمولی برای محاسبه محیط یک مربع ارائه دهیم که مقدار عددی طول ضلع آن مشخص نیست (متغیر است)، می‌توانیم فرض کنیم طول ضلع آن برابر x است و نتیجه بگیریم محیط آن برابر $4 \times x = 4x$ است.

• **تعریف عبارت‌های جبری:** هر عبارتی که شامل یک یا چند عدد و متغیر و عمل‌هایی مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بین آن‌ها باشد را عبارت جبری می‌نامند، مثلاً عبارت‌های زیر همگی جبری‌اند:

$$a, 2b, \frac{2}{c}, \sqrt{2}x^2yz, 2x + 3yz, \frac{m^2}{4n}, \frac{p^2 + q^3}{2n - 3t^4}, (a + b)(c + d), \dots$$

• **تعریف یک جمله‌ای‌های جبری:** حاصل ضرب یک عدد حقیقی در یک یا چند متغیر با توان‌های صحیح و نامنفی ($0, 1, 2, \dots$) یک عبارت جبری تولید می‌کند که به آن **یک جمله‌ای جبری** می‌گویند. هر یک جمله‌ای از یک ضریب عددی یا قسمت عددی (عددی که در متغیرها ضرب می‌شود) و قسمت حرفی (متغیرها) تشکیل می‌شود، مثلاً عبارت‌های زیر همگی یک جمله‌ای‌اند:

$$8, x, -7x, 6x^9, \frac{1}{5}ab, -\sqrt{5}m^2n^3p, \pi x^5y, \dots$$

$$3xyz^2 = \underbrace{3}_{\text{قسمت حرفی}} \times \underbrace{xyz^2}_{\text{ضریب عددی}}$$

آقا اجازه! چرا 11 یک جمله‌ایه؟ مگه نباید متغیر داشته باشه؟!

نقیر! ... چندتا متغیر بگو ببینم ...

فب مثلاً x و y ...

هالا بگو ببینم می‌شه تو به دونه یک جمله‌ای، توان به متغیر صفر باشه یا نه؟

آقا بله، چون تو تعریف گفتیم توان متغیرها باید صحیح و نامنفی باشه، صفرم که هم صحیبه، هم نامنفی، پس می‌شه ...

آفرین! هالا آگه یادت باشه قبلاً گفتیم هر عدد به توان صفر مساوی یک می‌شه، پس می‌تونیم 11 رو به کمک همون دوتا متغیری که گفتی به صورت $11x^0y^0$ نشون بدیم که اینم همون $11 \times 1 \times 1 = 11$ هست، پس به این ترتیب چون $11x^0y^0$ یک جمله‌ایه، در نتیجه 11 هم یک جمله‌ای محسوب می‌شه ...

مثال در هر مورد تعیین کنید که چرا عبارت‌های داده‌شده، یک جمله‌ای نیستند.

الف) $\frac{-7}{x^3}$

ب) 9^x

پ) $11\sqrt{y}$

ت) $\sqrt[3]{5k^2}$

ث) $|3a|$

ج) $\sqrt{n^2}$

چ) $2xy + 5m$

$$\frac{-7}{x^3} = -7 \times \frac{1}{x^3} = -7x^{-3}$$

پاسخ الف) با توجه به قانون توان منفی می‌توان عبارت داده‌شده را به صورت روبه‌رو نوشت:

حالا چون توان متغیر در این عبارت، منفی است؛ پس یک جمله‌ای محسوب نمی‌شود.



با توجه به تعریف یک جمله‌ای‌ها، متغیر نمی‌تواند به عنوان توان یک عدد حقیقی قرار بگیرد، پس چون 9^x شامل توان متغیر است، بنابراین یک جمله‌ای نیست.

می‌دانیم $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ ، پس $11\sqrt{y} = 11y^{\frac{1}{2}}$ ؛ بنابراین چون توان متغیر در این عبارت عدد صحیح و نامنفی نیست، پس یک جمله‌ای نخواهد بود.

با توجه به قوانین مربوط به رادیکال‌ها داریم:

$$\sqrt[3]{\Delta k^2} = \sqrt[3]{\Delta} \times \sqrt[3]{k^2} = \sqrt[3]{\Delta} \times k^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\Delta k^{\frac{2}{3}}}$$

مانند قسمت قبل می‌توانیم نتیجه بگیریم که عبارت به دست آمده یک جمله‌ای نیست.

عبارت‌های شامل **قدر مطلق** یک جمله‌ای محسوب نمی‌شوند، پس $|3a|$ چون شامل قدر مطلق است، یک جمله‌ای نیست.

دقت کنید که $\sqrt{n^2}$ برابر $|n|$ است، نه n ! پس مانند قسمت قبل این عبارت هم یک جمله‌ای نیست.

عبارت $2xy + 5m$ شامل دو یک جمله‌ای $2xy$ و $5m$ است که بین آن‌ها علامت جمع قرار گرفته، پس با توجه به تعریف یک جمله‌ای‌ها این عبارت هم نمی‌تواند یک جمله‌ای به حساب بیاید.

ضرب یک جمله‌ای‌ها

اگر بخواهیم چندتا یک جمله‌ای را در هم ضرب کنیم، باید ضرایب عددی هر کدام از آن‌ها را در هم و سپس قسمت‌های حرفی آن‌ها را نیز در هم ضرب کنیم. توجه کنید که اگر یک جمله‌ای‌ها شامل متغیرهای مشترک بودند، با توجه به قوانین توان کافی است توان‌های آن متغیر در یک جمله‌ای‌ها را با هم جمع کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید.

الف) $3(-5x \times 9x^3)$

ب) $(\frac{3}{4}m^2n^3)^3$

پ) $(4k^2)^3 \times (\frac{1}{4}k^5p)^2$

ت) $(\frac{2}{3}mn^2)^2 (3m^2n)^2 (-\frac{5}{4}n^2p^4)^3$

پاسخ با استفاده از قوانین توان و ضرب یک جمله‌ای‌ها حاصل هر قسمت را به دست می‌آوریم:

الف) $3(-5x \times 9x^3) = 3(-45x^{1+3}) = 3 \times (-45x^4) = -135x^4$

ب) $(\frac{3}{4}m^2n^3)^3 = (\frac{3}{4})^3 \times (m^2)^3 \times (n^3)^3 = \frac{27}{64} \times m^{2 \times 3} \times n^{3 \times 3} = \frac{27}{64}m^6n^9$

پ) $(4k^2)^3 \times (\frac{1}{4}k^5p)^2 = 4^3 \times (k^2)^3 \times (\frac{1}{4})^2 \times (k^5)^2 \times p^2 = 64 \times k^6 \times \frac{1}{16} \times k^{10} \times p^2 = 4k^{16}p^2$

ت) $(\frac{2}{3}mn^2)^2 (3m^2n)^2 (-\frac{5}{4}n^2p^4)^3 = (\frac{2}{3})^2 \times m^2 \times (n^2)^2 \times 3^2 \times (m^2)^2 \times n^2 \times (-\frac{5}{4})^3 \times (n^2)^3 \times (p^4)^3$

$$= \frac{4}{9} \times \underline{m^2} \times \underline{n^4} \times 9 \times \underline{m^4} \times \underline{n^2} \times (-\frac{125}{64}) \times \underline{n^6} \times p^{12} = \frac{4}{9} \times 9 \times (-\frac{125}{64}) \times m^6 \times n^{12} \times p^{12} = -\frac{125}{16}m^6n^{12}p^{12}$$

یک جمله‌ای‌های متشابه: دو یک جمله‌ای به شرطی با هم متشابه‌اند که قسمت حرفی آن‌ها یکسان باشد. یعنی هم متغیرها و هم توان

مربوط به هر متغیر در دو یک جمله‌ای با هم یکسان باشد. مثلاً یک جمله‌ای‌های $2\sqrt{3}xy^3$ و $-\frac{xy^3}{5}$ با هم متشابه‌اند، اما یک جمله‌ای‌های $5m^2n$ و $-5mn^2$ متشابه نیستند.

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها

برای جمع و تفریق دو یا چند یک جمله‌ای متشابه، کافی است ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع یا از هم کم کرده و سپس عدد به دست آمده را در قسمت حرفی مشترک یک جمله‌ای‌ها ضرب کنیم. توجه کنید که اگر دو یک جمله‌ای با هم متشابه نباشند، نمی‌توانیم آن‌ها را با هم جمع و تفریق کنیم.



مثال حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $3x + 9x$ ب) $5mnp - 7pnm + 11nmp$ پ) $7xy^2 - 6xy - (\frac{1}{3}x^2y + \frac{3}{4}xy)$

ت) $\frac{2}{3}x^2y^3(\frac{3}{5}x^4 - \frac{9}{10}y^2) - \frac{3}{7}xy^2(\frac{7}{5}xy^4 + \frac{21}{10}x^5y)$ ث) $(a - b + c)(b - a - c)$

پاسخ در هر قسمت ابتدا یک جمله‌ای‌های متشابه را پیدا کرده و سپس با هم جمع و تفریق می‌کنیم تا عبارت ساده شود.

الف $3x + 9x = (3 + 9) \times x = 12 \times x = 12x$

ب $5mnp - 7pnm + 11nmp = 5mnp - 7mnp + 11mnp = (5 - 7 + 11)mnp = 9mnp$

توجه کنید که هر سه جمله این عبارت متشابه‌اند، یعنی جای متغیرها در یک جمله‌ای‌های متشابه اهمیتی ندارد بلکه فقط نوع و توان متغیرها حائز اهمیت است.

پ $7xy^2 - 6xy - (\frac{1}{3}x^2y + \frac{3}{4}xy) = 7xy^2 - 6xy - \frac{1}{3}x^2y - \frac{3}{4}xy = 7xy^2 - \frac{1}{3}x^2y + (-6 - \frac{3}{4})xy$
 $= 7xy^2 - \frac{1}{3}x^2y + (\frac{-24-3}{4})xy = 7xy^2 - \frac{1}{3}x^2y - \frac{27}{4}xy$

ت $\frac{2}{3}x^2y^3(\frac{3}{5}x^4 - \frac{9}{10}y^2) - \frac{3}{7}xy^2(\frac{7}{5}xy^4 + \frac{21}{10}x^5y) = \frac{2}{5}x^6y^3 - \frac{3}{5}x^2y^5 - \frac{3}{5}x^2y^5 - \frac{9}{10}x^6y^3$
 $= (\frac{2}{5} - \frac{9}{10})x^6y^3 + (-\frac{3}{5} - \frac{3}{5})x^2y^5 = -\frac{1}{10}x^6y^3 - \frac{6}{5}x^2y^5$

ث $(a - b + c)(b - a - c) = ab - a^2 - ac - b^2 + ab + bc + bc - ac - c^2$
 $= (1+1)ab + (1+1)bc + (-1-1)ac - a^2 - b^2 - c^2 = 2ab + 2bc - 2ac - a^2 - b^2 - c^2$

آقا اجازه! حاصل عبارت قسمت ۵ تو سوال قبل یک جمله‌ای نیست، تو سال‌های قبل فوندیما ولی اسمش رو یادمون رفته! پی بود اسمشون؟

پندجمله‌ای! در واقع عبارت‌هایی که از جمع و تفریق پندتا یک جمله‌ای به دست میان رو، بهشون می‌گیم پندجمله‌ای.

آقا بیفشید، فکر کنم اشتباه گفتید!!! آگه همه یک جمله‌ای‌هایی که با هم جمع می‌کنیم، متشابه باشن (مثل قسمت یک تو سوال قبل) که حاصل دوباره می‌شه یک جمله‌ای!

نباید بگیم آگه پندتا یک جمله‌ای غیرمتشابه رو با هم جمع کنیم، به پندجمله‌ای درست می‌شه؟

آفرین! دقت بالایی داری، اما نه! در واقع هر یک جمله‌ای، خودش به پندجمله‌ای هم محسوب می‌شه، پس فرقی نداره جمله‌ها متشابه باشن یا نباشن.

نکته برای به دست آوردن تعداد جمله‌های یک چندجمله‌ای، ابتدا آن را تا حد امکان ساده می‌کنیم (جمله‌های متشابه را با هم جمع و تفریق می‌کنیم) و سپس تعداد جمله‌های عبارت به دست آمده را می‌شماریم.

مثال تعداد جمله‌های چندجمله‌ای‌های زیر را به دست آورید.

الف) $5a + 6b - 7$ ب) $2x - 3y + 3x - 7y$

پاسخ الف چون در عبارت داده‌شده هیچ کدام از یک جمله‌ای‌ها متشابه نیستند، پس تعداد جمله‌ها به صورت زیر به دست می‌آید.

عبارت سه جمله‌ای است. $\underbrace{5a + 6b - 7}_{\text{جمله سوم}} \underbrace{\quad}_{\text{جمله دوم}} \underbrace{\quad}_{\text{جمله اول}}$

ب این عبارت ۴ جمله‌ای نیست! همان‌طور که گفتیم اول باید جمله‌های متشابه را ساده‌سازی کنیم و بعد تعداد جمله‌ها را بشماریم، پس داریم:

عبارت دو جمله‌ای است. $\underline{2x - 3y} + \underline{3x - 7y} = \underline{5x} - \underline{10y}$
 جمله دوم جمله اول



تست اگر a و b دو عدد حقیقی و x یک متغیر باشند به طوری که عبارت $ax^2 - 2bx + \frac{3x}{4} - x^2 - \frac{5x^2}{3}$ یک جمله‌ای باشد، آن‌گاه حاصل $a - b$ برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) $\frac{29}{24}$ (۲) $\frac{31}{24}$ (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{35}{24}$

پاسخ گزینه ۲ چون a و b عددهای حقیقی‌اند، می‌توانیم عبارت داده‌شده را به صورت زیر ساده‌سازی کنیم:

$$ax^2 - 2bx + \frac{3x}{4} - x^2 - \frac{5x^2}{3} = (a - \frac{5}{3})x^2 + (-2b + \frac{3}{4})x - x^2$$

حالا توجه کنید که اگر بخواهیم عبارت بالا شامل تنها یک جمله شود، باید ضرایب عددی x و x^2 را برابر صفر قرار دهیم، در این صورت به یک جمله‌ای $-x^2 = -x^2 + 0x + 0x^2$ می‌رسیم. پس داریم:

$$\begin{cases} 1) a - \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \\ 2) -2b + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow -2b = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow a - b = \frac{5}{3} - \frac{3}{8} = \frac{40 - 9}{24} = \frac{31}{24}$$

ضرب چند جمله‌ای‌ها

یکی از مباحث مهم و پرکاربرد مربوط به عبارت‌های جبری، ضرب چند جمله‌ای‌ها است. در سال‌های قبل با ضرب یک جمله‌ای در چند جمله‌ای و چند جمله‌ای در چند جمله‌ای آشنا شدیم. در این جا یک بار دیگر این مطالب را مرور می‌کنیم. برای به دست آوردن حاصل ضرب دو چند جمله‌ای باید تک‌تک جمله‌های آن‌ها را (با توجه به قانون ضرب یک جمله‌ای‌ها) در هم ضرب کنیم.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن به دست آورید.

- الف) $3x^2(\Delta xy - 7x^2z^5)$ ب) $(\Delta x^2 - 4y^3)(4x^2 + 5y^2)$
 پ) $(a - 2b)(2a + 3c) - (6ac - 4ab)$ ت) $(m + n)(n - p)(p + m)$

پاسخ با توجه به توضیحات بالا داریم:

الف) $3x^2(\Delta xy - 7x^2z^5) = 3x^2 \times \Delta xy + 3x^2 \times (-7x^2z^5) = 15x^3y - 21x^4z^5$

ب) $(\Delta x^2 - 4y^3)(4x^2 + 5y^2) = 20x^4 + 25x^2y^2 - 16x^3y^3 - 20y^5$

پ) $(a - 2b)(2a + 3c) - (6ac - 4ab) = 2a^2 + 3ac - 4ab - 6bc - 6ac + 4ab = 2a^2 - 3ac - 6bc$

عبارت قسمت (ت) شامل سه پرانتز است که در هم ضرب شده‌اند. برای به دست آوردن حاصل این عبارت کافی است ابتدا دوتا از پرانتزها را در هم ضرب کنیم و سپس حاصل ضرب آن‌ها را در پرانتز سوم ضرب کنیم، در این صورت داریم:

ت) $(m + n)(n - p)(p + m) = (mn - mp + n^2 - np)(p + m)$
 $= \cancel{mnp} + m^2n - mp^2 - m^2p + n^2p + n^2m - np^2 - \cancel{mnp}$
 $= m^2n - mp^2 - m^2p + n^2p + n^2m - np^2$

تست اگر $A = 2x + y$ ، $B = 3y - 2x$ و $C = 4x - 2y$ ، آن‌گاه مجموع ضرایب عددی حاصل عبارت $(2A - B)(3B - 2C)$ پس از ساده‌سازی چند است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۶ (۴) -۶

پاسخ گزینه ۲ ابتدا حاصل عبارت‌های $2A - B$ و $3B - 2C$ را به دست می‌آوریم و سپس حاصل‌های به دست آمده را در هم ضرب می‌کنیم.

$$2A - B = 2(2x + y) - (3y - 2x) = 4x + 2y - 3y + 2x = 6x - y$$



$$3B - 2C = 3(3y - 2x) - 2(4x - 2y) = 9y - 6x - 8x + 4y = 13y - 14x$$

$$\Rightarrow (2A - B)(3B - 2C) = (6x - y)(13y - 14x) = 78xy - 84x^2 - 13y^2 + 14xy = 92xy - 84x^2 - 13y^2$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ضرایب عددی حاصل عبارت} = 92 + (-84) + (-13) = -5$$

بسیار فب! تا الان بیشتر مطالب مورد نیاز این فصل که در سال‌های قبل فواید بودیم را مرور کردیم، از این قسمت درس به بعد بیشتر مطالبی که می‌فوانیم بیدید و مربوط به سال نهم هستند، پس با دقت و تمرکز بیشتر این درس را دنبال کنید. 😊

درجه یک جمله‌ای‌ها و چند جمله‌ای‌ها

الف) درجه یک جمله‌ای‌ها نسبت به متغیرها: درجه هر یک جمله‌ای نسبت به یک متغیر برابر است با توان آن متغیر در آن یک جمله‌ای، مثلاً درجه یک جمله‌ای $3x^2y^3z$ نسبت به x برابر ۲، نسبت به y برابر ۳ و نسبت به z برابر یک است. به همین ترتیب درجه یک جمله‌ای نسبت به چند متغیر را برابر مجموع توان‌های آن متغیرها، تعریف می‌کنیم. مثلاً در یک جمله‌ای بالا درجه نسبت به x و y برابر $2 + 3 = 5$ و درجه نسبت به تمام متغیرها برابر $2 + 3 + 1 = 6$ است.

مثال در هر قسمت درجه یک جمله‌ای‌های زیر نسبت به متغیرهای خواسته شده را به دست آورید.

الف) $5a^{10}b^4c^9$ (نسبت به a)

ب) $-\frac{3}{\sqrt{5}}m^7n^{12}p^9$ (نسبت به همه متغیرها)

پ) $12x^8y^{12}z^2k^{14}$ (نسبت به x ، k و t)

پاسخ الف) درجه برابر توان a ، یعنی ۱۰ است.

ب) کافی است برای رسیدن به پاسخ مسئله توان همه متغیرها (m ، n و p) را با هم جمع کنیم، پس پاسخ مسئله می‌شود:

$$7 + 12 + 9 = 28$$

پ) دقت کنید که یک جمله‌ای $12x^8y^{12}z^2k^{14}$ شامل متغیر t نیست، پس توان t در این یک جمله‌ای برابر صفر است و در نتیجه

$$8 + 0 + 14 = 22$$

درجه نسبت به x ، t و k برابر است با:

مثال اگر درجه یک جمله‌ای $5x^a y^3$ نسبت به x برابر ۷ باشد و درجه یک جمله‌ای $7x^3 y^a z^b$ نسبت به همه متغیرها برابر ۱۵ باشد، آن گاه حاصل $a - b$ چه قدر است؟ (a و b اعداد صحیح و نامنفی‌اند).

پاسخ چون توان x در یک جمله‌ای $5x^a y^3$ برابر a است، پس باید داشته باشیم $a = 7$. به همین ترتیب چون درجه $7x^3 y^a z^b$

$$3 + a + b = 15 \Rightarrow 3 + 7 + b = 15 \Rightarrow b = 5$$

نسبت به همه متغیرها برابر ۱۵ است، پس باید داشته باشیم:

$$a - b = 7 - 5 = 2$$

در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با:

تست فرض کنید a عددی حقیقی و مخالف صفر است و درجه یک جمله‌ای $\sqrt{8ax^{\frac{a+4}{2}}y^5z^{10}}$ نسبت به x ، ۳ برابر درجه این یک جمله‌ای نسبت به z است. در این صورت ضریب عددی این یک جمله‌ای کدام است؟

$$8\sqrt{2} \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$4\sqrt{2} \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

پاسخ گزینه ۲: چون درجه یک جمله‌ای نسبت به x ، سه برابر درجه یک جمله‌ای نسبت به z است، پس باید داشته باشیم:

$$x \text{ توان} = 3 \times z \text{ توان} \Rightarrow \frac{a+4}{2} = 3 \times \frac{3a-4}{10} \xrightarrow{(\times 20)} 10(a+4) = 2 \times 3 \times (3a-4)$$

$$\Rightarrow 10a + 40 = 18a - 24 \Rightarrow 64 = 8a \Rightarrow a = 8$$

$$\sqrt{8a} = \sqrt{8 \times 8} = \sqrt{64} = 8$$

حالا با توجه به مقدار عددی a ، ضریب عددی چندجمله‌ای برابر می‌شود با:



مثال درجه چندجمله‌ای‌های زیر را نسبت به متغیرهای خواسته شده در هر قسمت به دست آورید.

(الف) $2x^2y - 5x^6z^5 + \sqrt{7}a^9x^5$ (نسبت به x) (ب) $2a^2b^7m + 3a^5x^2b - 4a^2b^7p^3$ (نسبت به b)

پاسخ الف ابتدا درجه هر جمله نسبت به x را تعیین کرده و سپس بزرگ‌ترین درجه را درجه چندجمله‌ای نسبت به x در نظر می‌گیریم:

$$\text{درجه چندجمله‌ای نسبت به } x = 6 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2y : 2 \\ -5x^6z^5 : 6 \\ \sqrt{7}a^9x^5 : 5 \end{cases}$$

ب ابتدا درجه هر جمله نسبت به متغیر b را حساب می‌کنیم:

$$\text{درجه چندجمله‌ای نسبت به } b = 7 \Rightarrow \begin{cases} 2a^2b^7m : 7 \\ 3a^5x^2b : 1 \\ -4a^2b^7p^3 : 7 \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید در بین درجه‌های به دست آمده دو تا از درجه‌ها با هم برابرند، در این صورت فرقی نمی‌کند که کدام یک از آن‌ها را به عنوان درجه چندجمله‌ای نسبت به متغیر مورد نظر انتخاب کنیم، بلکه تنها کافی است عددی انتخاب شود که بقیه اعداد یا کوچک‌تر از آن باشند یا مساوی آن. پس در این جا می‌توانیم نتیجه بگیریم که درجه چندجمله‌ای نسبت به b برابر ۷ است.

نکته برای به دست آوردن درجه یک چندجمله‌ای نسبت به تمام متغیرهایش، ابتدا درجه هر جمله نسبت به تمام متغیرهایش را حساب می‌کنیم و سپس بزرگ‌ترین عدد به دست آمده (عددی که بقیه اعداد یا مساوی آن هستند یا کوچک‌تر از آن) را برابر درجه چندجمله‌ای نسبت به تمام متغیرها در نظر می‌گیریم. توجه کنید که درجه یک چندجمله‌ای همان درجه چندجمله‌ای نسبت به تمام متغیرهایش است.

مثال درجه هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را بدست آورید.

(الف) $5a^2x^4y^3 - 4km^2n^3 - \frac{2m^2z^5p}{5} + \frac{u^7}{7}$

(ب) $3a^5bc^6 - 7m^2a^6p^8 + \sqrt{3}n^3p^3k^3t^3 - \frac{9}{4}a^8q^8$

پاسخ الف در هر جمله درجه نسبت به همه متغیرها را مشخص کرده و سپس بزرگ‌ترین درجه را به عنوان درجه چندجمله‌ای نسبت به همه متغیرها انتخاب می‌کنیم.

$5a^2x^4y^3 \Rightarrow$ متغیرها: $a, x, y \Rightarrow$ درجه نسبت به تمام متغیرها $2 + 4 + 3 = 9$

$-4km^2n^3 \Rightarrow$ متغیرها: $k, m, n \Rightarrow$ درجه نسبت به تمام متغیرها $1 + 2 + 3 = 6$

$-\frac{2m^2z^5p}{5} \Rightarrow$ متغیرها: $m, z, p \Rightarrow$ درجه نسبت به تمام متغیرها $2 + 5 + 1 = 8$

$\frac{u^7}{7} \Rightarrow$ متغیرها: $u \Rightarrow$ درجه نسبت به تمام متغیرها 7

در بین اعداد به دست آمده ۹ از همه بزرگ‌تر است، پس درجه چندجمله‌ای در این سؤال نسبت به تمام متغیرها برابر ۹ است.

ب درجه چندجمله‌ای را نسبت به تمام متغیرها حساب کنیم.

$3a^5bc^6 \Rightarrow$ درجه نسبت به متغیرها $5 + 1 + 6 = 12$, $-7m^2a^6p^8 \Rightarrow$ درجه نسبت به متغیرها $2 + 6 + 8 = 16$

$\sqrt{3}n^3p^3k^3t^3 \Rightarrow$ درجه نسبت به متغیرها $3 + 3 + 3 + 3 = 12$, $-\frac{9}{4}a^8q^8 \Rightarrow$ درجه نسبت به متغیرها $8 + 8 = 16$

چون بزرگ‌ترین عدد به دست آمده در بین اعداد بالا برابر ۱۶ است، نتیجه می‌گیریم درجه چندجمله‌ای مورد نظر برابر ۱۶ است.

فب! 😊 حالا که فوب با درجه یک جمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌ها نسبت به متغیرها آشنا شدید، بریم چندتا مثال دیگه با هم حل کنیم تا با انواع سوالایی که تو این زمینه وجود داره آشنا بشید ...

مثال اگر درجه چندجمله‌ای $5a^3b^6 - 7a^10k^2 + \sqrt{2}a^{p+3}$ نسبت به متغیر a برابر ۱۰ باشد، آن‌گاه p چند مقدار عددی مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (p عددی طبیعی است).

پاسخ درجه هر جمله در عبارت $5a^3b^6 - 7a^10k^2 + \sqrt{2}a^{p+3}$ نسبت به متغیر a از چپ به راست به ترتیب برابر ۳، ۱۰ و $p+3$ است.



دقت کنید که چون درجه چندجمله‌ای نسبت به متغیر a برابر 10 است و هم‌چنین در بین جمله‌های چندجمله‌ای، جمله‌ای موجود است که توانش برابر 10 است، بنابراین $p + 3$ می‌تواند هر مقداری کمتر یا مساوی عدد 10 داشته باشد. پس بیشترین مقدار p وقتی به دست می‌آید که $p + 3$ برابر 10 شود که در این صورت نیز مقدار p برابر 7 می‌شود. در نتیجه p می‌تواند از 1 تا 7 تغییر کند، یعنی p می‌تواند 7 مقدار مختلف بپذیرد.

مثال اگر m عددی طبیعی و درجه عبارت $a^m(b^2c + c^3d^4) - b^8(a^7c^9 - 4c^{12})$ برابر 27 باشد، آن‌گاه مقدار m چند است؟

پاسخ ابتدا عبارت داده‌شده را ساده کرده و درجه هر یک از جمله‌ها را نسبت به همه متغیرهایشان پیدا می‌کنیم:

$$a^m(b^2c + c^3d^4) - b^8(a^7c^9 - 4c^{12}) = \underbrace{a^m b^2 c}_{\text{درجه‌ها: } m+2} + \underbrace{a^m c^3 d^4}_{m+7} - \underbrace{b^8 a^7 c^9}_{24} + \underbrace{4c^{12} b^8}_{20}$$

حالا چون درجه این چندجمله‌ای برابر 27 شده، بنابراین یا $m + 7$ باید برابر 27 شود و یا $m + 3$ ، اما واضح است که مقدار عددی $m + 7$ از $m + 3$ بیشتر است، بنابراین درجه چندجمله‌ای باید برابر $m + 7$ باشد، پس داریم: $m + 7 = 27 \Rightarrow m = 20$

تست درجه حاصل عبارت $(x^2 - 1)(x^3 + 2)(x^4 - 7)$ نسبت به متغیر x برابر است با

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

پاسخ گزینه ۳ اگر بخواهیم همه پرانتزها را در هم ضرب کرده و سپس درجه چندجمله‌ای حاصل را مشخص کنیم، ممکن است زمان زیادی را برای حل این سؤال از دست بدهیم. برای رفع این مشکل از روش زیر استفاده می‌کنیم:

می‌دانیم درجه عبارت داده‌شده نسبت به x ، برابر بزرگ‌ترین توان مربوط به x در حاصل ضرب این پرانتزهاست. حالا دقت کنید که بیشترین توان x در حاصل ضرب دو پرانتز $(x^2 - 1)$ و $(x^3 + 2)$ برابر 5 است، چون پرانتز اول شامل x^2 و پرانتز دوم شامل x^3 است و وقتی این دو تک‌جمله‌ای در هم ضرب می‌شوند، $x^{2+3} = x^5$ تولید می‌شود. حالا برای به دست آوردن درجه چندجمله‌ای موردنظر کافی است درجه حاصل ضرب x^5 و پرانتز $(x^4 - 7)$ را پیدا کنیم که این درجه نیز به وضوح $9 = 5 + 4$ است، پس چون بیشترین توان مربوط به x در حاصل ضرب پرانتزها برابر 9 است، می‌توانیم نتیجه بگیریم درجه حاصل ضرب پرانتزها نسبت به x ، برابر 9 است.

نتیجه برای پیدا کردن درجه حاصل ضرب چند پرانتز (شامل چندجمله‌ای) نسبت به یک متغیر، نیازی به ضرب پرانتزها در هم نیست، بلکه کافی است ابتدا درجه هر پرانتز نسبت به آن متغیر را پیدا کرده و سپس درجه‌های به دست آمده را با هم جمع کنیم.

تست درجه عبارت $(a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4)(a^2b - a^3c^2 + ak^5)(b^5x^4 - 3a^4m^2)$ نسبت به متغیر a کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

پاسخ گزینه ۳ درجه a در تک‌تک پرانتزها را پیدا کرده و سپس با هم جمع می‌کنیم. واضح است که درجه پرانتزها نسبت به متغیر a ، به ترتیب از چپ به راست برابر است با 4 ، 3 و 4 ، پس درجه حاصل ضرب پرانتزها نسبت به متغیر a برابر می‌شود با: $4 + 3 + 4 = 11$

نکته با توجه به نتیجه و مثال بالا درمی‌یابیم که برای پیدا کردن درجه حاصل ضرب چند پرانتز (شامل چندجمله‌ای) نسبت به همه متغیرها، نیازی به ضرب پرانتزها در هم نیست، بلکه کافی است، درجه هر پرانتز را تعیین کرده و سپس درجه‌ها را با هم جمع کنیم.

تست عبارت $(\sqrt{7}p^5q^3 - 11m^7)(3a^5b^4 - 2c^3q)(a^2 + b^3 + c^4)(a^3b^7u^9 + k^5c^{13})$ از درجه است.

- ۳۹ (۱) ۴۰ (۲) ۴۱ (۳) ۴۲ (۴)

پاسخ گزینه ۲ با توجه به نکته بالا ابتدا درجه عبارت هر پرانتز را تعیین کرده و سپس درجه‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} \sqrt{7}p^5q^3 - 11m^7 \Rightarrow \text{درجه: } 8 \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \text{درجه } 8 \qquad \text{درجه } 7 \\ \\ a^2 + b^3 + c^4 \Rightarrow \text{درجه: } 4 \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ \text{درجه } 2 \qquad \text{درجه } 3 \qquad \text{درجه } 4 \\ \\ 3a^5b^4 - 2c^3q \Rightarrow \text{درجه: } 9 \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \text{درجه } 9 \qquad \text{درجه } 4 \\ \\ a^3b^7u^9 + k^5c^{13} \Rightarrow \text{درجه: } 19 \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \text{درجه } 19 \qquad \text{درجه } 18 \end{array}$$

پس با توجه به اعداد به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که درجه حاصل ضرب موردنظر سؤال برابر می‌شود با: $8 + 9 + 4 + 19 = 40$



• مرتب‌سازی چند جمله‌ای نسبت به توان‌های نزولی یک متغیر

برای مرتب‌کردن یک چندجمله‌ای بر حسب توان‌های نزولی یک متغیر کافی است ابتدا درجه هر جمله نسبت به آن متغیر را پیدا کرده و سپس جمله‌ها را به ترتیب از بزرگ‌ترین درجه تا کوچک‌ترین درجه از چپ به راست با توجه به علامتشان کنار هم بنویسیم.

مثال عبارت‌های زیر را ابتدا ساده کرده و سپس بر حسب توان‌های نزولی متغیر خواسته شده مرتب کنید.

الف) $(x^3 + x^2 - x^4)(2x^6 - 3x^5)$ (نسبت به x)

ب) $5ab(2a^2 - 3b^3) - 6a^2b(3a^2b^2 + 2ab^4) + a(a^4 - a^5)$ (نسبت به b)

پاسخ الف) حاصل ضرب داده شده را پیدا کرده و سپس جمله‌ها را بر حسب درجه‌شان نسبت به x مرتب می‌کنیم:

$$(x^3 + x^2 - x^4)(2x^6 - 3x^5) = \underline{2x^9} + \underline{2x^8} - \underline{2x^{10}} - \underline{3x^8} - 3x^7 + \underline{3x^9} = 5x^9 - x^8 - 2x^{10} - 3x^7$$

\Rightarrow مرتب‌سازی بر حسب توان‌های نزولی: $-2x^{10} + 5x^9 - x^8 - 3x^7$

ب) ابتدا عبارت را ساده کرده و سپس مرتب می‌کنیم:

$$5ab(2a^2 - 3b^3) - 6a^2b(3a^2b^2 + 2ab^4) + a(a^4 - a^5) = 10a^3b - 15ab^4 - 18a^4b^3 - 12a^3b^5 + a^5 - a^6$$

\Rightarrow مرتب‌سازی بر حسب توان‌های نزولی b : $-12a^3b^5 - 15ab^4 - 18a^4b^3 + 10a^3b + a^5 - a^6$


در حل قسمت (ب) مثال قبل شاید این سؤال در ذهن شما ایجاد شود که در مرتب‌سازی چندجمله‌ای به دست آمده بر حسب متغیر b ,

جایگاه یک جمله‌ای‌های a^5 و a^6 چگونه تعیین می‌شود؟ مثلاً اول a^5 می‌آید، بعد a^6 یا برعکس؟

در جواب این سؤال باید بگوییم که هیچ تفاوتی ندارد اول کدام یک از این یک جمله‌ای‌ها را بنویسیم. در واقع چون هدف مرتب‌سازی چندجمله‌ای نسبت به متغیر b است، پس جمله‌های فاقد b ، بعد از جمله‌های شامل b ، به هر ترتیبی که بخواهند، می‌توانند نوشته شوند. پس هر دو فرم زیر، فرم مرتب‌شده چندجمله‌ای قسمت (ب) بر حسب توان‌های نزولی محسوب می‌شوند:

۱ $-12a^3b^5 - 15ab^4 - 18a^4b^3 + 10a^3b + a^5 - a^6$

۲ $-12a^3b^5 - 15ab^4 - 18a^4b^3 + 10a^3b - a^6 + a^5$

بسیار فب! حالا می‌رسیم به قسمت اصلی درس، یعنی معرفی اتحادهای جبری. این قسمت یکی از مباحث بسیار پرکاربرد شافه‌های مختلف در ریاضیات از جمله هندسه و جبر است که نه تنها امسال، بلکه سال‌های آتی هم به وفور با آن سروکار دارید. پس سعی کنید اتحادهای جبری رو به بهترین شکل یاد بگیرید! 

• اتحادهای جبری

اگر دو عبارت جبری به ازای همه مقادیر حقیقی (به جای متغیرهایشان) با هم برابر شوند، آن‌گاه به رابطه تساوی (برابری) بین آن‌ها یک اتحاد جبری می‌گوییم. مثلاً تساوی $5x - 2x = 3x$ یک اتحاد جبری است، چون هر مقداری به جای x در این تساوی قرار دهیم حاصل سمت چپ تساوی با حاصل سمت راست آن برابر می‌شود.

نکته رابطه $5x + 3 = 4x$ را در نظر بگیرید، این رابطه یک اتحاد نیست، زیرا به عنوان مثال اگر قرار دهیم $x = 1$ ، آن‌گاه حاصل عبارت سمت چپ تساوی برابر $5 + 3 = 8$ و حاصل عبارت سمت راست تساوی برابر 4 می‌شود، که این دو مقدار هم با یکدیگر برابر نیستند. در واقع تفاوت بین اتحادها و معادله‌های جبری در این است که اتحادها به ازای همه مقادیر حقیقی برقرارند، اما معادله‌های جبری به ازای هر مقدار حقیقی دلخواهی برقرار نیستند.

مثال اتحاد بودن یا نبودن روابط زیر را تعیین کنید.

الف) $(x+1)(x-2) = x^2 + x - 2$

ب) $(x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$)

پاسخ الف) به دو روش ثابت می‌کنیم که رابطه داده شده اتحاد نیست:

روش اول x را برابر 3 قرار می‌دهیم، در این صورت داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{حاصل عبارت سمت چپ تساوی} &= (3+1)(3-2) = 4 \times 1 = 4 \\ \text{حاصل عبارت سمت راست تساوی} &= 3^2 + 3 - 2 = 9 + 3 - 2 = 10 \end{aligned} \right\} 4 \neq 10 \Rightarrow \text{رابطه داده شده اتحاد نیست.}$$



روش دوم حاصل ضرب سمت چپ تساوی را به کمک ضرب پرانتزها حساب می‌کنیم و خواهیم دید که چندجمله‌ای به دست آمده با چندجمله‌ای سمت راست تساوی یکسان نیست، در نتیجه رابطه تساوی داده شده هم اتحاد نیست.

$$(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2 \neq x^2 + x - 2 \Rightarrow \text{رابطه اتحاد نیست.}$$

به کمک روش دوم قسمت قبل حاصل ضرب پرانتزهای سمت چپ تساوی را به دست آورده و می‌بینیم عبارت به دست آمده با عبارت سمت راست تساوی یکسان است، پس رابطه، اتحاد است.

$$(x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) = x^2 - x \times \frac{1}{x} + x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = x^2 - 1 + 1 - \frac{1}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \text{رابطه اتحاد است.}$$

مثال اگر M یک چندجمله‌ای و تساوی $(2x+1)(3x^2-5) + (M-3) = 6x^3 - 8x - 8$ اتحاد باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای M را به دست آورید.

پاسخ به کمک ساده‌سازی، M را به روش زیر به دست می‌آوریم:

$$(2x+1)(3x^2-5) + (M-3) = 6x^3 - 10x + 3x^2 - 5 + M - 3 = 6x^3 - 10x + 3x^2 - 8 + M$$

چون رابطه داده شده اتحاد است، پس حاصل عبارت سمت چپ تساوی باید با عبارت سمت راست تساوی به طور کامل یکسان باشد، پس داریم:

$$6x^3 - 10x + 3x^2 - 8 + M = 6x^3 - 8x - 8 \Rightarrow M = -3x^2 + 10x - 8x \Rightarrow M = -3x^2 + 2x$$

تست اگر تساوی $(2x+1)(3x+2) = ax^2 + bx + 2$ یک اتحاد جبری باشد، آن‌گاه حاصل $a+b$ کدام است؟ (a و b دو عدد حقیقی‌اند).

۷ (۴)

۱۳ (۳)

۳۱ (۲)

۳ (۱)

پاسخ گزینه ۳ حاصل ضرب پرانتزهای سمت چپ تساوی را محاسبه می‌کنیم، در این صورت ضریب عددی x^2 باید برابر a و ضریب عددی x نیز باید برابر b باشد، پس داریم:

$$(2x+1)(3x+2) = 6x^2 + 4x + 3x + 2 = 6x^2 + 7x + 2$$

$$6x^2 + 7x + 2 = ax^2 + bx + 2 \Rightarrow a = 6, b = 7$$

$$a + b = 6 + 7 = 13$$

پس با توجه به مقادیر a و b پاسخ مسئله برابر می‌شود با:

روش دوم گفتیم اتحاد یک تساوی است که به ازای همه مقادیر حقیقی برقرار است، بنابراین چون رابطه داده شده در سؤال هم اتحاد است، اگر x را برابر ۱ قرار دهیم، آن‌گاه باید حاصل عبارت‌های دو طرف تساوی با هم برابر باشد، پس داریم:

$$(2x+1)(3x+2) = ax^2 + bx + 2 \xrightarrow{(x=1)} (2+1)(3+2) = a+b+2 \Rightarrow 15 = a+b+2 \Rightarrow 13 = a+b$$

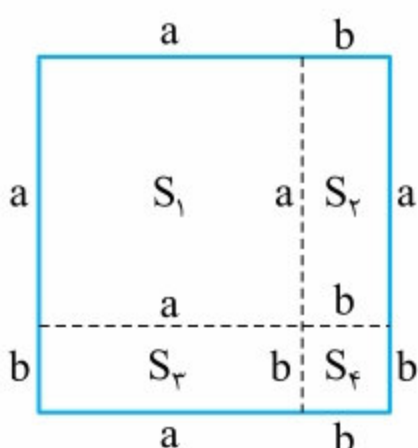
پس از آشنایی با مفهوم اتحادها، حالا وقتشه که بریم با پندتا از اتحادهای مهم و در ادامه تجزیه عبارت‌های جبری به کمک اتحادها آشنا بشیم ...

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای: تساوی مقابل را اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نامیم:

اثبات جبری اتحاد مربع دو جمله‌ای: برای اثبات این اتحاد کافی است سمت چپ تساوی بالا را به کمک ضرب پرانتزها ساده کنیم تا به عبارت سمت راست تساوی برسیم.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



اثبات هندسی اتحاد مربع دو جمله‌ای: مطابق شکل روبه رو مربعی به طول ضلع $a+b$ در نظر گرفته و اضلاع آن را به دو پاره‌خط با طول‌های a و b تقسیم می‌کنیم. در این صورت مساحت مربع به دو روش زیر قابل محاسبه است:

$$1 \text{ طول ضلع مربع } a+b \Rightarrow S_{\text{مربع}} = (a+b) \times (a+b) = (a+b)^2$$

$$2 \text{ } S_{\text{مربع}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Rightarrow S_{\text{مربع}} = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

در نتیجه با توجه به روابط (۱) و (۲) می‌توانیم نتیجه بگیریم:

نکته اگر در اتحاد مربع دو جمله‌ای به جای b ، عبارت $-b$ را قرار دهیم، آن‌گاه به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$(a + (-b))^2 = (a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف) $(3x + 2y)^2$

ب) $(7 - \frac{2}{x})^2$

پ) $(\sqrt{8} + 3\sqrt{2})^2$

پاسخ با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای، حاصل عبارت‌های داده شده را به دست می‌آوریم.

الف) $(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

ب) $(7 - \frac{2}{x})^2 = 7^2 + 2(7)(-\frac{2}{x}) + (-\frac{2}{x})^2 = 49 - \frac{28}{x} + \frac{4}{x^2}$

پ) $(\sqrt{8} + 3\sqrt{2})^2 = (\sqrt{8})^2 + 2(\sqrt{8})(3\sqrt{2}) + (3\sqrt{2})^2 = 8 + 6\sqrt{16} + 9 \times 2 = 8 + 24 + 18 = 50$

مثال جاهای خالی را پر کنید.

الف) $(\dots + 3)^2 = \dots + 12a^2 + \dots$

ب) $(\dots - \dots)^2 = \frac{1}{4x^4} - 3x + \dots$

پاسخ به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

الف) $(A + 3)^2 = A^2 + \underbrace{12a^2}_{2 \times A \times 3} + 3^2 \Rightarrow 2 \times A \times 3 = 12a^2 \Rightarrow A = \frac{12a^2}{6} \Rightarrow A = 2a^2$

II) $A = 2a^2 \Rightarrow A^2 = 4a^4$

ب) $(A - B)^2 = \frac{1}{4x^4} - \underbrace{3x}_{-2AB} + B^2 \Rightarrow A^2 = \frac{1}{4x^4} = (\frac{1}{2x^2})^2 \Rightarrow A = \frac{1}{2x^2}$

II) $-2AB = -3x \Rightarrow -2 \times \frac{1}{2x^2} \times B = -3 \times x \Rightarrow \frac{B}{x^2} = 3x \xrightarrow{(\times x^2)} B = 3x^3$

III) $B = 3x^3 \Rightarrow B^2 = 9x^6$

تست جذر ساده شده عبارت $(a^4 + b^4)^2 - (a^4 - b^4)^2$ برابر است با:

$\sqrt{2}a^2$ (۴)

$2a^2b^2$ (۳)

$\sqrt{2}b^2$ (۲)

$a^4 + b^4$ (۱)

پاسخ گزینه ۳ حاصل عبارت داده شده را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای ساده کرده و سپس جذر عبارت به دست آمده را محاسبه می‌کنیم.

$$(a^4 + b^4)^2 - (a^4 - b^4)^2 = (a^4)^2 + 2(a^4)(b^4) + (b^4)^2 - ((a^4)^2 - 2(a^4)(b^4) + (b^4)^2)$$

$$= a^8 + 2a^4b^4 + b^8 - (a^8 - 2a^4b^4 + b^8) = a^8 + 2a^4b^4 + b^8 - a^8 + 2a^4b^4 - b^8 = 4a^4b^4 \Rightarrow \sqrt{4a^4b^4} = 2a^2b^2$$

تست اگر $x^3 - \frac{1}{x^3} = 3$ ، آن‌گاه حاصل عددی $x^{12} + \frac{1}{x^{12}}$ کدام است؟

۱۲۵ (۴)

۱۲۳ (۳)

۱۲۱ (۲)

۱۱۹ (۱)

پاسخ گزینه ۲ دو طرف تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم. در این صورت داریم:

$$(x^3 - \frac{1}{x^3})^2 = 3^2 \Rightarrow (x^3)^2 - 2(x^3)(\frac{1}{x^3}) + (\frac{1}{x^3})^2 = 9 \Rightarrow x^6 - 2 + \frac{1}{x^6} = 9 \Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = 11$$

حالا دوباره دو طرف تساوی به دست آمده را به توان ۲ می‌رسانیم. در این صورت به جواب مسئله می‌رسیم، ببینید:

$$(x^6 + \frac{1}{x^6})^2 = 11^2 \Rightarrow (x^6)^2 + 2(x^6)(\frac{1}{x^6}) + (\frac{1}{x^6})^2 = 121 \Rightarrow x^{12} + 2 + \frac{1}{x^{12}} = 121 \Rightarrow x^{12} + \frac{1}{x^{12}} = 119$$

تجزیه عبارات‌های جبری

سال گذشته با مبحث تجزیه آشنا شدیم، در این قسمت نیز ابتدا روش‌های اولیه تجزیه عبارات‌های جبری را یادآوری کرده و سپس به سراغ تجزیه عبارات‌های جبری به کمک اتحادها می‌رویم.

منظور از تجزیه یک عبارت جبری، نوشتن آن عبارت به صورت حاصل ضرب عبارات‌های جبری‌ای است که از حاصل ضرب آن‌ها، عبارت اولیه به دست می‌آید. مثلاً اگر عبارت جبری $XY + XZ + Xt$ را به صورت $X(Y + Z + t)$ بنویسیم، می‌گوییم از X فاکتور گرفته‌ایم و عبارت را تجزیه کرده‌ایم.

روشی که شما در سال قبل با آن آشنا شدید تجزیه به کمک فاکتورگیری بود، که ما نیز در این قسمت این روش را یادآوری می‌کنیم.

تجزیه به کمک فاکتورگیری: برای تجزیه یک چندجمله‌ای به کمک فاکتورگیری باید ابتدا «ب.م.م» جمله‌های آن را پیدا کنیم. در این صورت می‌توان چندجمله‌ای اولیه را به صورت حاصل ضرب «ب.م.م» به دست آمده در یک چندجمله‌ای نوشت که جمله‌های این چندجمله‌ای نیز از تقسیم تک تک جمله‌های چندجمله‌ای اولیه بر «ب.م.م» به دست می‌آیند.

مثال عبارت $6x^2y^3 + 8x^3y^2$ را تجزیه کنید.

پاسخ عبارت داده شده شامل دو جمله $6x^2y^3$ و $8x^3y^2$ است. توجه کنید که ب.م.م این دو جمله برابر است با ب.م.م ضرایب عددی آن‌ها ضربدر متغیرهای مشترک با کم‌ترین توان، یعنی داریم:

$$(8x^3y^2, 6x^2y^3) = \underset{(۸,۶)}{2} \times x^2 \times y^2 = 2x^2y^2$$

حالا با تقسیم جمله‌های عبارت اولیه بر $2x^2y^2$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که عبارت اولیه به صورت زیر قابل تجزیه است:

$$6x^2y^3 + 8x^3y^2 = 2x^2y^2(3y + 4x)$$

مثال عبارات‌های زیر را به کمک فاکتورگیری تجزیه کنید.

الف) $6a^5 - 12a^4 + 18a^3$

ب) $20x^2y^3z^4 - 15x^3y^2z^4 + 30x^2y^2z^5$

پ) $a^2b^2(a+b)^3 + a^3b^2(a+b)^4 - ab^3(a+b)^3$

پاسخ در هر قسمت ابتدا ب.م.م جمله‌ها را پیدا کرده و سپس به کمک فاکتورگیری عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$\boxed{الف} \quad 6a^5 - 12a^4 + 18a^3 = \underbrace{6a^3}_{\text{ب.م.م}=6a^3} \times a^2 - \underbrace{6a^3}_{\text{ب.م.م}=6a^3} \times 2a + \underbrace{6a^3}_{\text{ب.م.م}=6a^3} \times 3 = 6a^3(a^2 - 2a + 3)$$

$$\boxed{ب} \quad 20x^2y^3z^4 - 15x^3y^2z^4 + 30x^2y^2z^5 = \underbrace{5x^2y^2z^4}_{\text{ب.م.م}=5x^2y^2z^4} \times 4 \times y - \underbrace{5x^2y^2z^4}_{\text{ب.م.م}=5x^2y^2z^4} \times 3 \times x + \underbrace{5x^2y^2z^4}_{\text{ب.م.م}=5x^2y^2z^4} \times 6 \times z$$

$$= 5x^2y^2z^4(4y - 3x + 6z)$$

ج درست است که عبارات‌های $a^2b^2(a+b)^3$ ، $a^3b^2(a+b)^4$ و $ab^3(a+b)^3$ هیچ کدام یک جمله‌ای به حساب نمی‌آیند، اما

مثل قسمت‌های قبل اگر ب.م.م این عبارات را پیدا کنیم، آن‌گاه می‌توانیم عبارت اولیه را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$a^2b^2(a+b)^3 + a^3b^2(a+b)^4 - ab^3(a+b)^3 = \underbrace{ab^2(a+b)^3}_{\text{ب.م.م}=ab^2(a+b)^3} \times a + \underbrace{ab^2(a+b)^3}_{\text{ب.م.م}=ab^2(a+b)^3} \times a^2 \times (a+b) - \underbrace{ab^2(a+b)^3}_{\text{ب.م.م}=ab^2(a+b)^3} \times b$$

$$= ab^2(a+b)^3(a + a^2(a+b) - b) = ab^2(a+b)^3(a + a^3 + a^2b - b)$$

نکته در برخی از عبارات‌های جبری که در آن‌ها همه جمله‌ها با هم عامل مشترک ندارند، می‌توانیم با دسته‌بندی جمله‌ها و فاکتورگیری

در هر دسته، پرانتزهای مشترک تولید کرده و نهایتاً با فاکتورگیری از پرانتزها، عبارت اولیه را تجزیه کنیم.

مثال عبارت $a^2x + b^2y + a^2y + b^2x$ را تجزیه کنید.

پاسخ چون دو جمله a^2x و b^2x هر دو شامل متغیر مشترک x هستند و همچنین a^2y و b^2y نیز شامل متغیر مشترک y هستند،

پس عبارت را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$a^2x + b^2y + a^2y + b^2x = (\underbrace{a^2x + b^2x}_{\text{م.م.ب}=x}) + (\underbrace{a^2y + b^2y}_{\text{م.م.ب}=y}) = x(a^2 + b^2) + y(a^2 + b^2)$$

دقت کنید که چون دو عبارت $x(a^2 + b^2)$ و $y(a^2 + b^2)$ هر دو شامل پرانتز مشترک $(a^2 + b^2)$ هستند، پس می‌توانیم با فاکتورگیری از این پرانتز، عبارت اولیه را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$a^2x + b^2y + a^2y + b^2x = x(a^2 + b^2) + y(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(x + y)$$

مشترک

مثال عبارت‌های زیر را به کمک دسته‌بندی و فاکتورگیری تجزیه کنید:

الف) $10kx - 3my + 6xm - 5ky$

ب) $3x^5 + 4x^2 + 3x^3 + 4$

پ) $ab + a^2c + b^2 - ac - ba^2 - bc$

پاسخ در هر قسمت با دسته‌بندی مناسب، عبارت‌های داده‌شده را تجزیه می‌کنیم:

$$\boxed{\text{الف}} \quad 10kx - 3my + 6xm - 5ky = (\underbrace{10kx - 5ky}_{\text{م.م.ب}=5k}) + (\underbrace{6xm - 3my}_{\text{م.م.ب}=3m})$$

$$= 5k(2x - y) + 3m(2x - y) \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (2x - y)(5k + 3m)$$

مشترک

$$\boxed{\text{ب}} \quad 3x^5 + 4x^2 + 3x^3 + 4 = (\underbrace{3x^5 + 3x^3}_{\text{م.م.ب}=3x^3}) + (\underbrace{4x^2 + 4}_{\text{م.م.ب}=4}) = 3x^3(x^2 + 1) + 4(x^2 + 1) \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (x^2 + 1)(3x^3 + 4)$$

مشترک

$$\boxed{\text{پ}} \quad ab + a^2c + b^2 - ac - ba^2 - bc = (\underbrace{ab + b^2 - ba^2}_{\text{م.م.ب}=b}) + (\underbrace{a^2c - ac - bc}_{\text{م.م.ب}=c})$$

$$= b(a + b - a^2) + c(a^2 - a - b) = b(a + b - a^2) - c(a + b - a^2) \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (b - c)(a + b - a^2)$$

از منفی فاکتور می‌گیریم مشترک

تست تجزیه‌شده عبارت $2a^2 + 2a^2b + b + ab^2 - 2a^3 - 2a^2b - ab - b^2$ برابر کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

(۲) $(1 - a)(1 - b)(2a^2 - b)$

(۱) $(1 - a)(1 + b)(2a^2 - b)$

(۴) $(1 + a)(1 - b)(2a^2 + b)$

(۳) $(1 - a)(1 - b)(2a^2 + b)$

پاسخ گزینه ۳: با دسته‌بندی مناسب و فاکتورگیری، عبارت داده‌شده را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$2a^2 + 2a^2b + b + ab^2 - 2a^3 - 2a^2b - ab - b^2$$

$$= (\underbrace{2a^2 - 2a^2b}_{\text{م.م.ب}=2a^2}) + (\underbrace{2a^2b - 2a^3}_{\text{م.م.ب}=2a^2}) + (\underbrace{b - b^2}_{\text{م.م.ب}=b}) + (\underbrace{ab^2 - ab}_{\text{م.م.ب}=ab})$$

$$= 2a^2(1 - b) + 2a^2(b - 1) + b(1 - b) + ab(b - 1) = 2a^2(1 - b) - 2a^2(1 - b) + b(1 - b) - ab(1 - b)$$

از منفی فاکتور می‌گیریم از منفی فاکتور می‌گیریم عامل مشترک

$$= (1 - b)(2a^2 - 2a^2 + b - ab)$$

حالا برای رسیدن به پاسخ مسئله کافی است عبارت داخل پرانتز دوم را نیز تجزیه کنیم. این تجزیه به کمک دسته‌بندی زیر قابل انجام است.

$$(1 - b)((\underbrace{2a^2 - 2a^3}_{\text{م.م.ب}=2a^2}) + (\underbrace{b - ab}_{\text{م.م.ب}=b})) = (1 - b)(2a^2(1 - a) + b(1 - a)) = (1 - b)(1 - a)(2a^2 + b)$$

مشترک

تجزیه به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای

اگر در یک سه‌جمله‌ای، یکی از جمله‌ها (بدون در نظر گرفتن علامت)، دو برابر حاصل ضرب جذر دو جمله دیگر باشد، آن‌گاه می‌توانیم آن سه‌جمله‌ای را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه کنیم.

مثال عبارت جبری $4x^2 + 12xy + 9y^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه کنید.

پاسخ چون $4x^2 = (2x)^2$ ، پس جذر این جمله برابر با $2x$ است. به همین ترتیب چون $9y^2 = (3y)^2$ ، پس جذر این جمله نیز برابر با $3y$ می‌شود. از طرفی $12xy$ برابر است با دو برابر حاصل ضرب جذر این دو جمله، یعنی $12xy = 2 \times 2x \times 3y$. پس به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = \underbrace{(2x)^2}_{\text{مربع جمله اول}} + \underbrace{2(2x)(3y)}_{\text{دو برابر حاصل ضرب جملات اول و دوم}} + \underbrace{(3y)^2}_{\text{مربع جمله دوم}} = (2x + 3y)^2$$

می‌توانیم عبارت داده شده را به صورت روبه‌رو تجزیه کنیم:

معمولاً سه‌جمله‌ای‌هایی که شامل دو جمله مربع کامل هستند را می‌توان به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه کرد. پس اگر در یک سه‌جمله‌ای دوتا از جمله‌ها مربع کامل بودند، حدس می‌زنیم که این سه‌جمله‌ای به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه می‌شود، اما حدس‌مان زمانی به واقعیت تبدیل می‌شود که جمله سوم (همان‌طور که گفتیم) دو برابر حاصل ضرب جذر دو جمله دیگر باشد.

مثال عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه کنید.

الف) $3a^3 + 24a^2 + 48a$ ب) $16x^2 - 4 + \frac{1}{4x^2}$ پ) $4a - 20\sqrt{ab} + 25b$ ($a, b > 0$)

پاسخ الف چون هر سه جمله عامل مشترک دارند، اول از عامل مشترک آن‌ها فاکتور می‌گیریم.

$$3a^3 + 24a^2 + 48a = 3a \times a^2 + 3a \times 8a + 3a \times 16 = 3a(a^2 + 8a + 16)$$

حالا به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای عبارت داخل پرانتز را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$3a^3 + 24a^2 + 48a = 3a(a^2 + 8a + 16) = 3a(a^2 + 2 \times a \times 4 + 4^2) = 3a(a + 4)^2$$

ب $16x^2$ و $\frac{1}{4x^2}$ هر دو مربع کامل‌اند و جذر آن‌ها نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$16x^2 = (4x)^2 \Rightarrow 16x^2 \text{ جذر} = 4x \quad \text{و} \quad \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{(2x)^2} = \left(\frac{1}{2x}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{4x^2} \text{ جذر} = \frac{1}{2x}$$

$$2 \times 4x \times \frac{1}{2x} = \frac{8x}{2x} = 4 =$$

از طرفی دو برابر حاصل ضرب این جذرها برابر است با:

پس داریم:

$$16x^2 - 4 + \frac{1}{4x^2} = (4x)^2 - 2(4x)\left(\frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = \left(4x - \frac{1}{2x}\right)^2$$

پ توجه کنید که هر عدد مثبت مثل x را می‌توانیم به صورت $(\sqrt{x})^2$ نمایش دهیم. در این صورت چون a و b هر دو عددهای مثبت هستند، می‌توانیم عبارت را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$\left. \begin{aligned} 4a &= 2 \times 2 \times (\sqrt{a})^2 = 2^2 \times (\sqrt{a})^2 = (2\sqrt{a})^2 \\ 25b &= 5 \times 5 \times (\sqrt{b})^2 = 5^2 \times (\sqrt{b})^2 = (5\sqrt{b})^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a - 20\sqrt{ab} + 25b = 4a - 20\sqrt{a} \times \sqrt{b} + 25b$$

$$= (2\sqrt{a})^2 - 2(2\sqrt{a})(5\sqrt{b}) + (5\sqrt{b})^2 = (2\sqrt{a} - 5\sqrt{b})^2$$

تست تجزیه عبارت $(x-y)^2 + (y-z)^2 + 2(x-y)(y-z)$ پس از ساده‌سازی به کدام یک از صورت‌های زیر است؟

(۱) $(x+y)^2$ (۲) $(x-y)(y-z)$ (۳) $(x-z)^2$ (۴) $(x+y)(y+z)$

پاسخ گزینه ۳ اگر قرار دهیم $A = (x-y)$ و $B = (y-z)$ ، آن‌گاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} A &= (x-y) \Rightarrow A^2 = (x-y)^2 \\ B &= (y-z) \Rightarrow B^2 = (y-z)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + 2(x-y)(y-z) = A^2 + B^2 + 2AB$$

$$= A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

حالا اگر در رابطه به دست آمده به جای A و B به ترتیب عبارت‌های $x-y$ و $y-z$ را قرار دهیم، آن‌گاه داریم:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + 2(x-y)(y-z) = (A+B)^2 = (x-y + y-z)^2 = (x-z)^2$$



نکته اگر حاصل جمع چندتا عبارت مربع کامل برابر صفر شود، آن‌گاه جذر تک‌تک آن عبارت‌ها باید برابر صفر باشد، چون حاصل جمع چندتا عبارت که همگی بزرگ‌تر یا مساوی صفرند، وقتی برابر صفر می‌شود، که همگی آن‌ها برابر صفر باشند، یعنی مثلاً اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ ، آن‌گاه می‌توانیم نتیجه بگیریم $a = b = c = 0$.

تست اگر $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$ ، آن‌گاه حاصل ضرب xy کدام است؟

- ۴ (۱) -۴ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴)

پاسخ گزینه ۲ ابتدا دقت کنید که اگر ۸ را به صورت $4 + 4$ بنویسیم، آن‌گاه به کمک دسته‌بندی مناسب و اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توانیم عبارت سمت چپ تساوی داده‌شده را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 + 4 = (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) \\ = (x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2) + (y^2 - 2 \times y \times 2 + 2^2) = (x + 2)^2 + (y - 2)^2$$

حالا چون حاصل جمع دو عبارت مربع کامل برابر صفر شده است، نتیجه می‌گیریم هر دو باید برابر صفر باشند، پس پاسخ مسئله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow xy = (-2) \times 2 = -4$$

پرسش‌های تشریحی

۱ کدام یک از عبارت‌های زیر یک جمله‌ای هستند؟

- | | | | |
|----------------------------|--------------------|----------------------------|----------------------|
| $4 + 2x$ [۴] | 4 [۳] | $\frac{3a^2b}{c^{-2}}$ [۲] | $3a^2b$ [۱] |
| $\sqrt{3x^4y}$ [۸] | $\sqrt{2xy}$ [۷] | \sqrt{xy} [۶] | $\frac{xy}{2}$ [۵] |
| $\frac{xy}{\sqrt{2}}$ [۱۲] | $5 x^2y^2 $ [۱۱] | $3 x $ [۱۰] | $\sqrt{3x^2y^2}$ [۹] |
| $3x x $ [۱۴] | $5\sqrt{x^3}$ [۱۵] | $2x^2y + 3x^2y$ [۱۴] | $2a^{-2}b^2$ [۱۳] |
| $\frac{a}{\pi}$ [۲۰] | $\sqrt{\pi}$ [۱۹] | $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ [۱۸] | $x^5 - 1$ [۱۷] |

۲ در هر یک از جمله‌های زیر، قسمت حرفی (متغیر) و ضریب عددی یک جمله‌ای را مشخص کنید.

- | | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|
| $-\frac{\sqrt{2}}{2}xy$ [۴] | -5 [۳] | $\frac{a^2}{5}$ [۲] | $2a$ [۱] |
| $5ab - 2ab$ [۸] | $\sqrt{\frac{x^6y^4}{2}}$ [۷] | $\frac{3x^2}{y^{-2}}$ [۶] | $3\sqrt{\pi x^2}$ [۵] |
| $5(ab^2)(3a^2b)$ [۱۲] | $5\sqrt[5]{t^{10}}$ [۱۱] | $\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^2$ [۱۰] | $\frac{2 \cdot a^2b^2c^2}{3ab^2}$ [۹] |
| | | $x^2y - 2x^2y$ [۱۴] | $4(a^2b)^2$ [۱۳] |

۳ کدام یک از یک جمله‌ای‌های زیر متشابه‌اند؟

- | | | | |
|------------------------|---|-------------------------------------|------------------------------------|
| $4a^2b, 4x^2y$ [۴] | $\sqrt{3}xy^2, \sqrt{3}x^2y$ [۳] | $5a^2b^3, 5a^2b^2$ [۲] | $\sqrt{5}a^2b, \frac{a^2b}{3}$ [۱] |
| $\pi^2ax^2, 3ax^2$ [۸] | $\frac{5a^2b^5}{b^2}, \sqrt{3}a^2b^2$ [۷] | $(\frac{1}{2}xy^2)^2, 25x^2y^4$ [۶] | $\frac{xy}{3}, \frac{2}{xy}$ [۵] |
| | | $10\sqrt{x^3}, x$ [۱۰] | $5x, 5\sqrt{x^2}$ [۹] |



۴ در هر یک از قسمت‌های زیر، x و y را به گونه‌ای تعیین کنید که یک جمله‌ای‌های متشابه به دست آید.

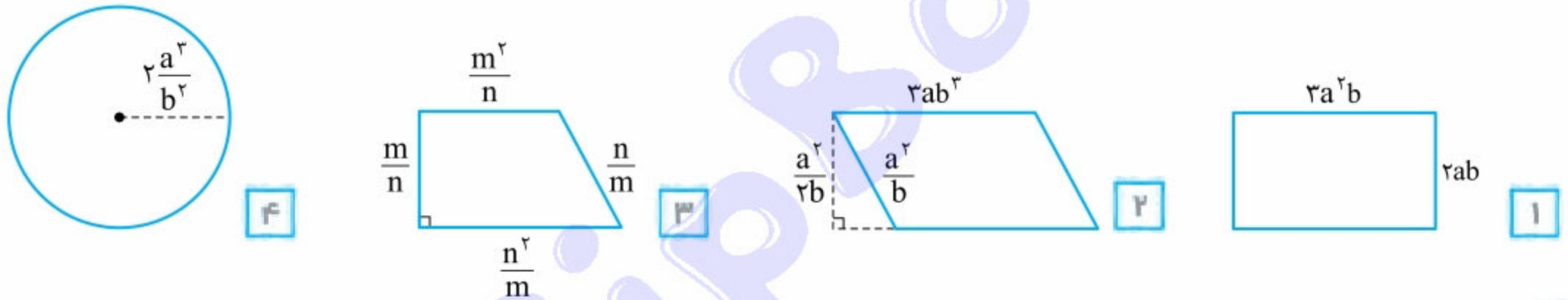
۱ $3a^2b^2, -5a^2b^2$ ۲ $4a^{2x}b^3, \sqrt{2}a^2b^y$

۳ $3a^{2x-1}, \frac{\sqrt{3}}{2}a^5b^{2y}$ ۴ $(\Delta b^2a^2)(2a^2b^2), (\Delta a^2b)(-3\frac{a^x}{b})(-\frac{b^2}{3})$

۵ جدول زیر را کامل کنید.

عبارت جبری	متغیرها	ضریب عددی	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به همه متغیرها
$3xy^2$					
$-\sqrt{2}x^2y^2z^2$					
$-\sqrt{\pi}x^2$					
$-\frac{\sqrt{2}}{5}$					
$3x^2y + 5x^2y$					
$100x^{100}y^{50}z^{25}$					

۶ محیط و مساحت هر یک از شکل‌های زیر را به صورت یک عبارت جبری به دست آورید.



۷ عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

۱ $(ab^2)(-3\frac{a^2}{b})$ ۲ $3(xy^2z)(4x^2y)^2$ ۳ $(\frac{m^2}{n})(3\frac{n^2}{m})$

۴ $\Delta(3a + b^2)$ ۵ $(2a - b)(a^2 + 3b^2)$ ۶ $\Delta a(a^2 - a + a^{-1})$

۷ $\Delta \frac{a}{b^2}(3a^2b^2 - 4\frac{a}{b^2} - 1)$ ۸ $\Delta a(2ab^2 - b^2) + 3a^2b^2$

۸ کدام یک از عبارت‌های زیر، چندجمله‌ای است؟

۱ $a^2 + 2a - 1$ ۲ $3xy - a$

۳ $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ ۴ $xy^2 - 1$

۵ $x + \frac{1}{x}$ ۶ Δx^5

۷ $\sqrt{a} - x$ ۸ $\sqrt{\pi} - x$

۹ $\sqrt{a^2} + x$ ۱۰ $\sqrt{a^4} + x$

۱۱ $x^2 - 2^x$

۹ عبارت‌های زیر را ساده کرده، سپس آن‌ها را بر حسب توان نزولی x بنویسید.

۱ $3x - 5x^2 + 2x - 1$ ۲ $4x - 2x^2 - x + 3x^2$

۳ $x^2 + 2x^2 - x - 2x^2 + 3x^2$ ۴ $3xy + x^2 - 4xy^2 - 1$

۵ $ax^2 - 3x^2 + x^5 + 2x^2 + x^2$ ۶ $(x - x^2)(x^2 + x^2 - 1)$

۷ $(4x^2 - x)(x^2 + x - 1) + x^4 - 1$ ۸ $(x^2y - xy^2)(3x + 2y)$

۱۰ جدول زیر را کامل کنید.

عبارت جبری	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y	مرتب‌سازی نسبت به توان نزولی x
$2xy^2 - 2x^2y^2$				
$4x^2 - x^2y + x^3$				
$y^2 - 2y^2 - x$				
$x^2y - zx^2 + x^2y^2 - 1$				
$x^2 - 5x^2 + x - 2x^2$				
$x^2y^2 - y^2$				

۱۱ اگر $A = 2x^2 - 1$ ، $B = 2(3x - 2)$ و $C = x^2 - x$ باشد، آن‌گاه حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱ $3A - 2B$

۲ $AB - C$

۳ $B^2 - 2C$

۱۲ مشخص کنید کدام یک از عبارتهای زیر یک اتحاد جبری را نشان می‌دهد.

۱ $3x - 1 = x + 1$

۲ $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

۳ $x(x - \frac{1}{x}) = x^2 - 1, (x \neq 0)$

۴ $x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x - 1$

۱۳ حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به کمک اتحاد دوجمله‌ای به دست آورید.

۱ $(x - 3)^2$

۲ $(2x - 3)^2$

۳ $(2a + b)^2$

۴ $(a^2 - b)^2$

۵ $(-x - 2y)^2$

۶ $(ab - b^2)^2$

۷ $(\frac{m}{n} + \frac{n}{m})^2$

۸ $(a^3 - a^2)^2$

۹ $(\frac{2}{8})^2 + 2(\frac{2}{8})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2$

۱۰ $(\frac{3}{4})^2 - 2(\frac{3}{4})(\frac{0}{4}) + (\frac{0}{4})^2$

۱۱ $(a + b + 2c)^2$

۱۲ $(a - 2b + c)^2$

۱۴ به کمک اتحاد دوجمله‌ای، جاهای خالی را کامل کنید.

۱ $(\dots + 3)^2 = a^2 + \dots + 9$

۲ $(m - \dots)^2 = \dots - 16m + \dots$

۳ $(\dots + \dots)^2 = 4t^2 + 16t + \dots$

۴ $(\dots + \dots)^2 = \frac{1}{a^2} + \dots + a^2$

۵ $(\dots - \dots)^2 = 25a^4 - 30a^2b^2 + \dots$

۶ $(\dots + 2b^2)^2 = 9a^6 + \dots + \dots$

۷ $(\dots + 4y)^2 = 49x^4 + 56x^2y + \dots$

۸ $(3t^2 - \dots)^2 = \dots + 12t^3 + 4t^2$

۱۵ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، مقدار هر یک از اعداد زیر را به دست آورید.

۱ $(1004)^2$

۲ $(997)^2$

۳ $(0/97)^2$

۴ $(0/997)^2$

۱۶ اگر $x + y = 3$ و $xy = 5$ باشد، آن‌گاه $\frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2 + xy}$ را به دست آورید.

۱۷ هر یک از عبارتهای جبری زیر را به کمک فاکتورگیری تجزیه کنید.

۱ $ab + a^2c$

۲ $a^2b - b^2c$

۳ $\frac{x}{y} + \frac{z}{y^2}$

۴ $xy^2z^2 - x^2y^2z$

۵ $5a^2b^2c^4 + 15a^2b^2c - 20a^3bc^2$

۶ $12ab^2 - 3ac^3 - 6$



۱۸ عبارات جبری زیر را تجزیه کنید.

۱ $12x - 6x^2 - 3x^3$

۲ $5x^2y^2 - 15x^3y + 20xy^3$

۳ $t(m+n)^2 + (m+n)$

۴ $a^2 + 2a^2 + a$

۵ $4a^2 - 12a^2 + 9a$

۶ $x^2y^2 + 4xy + 4$

۷ $16a^4b^4 - 40a^2b^2 + 25$

۸ $a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$

۹ $a^2 + \frac{9}{a^2} + 6$

۱۰ $a^2 + 3a + \frac{9}{4}$

۱۱ $25a^2 + a + 0.01$

۱۲ $(a+b)^2 + 4(a+b) + 4$

۱۹ اگر بدانیم $a + \frac{1}{a} = 10$ است، آن‌گاه حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به دست آورید.

۲ $9a^4 + \frac{9}{a^4}$

۱ $a^2 + \frac{1}{a^2}$

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱ کدام یک از عبارات‌های زیر یک جمله‌ای نیست؟

πx^5 (۴)

$5x^{-1}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}x}{2}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۲ کدام یک از عبارات زیر یک جمله‌ای نیست؟

$\frac{7x^2y^2}{-4}$ (۴)

$-\sqrt{5}a^2b^4$ (۳)

$\sqrt{5}x^4$ (۲)

$3x^2y - 5xy^2$ (۱)

۳ کدام یک از عبارات‌های زیر، یک جمله‌ای نیست؟

$\frac{ab}{\pi}$ (۴)

$\frac{a}{\sqrt{2}a^2}$ (۳)

$5a + 3a$ (۲)

$-5ab$ (۱)

(آزمون‌های پیشرفت تفصیلی فیلی سبز)

۴ کدام یک از عبارات‌های زیر یک جمله‌ای نیست؟

$\sqrt{2}(x+y)$ (۴)

$\frac{x}{3} - \frac{x}{2}$ (۳)

$(\sqrt{2} + \sqrt{3})x$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}xy^2}{5}$ (۱)

۵ کدام زوج از یک جمله‌ای‌های زیر، متشابه هستند؟

$3a^2b^2, 3x^2y^2$ (۴)

$3a^2, 5a^{-2}$ (۳)

$\pi a^2, \sqrt{2}a^2$ (۲)

$3a^2b^3, 2a^2b^2$ (۱)

۶ درجه یک جمله‌ای $-5x^2y^3$ نسبت به متغیرهای x و y برابر است با:

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

۷ کدام یک از عبارات‌های زیر صحیح است؟

(۱) در یک جمله‌ای $-5x^3y^5$ ، درجه یک جمله‌ای نسبت به y برابر ۵ است.

(۲) درجه یک جمله‌ای $5a^3$ نسبت به متغیر b برابر صفر است.

(۳) درجه یک جمله‌ای xy^2zt^3 نسبت به تمام متغیرهای آن برابر ۷ است.

(۴) هر سه گزینه درست است.

۸ اگر در یک جمله‌ای $5x^a y^{2-a} z^{3a-1}$ ، درجه نسبت به متغیرهای x و y یکسان باشد، درجه یک جمله‌ای نسبت به متغیر z کدام است؟

۸ (۴)

۵ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹ درجه یک جمله‌ای $a^x b^y c^z$ نسبت به a و b برابر ۵، نسبت به b و c برابر ۷ و نسبت به a و c برابر ۶ است. درجه این یک جمله‌ای نسبت

به a ، b و c کدام است؟

۹ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۱۱ (۱)

۱۰ اگر درجه یک جمله‌ای $5a^x b^3 + 3a^x b^y$ نسبت به a برابر ۴ باشد، آن‌گاه حاصل $3x - 2y$ کدام است؟

۷ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

۱۱ اگر $A = 2x^3y^2$ ، $B = \frac{1}{5}x^2y$ و $C = 10x^4y^2$ باشد، آن‌گاه درجه یک جمله‌ای $\frac{A^2BC^3}{2}$ نسبت به متغیر y کدام است؟

- ۵ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

۱۲ کدام یک از عبارات‌های زیر، چندجمله‌ای جبری نیست؟

- $ax^2 + bx$ (۱) $\sqrt{2x} - \sqrt{5y}$ (۲) $5\sqrt{\pi x} - 2$ (۳) $\frac{x-2y}{z}$ (۴)

۱۳ کدام یک از عبارات زیر چندجمله‌ای نیست؟

- $\frac{5}{x} + 3x$ (۱) $x^2 - 7x + 2$ (۲) -4 (۳) $3x - \frac{7}{2}$ (۴)

۱۴ درجه عبارت $3x(2x^2+1) - 4x^2(2x-3) + 2x^3$ نسبت به x کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۵ چندجمله‌ای $10a^3bc^2 + 5a^2b^2cd^2 + 4ab^3c^5d^2$ نسبت به کدام متغیر درجه بیشتری دارد؟

- a (۱) d (۲) c (۳) b (۴)

۱۶ درجه چندجمله‌ای $7x^5y^2 - 3x^5y^3 + 5x^4y^5$ نسبت به x و y کدام است؟

- ۸ (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۱۷ عبارت $(a+b+c+d)(e+f+g+h)$ چند جمله دارد؟

- ۳۶ (۱) ۹ (۲) ۱۶ (۳) ۲۵ (۴)

۱۸ اگر $A = x+1$ و $B = 2x-1$ باشد، حاصل $2A(A+B) - 2(A+B)B$ کدام است؟

- $-6x^2 - 12x$ (۱) $-6x^2 + 12x$ (۲) $-6x^2 + 12$ (۳) صفر (۴)

۱۹ اگر $A = x^2 + 2x + 3$ ، $B = 2x^2 - 2x + 4$ و $C = -x^2 + x - 4$ باشد، $A+B-C$ کدام است؟

- $4x^2 + x - 11$ (۱) $4x^2 - x + 11$ (۲) $2x^2 + x + 3$ (۳) $4x^2 + x + 11$ (۴)

۲۰ از مستطیلی به ابعاد $x+2$ و $x+5$ واحد، مستطیلی دیگر به ابعاد $x-1$ و $x+3$ را حذف کرده‌ایم. مساحت باقی مانده چند واحد مربع است؟

- $5x + 7$ (۱) $4x + 13$ (۲) $4x + 7$ (۳) $5x + 13$ (۴)

۲۱ با توجه به شکل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

- $ab + 2a + c + d$ (۱)
 $b + 2 + c + ad$ (۲)
 $b + 2a + c + ad$ (۳)
 $ad + 2a + 2 + ab$ (۴)

۲۲ مساحت شکل روبه‌رو برابر است با:

- $2x^2 + 4/5x$ (۱)
 $1/5x^2 + 4/5x$ (۲)
 $x^2 + 4/5x + 4/5$ (۳)
 $4x^2 + 9x + 4/5$ (۴)

۲۳ اگر m عددی صحیح و بزرگ‌تر از یک باشد و بدانیم $A = x^{m-1} + x^{m+2}$ چندجمله‌ای است، درجه A نسبت به x کدام است؟

(آزمون‌های پیش‌تاز قبلی سبز)

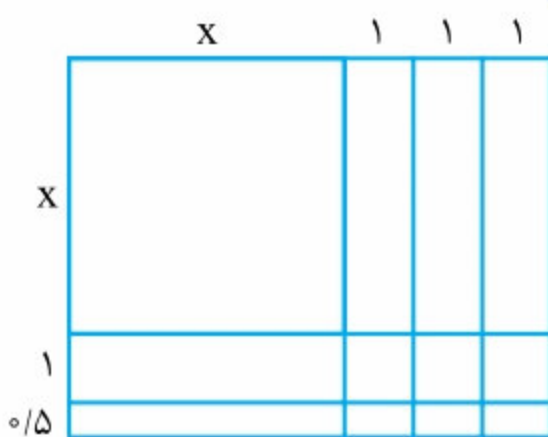
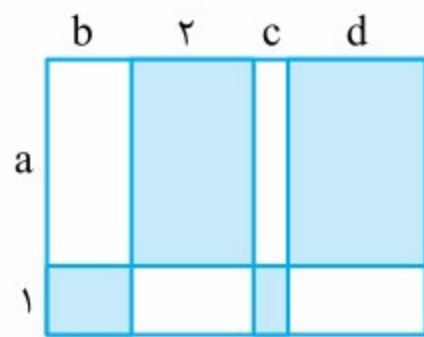
- ۶ یا ۲ (۱) ۹ (۲) ۸ یا ۵ (۳) ۱۳ (۴)

۲۴ درجه عبارت $A = (x^3 - 1)^2(x^2 + 4)^3 - x^{11} + 1$ نسبت به x چند است؟

- ۱۱ (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱ (۴)

۲۵ مجموع ضرایب حاصل ضرب $(2x^2 - x^3 + 1)(x^2 - 3x)$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۱۱ (۲) -۴ (۳) ۱۰ (۴)



۲۶ مقدار عددی a را چنان بیابید که مجموع ضرایب $(3x+2y+a)^2(3x-5)^2$ مساوی ۳۲ باشد؟

- (۱) صفر (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۲

۲۷ درجه چندجمله‌ای $x(x+1)(x+2)\dots(x+10)$ نسبت به x کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۹ (۴) ۱

۲۸ ضریب x در عبارت $(2x+3)(2x^2-6x+4)$ کدام عدد است؟

- (۱) -۱۰ (۲) -۸ (۳) ۱۰ (۴) ۸

۲۹ اگر $x+2y=8$ ، $2x+z=7$ و $y+2z=15$ باشد، مقدار $7x+7y+7z$ کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۱۴۰ (۳) ۷۰ (۴) ۱۰۵

۳۰ اگر درجه چندجمله‌ای $25x^{2m-3}y^{m-1}z^{2m+1}$ نسبت به x ، y باشد، درجه آن به ترتیب از راست به چپ نسبت به y و z کدام است؟

- (۱) ۴ و ۹ (۲) ۴ و ۱۱ (۳) ۵ و ۱۰ (۴) ۵ و ۱۰

۳۱ اگر $A = \frac{1+x}{1-x}$ و $B = \frac{1-A}{1+A}$ باشد، مقدار عددی B به ازای $x = \frac{-1}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۳۲ اگر A و B قرینه یکدیگر باشند و B معکوس C باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $((BA^3 + B^4)C + B^2C^2)^{10}$

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) 2^{10}

۳۳ فرض کنیم $a * b = a^2b - ab^2$ ، در این صورت کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $(a * b)(b * a) \leq 0$ (۲) $a * 1 \leq 0$ (۳) $(-a) * b = -(a * b)$ (۴) $a * 0 = a$

(آزمون‌های پیشرفت تفهیلی فیلی سبز)

۳۴ مقدار $\frac{x^6 + 3x}{3x^6 + 9x^4}$ به ازای $x = -\frac{1}{3}$ کدام است؟

- (۱) -۲۷ (۲) -۹ (۳) ۹ (۴) ۲۷

۳۵ کدام گزینه با عبارت $3x^2 - x - 2$ برابر است؟

- (۱) $(x+1)(3x-2)$ (۲) $(x-2)(3x+1)$ (۳) $(3x+1)(x+2)$ (۴) $(3x+2)(x-1)$

۳۶ اگر تساوی $(3x-k)(x+k) = 3x^2 + 6x - k^2$ به ازای همه مقادیر x برقرار باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۷ اگر تساوی $2x^2 + ax - 3 = (x-1)(2x+3)$ یک اتحاد باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(آزمون‌های پیشرفت تفهیلی سبز)

۳۸ اگر تساوی $ax^2 + b(x+1)^2 + c(x+2)^2 = (x+3)^2$ یک اتحاد باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(انرژی اتمی)

۳۹ اگر به ازای هر مقدار a رابطه $a^2 - 2a + 3 = x(a^2 - 1) + y(a^2 + a - 3)$ برقرار باشد، حاصل $x+y$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۰ کدام گزینه را به جای A در عبارت $9x^2y^2 + x^4 + A$ قرار دهیم تا حاصل عبارت، مربع کامل شود؟

- (۱) $-3x^2y$ (۲) $6x^3y$ (۳) $3x^2y^2$ (۴) $6x^2y^2$

۴۱ کدام عبارت را باید در عبارت $5x^2 + y^2 + B$ به جای B قرار دهیم تا کل عبارت را به صورت یک مربع دو جمله‌ای بنویسیم؟

- (۱) $10xy$ (۲) $2\sqrt{5}xy$ (۳) $10x^2y^2$ (۴) $2\sqrt{5}x^2y^2$

۴۲ اگر عبارت $x^2 + m(m+1)x + 36$ مربع کامل دو جمله‌ای باشد، مقدار مثبت m کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۳ مجموع دو عدد ۱۸ و حاصل ضرب آن‌ها، ۷۲ است. مجموع معکوس این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$



۴۴ اگر $3a - 4b = 1$ باشد، آن‌گاه $18a^2 - 48ab + 32b^2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۴۵ اگر $(a+b)^2 = 15$ باشد و بدانیم $a^2 + b^2 = 35$ است، حاصل $(a-b)^2$ کدام است؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۴۵ (۳) ۳۵ (۴) ۲۵

۴۶ اگر $a - b = 0$ باشد، حاصل $\frac{a^2 + b^2}{2ab}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۴۷ مجموع دو عدد ۱۱ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۴ است، مجموع مربعات این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۷۳ (۲) ۱۶۹ (۳) ۱۴۵ (۴) ۹۷

۴۸ اگر $x^2 + y^2 = 2xy$ باشد، حاصل $\frac{2x^2 + y^2}{3y^2 - x^2}$ کدام است؟ ($x, y \neq 0$)

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۹ اگر $xy = 5$ و $x - y = 2$ باشد، حاصل $\frac{x^2 + y^2}{4xy}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{10}$ (۲) $\frac{6}{10}$ (۳) $\frac{7}{11}$ (۴) $\frac{6}{11}$

۵۰ اگر $a^2 + b^2 = 150$ و $(a-b)^2 = 100$ باشد، آن‌گاه ab برابر است با:

- (۱) -۲۵ (۲) ۵۰ (۳) ۲۵ (۴) -۵۰

۵۱ با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 12x + 1$ ، مربع دو جمله‌ای حاصل می‌شود؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۸

۵۲ به ازای کدام مقدار m ، عبارت $4x^2 + mx + 9$ مربع کامل می‌شود؟

- (۱) ± 12 (۲) ± 6 (۳) ± 18 (۴) ± 20

۵۳ به عبارت $9x^2 - 2x + 4$ کدام عبارت افزوده شود تا حاصل به صورت مربع دو جمله‌ای باشد؟

- (۱) $-2x$ (۲) $-4x$ (۳) $-8x$ (۴) $-10x$

۵۴ چه عددی باشد تا عبارت $x^2 - (m+2)x + 2m$ ، مربع کامل شود؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱

۵۵ اگر $a + 2\sqrt{a} + 1$ یک عدد مجذور کامل باشد، دومین عدد مربع کامل بعد از آن، کدام است؟

- (۱) $a + 4\sqrt{a} + 1$ (۲) $a + 6\sqrt{a} + 9$ (۳) $a + 4\sqrt{a} + 4$ (۴) $a + 6\sqrt{a} + 3$

۵۶ حاصل عبارت $\frac{xy(y^{-2} + x^{-2} + 2x^{-1}y^{-1})}{(x+y)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}$ (۲) $\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}$ (۳) $\frac{xy}{x+y}$ (۴) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

۵۷ اگر $a^2 + b^2 - 5ab = 0$ باشد، آن‌گاه $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۵۸ اگر داشته باشیم $a^2 + b^2 = ab$ ، در این صورت کدام یک از موارد زیر حتماً درست است؟

- (الف) $a = b$ (۱) فقط «الف»
(ب) $(a+b)ab = a^3 + b^3$ (۲) فقط «ب»
(۳) هم «الف» و هم «ب»
(۴) نه «الف»، نه «ب»

۵۹ اگر $4a^2 + b^2 = 4ab$ باشد، آن‌گاه مقدار $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - ab}$ کدام است؟ ($a \neq 0$)

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) -۴ (۴) ۴

(آزمون‌های پیشرفت تحصیلی قبلی سبز)



(آزمون‌های پیش‌تاز فیلی سبز)

۶۰ اگر $a^2 + b^2 = 4a - 2b - 5$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۱ اگر $(a-b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2 = 0$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{3(a+b+c)}{2a}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) صفر (۴) $\frac{2}{3}$

۶۲ ضریب x^4 در چندجمله‌ای $(3x^4 - x^3 - 1) + (3x^4 - x^3 + 2)^2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۶ (۳) -۴ (۴) ۵

۶۳ حاصل جمع ارقام عبارت $(0/999)^2$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱۰ (۴) ۲۷

۶۴ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند که $x^2 + y^2 = 10x - 6y - 34$ ، در این صورت $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

(انرژی اتمی)

۶۵ با فرض این‌که $x^2 + y^2 = 1$ باشد، مقدار عبارت $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^4$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۳

۶۶ عبارت $7 + 2\sqrt{12}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $(\sqrt{3} + 2)^2$ (۲) $(\sqrt{3} - \sqrt{4})^2$ (۳) $(\sqrt{3} + \sqrt{4})^2$ (۴) $(\sqrt{3} - 2)^2$

۶۷ حاصل عبارت $\sqrt{8} - \sqrt{6}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

۶۸ حاصل عبارت $\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

۶۹ اگر a معکوس b و همچنین رابطه $a^2b^2 + b^2a^2 = 15$ برقرار باشد، حاصل $(a+b)^2$ کدام است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۶۲۵ (۳) ۲۲۵ (۴) ۱۷۵

۷۰ اگر $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 5$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{m^2}{n^2} + \frac{n^2}{m^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۰ (۳) ۲۵ (۴) ۲۳

۷۱ اگر $3x - \frac{1}{4x} = 5$ باشد، آن‌گاه $18x^2 + \frac{1}{8x^2}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

- (۱) ۵۰ (۲) ۵۱ (۳) ۵۲ (۴) ۵۳

۷۲ اگر $\frac{a^2+1}{a} = 14$ باشد، مقدار $\frac{a+1}{\sqrt{a}}$ کدام است؟ ($a > 0$)

- (۱) ۴ (۲) $\sqrt{14}$ (۳) $\sqrt{12}$ (۴) ۳

۷۳ اگر $a + b = 5$ باشد و بدانیم $ab = 2$ است، آن‌گاه حاصل $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ کدام است؟

- (۱) $5 + 2\sqrt{2}$ (۲) $5 - 2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

۷۴ اگر $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ باشد، آن‌گاه $a + \frac{1}{a}$ کدام است؟ ($a > 0$)

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۷۵ اگر $x^2 + x^{-2} = 5$ باشد، آن‌گاه $x^4 + x^{-4}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۵ (۳) ۳۲ (۴) ۳۵

۷۶ اگر $25^x + 25^{-x} = 14$ باشد، آن‌گاه حاصل $5^x + 5^{-x}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{14}$ (۲) ۴ (۳) $\sqrt{18}$ (۴) ۵

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اتحاد مربع سه جمله‌ای

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مربع حاصل جمع سه جمله مجموع مربعات سه جمله حاصل جمع دو برابر حاصل ضرب‌های دوبعدوی جملات

تساوی روبه‌رو را اتحاد مربع سه جمله‌ای می‌نامند:

اثبات اتحاد مربع سه جمله‌ای، روش‌های گوناگونی دارد که ما در این جا به دو روش این اتحاد را اثبات می‌کنیم:

روش اول: عبارت $(a + b + c)^2$ را به کمک ضرب پرانتزها ساده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c) \times (a + b + c) = a^2 + \underline{ab} + \underline{ac} + \underline{ab} + b^2 + \underline{bc} + \underline{ac} + \underline{bc} + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

روش دوم: به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌توان اتحاد مربع سه جمله‌ای را به صورت زیر به دست آورد:

$$(a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2 \times (a + b) \times c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(ac + bc) + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد مربع سه جمله‌ای به دست آورید.

الف) $(x - 2y - 3z)^2$

ب) $(x^2 + \frac{1}{x} - 1)^2$

پ) $(a - b + c - d)^2$

پاسخ به کمک اتحاد مربع سه جمله‌ای داریم:

الف) $(x - 2y - 3z)^2 = (x + (-2y) + (-3z))^2 = x^2 + (-2y)^2 + (-3z)^2 + 2(x)(-2y) + 2(x)(-3z) + 2(-2y)(-3z)$
 $= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 6xz + 12yz$

ب) $(x^2 + \frac{1}{x} - 1)^2 = (x^2 + \frac{1}{x} + (-1))^2 = (x^2)^2 + (\frac{1}{x})^2 + (-1)^2 + 2(x^2)(\frac{1}{x}) + 2(x^2)(-1) + 2(\frac{1}{x})(-1)$
 $= x^4 + \frac{1}{x^2} + 1 + 2x - 2x^2 - \frac{2}{x}$

پ) $(a - b + c - d)^2 = ((a - b) + c + (-d))^2 = (a - b)^2 + c^2 + (-d)^2 + 2(a - b)(c) + 2(a - b)(-d) + 2(c)(-d)$
 $= a^2 - 2ab + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac - bc) + 2(-ad + bd) - 2cd$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2bc - 2ad + 2bd - 2cd$

تست اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند که هم مجموع خودشان و هم مجموع مربعاتشان برابر ۴ شود، آن گاه مجموع حاصل ضرب‌های دوبعدوی این اعداد برابر چه مقداری است؟

۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۱۲ (۱)

۱ $a + b + c = 4$, ۲ $a^2 + b^2 + c^2 = 4$

پاسخ گزینه ۱: با توجه به شرط‌های سؤال می‌توانیم نتیجه بگیریم:

حالا اگر طرفین رابطه ۱ را به توان ۲ برسانیم، آن گاه داریم:

$$a + b + c = 4 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 4^2 \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{4} + 2ab + 2ac + 2bc = 16$$

$$\Rightarrow 2ab + 2ac + 2bc = 12 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} 2(ab + ac + bc) = 12 \xrightarrow{(\div 2)} ab + ac + bc = 6$$

اتحاد مزدوج

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

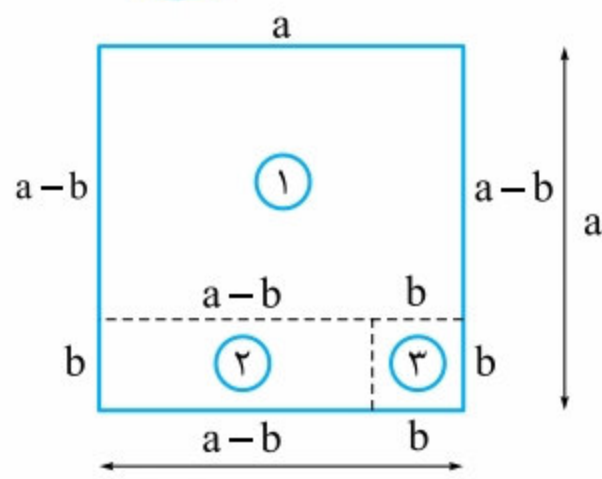
تفاضل مربعات دو جمله مجموع دو جمله تفاضل دو جمله

تساوی روبه‌رو را اتحاد مزدوج می‌نامند:

به دو روش جبری و هندسی اتحاد مزدوج را اثبات می‌کنیم:

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

● روش جبری: به کمک ضرب پرانتزها داریم:



● روش هندسی: مربعی به طول ضلع 'a' در نظر گرفته و آن را مطابق شکل روبه‌رو برش می‌زنیم:

حالا دقت کنید که چون مجموع مساحت‌های شکل (1)، (2) و (3) برابر مساحت کل مربع به طول ضلع 'a' است، پس داریم:

(مربع به طول ضلع 'b')

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_{\text{مربع}} \Rightarrow S_1 + S_2 + b^2 = a^2 \Rightarrow S_1 + S_2 = a^2 - b^2 \quad (I)$$

از طرفی اگر مستطیل (2) را برداریم و مطابق شکل روبه‌رو کنار مستطیل (1) قرار دهیم، یک مستطیل به طول اضلاع 'a+b' و 'a-b' به وجود می‌آید، پس داریم:

مساحت مستطیل به ابعاد 'a+b' و 'a-b' و

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = (a+b)(a-b) \quad (II)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

در نتیجه با توجه به روابط (I) و (II) داریم:

عبارت‌های 'a+b' و 'a-b' را مزدوج یکدیگر می‌نامند، مثلاً مزدوج $\sqrt{2}-1$ برابر $\sqrt{2}+1$ است.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد مزدوج به دست آورید.

الف) $(3a-b)(2b+6a)$

ب) $(x^2-3)(x^2+3)(x^4+9)$

پ) $(x+2y-3)(3+x-2y)$

پاسخ به کمک اتحاد مزدوج، حاصل هر قسمت را محاسبه می‌کنیم:

از ۲ فاکتور می‌گیریم

الف) $(3a-b)(2b+6a) = (3a-b) \times 2 \times (b+3a) = 2 \times (3a-b) \times (3a+b) = 2 \times ((3a)^2 - b^2)$
 $= 2(9a^2 - b^2) = 18a^2 - 2b^2$

ب) $(x^2-3)(x^2+3)(x^4+9) = ((x^2)^2 - 3^2)(x^4+9) = (x^4-9)(x^4+9) = (x^4)^2 - 9^2 = x^8 - 81$
 مزدوج

از منفی فاکتور می‌گیریم

پ) $(x+2y-3)(3+x-2y) = (x+2y-3)(x-2y+3) = (x+(2y-3))(x-(2y-3)) = x^2 - (2y-3)^2$
 $= x^2 - ((2y)^2 - 2(2y)(3) + 3^2) = x^2 - (4y^2 - 12y + 9) = x^2 - 4y^2 + 12y - 9$

تست اگر $x-y=4$ و $x^2-y^2=32$ ، آن‌گاه حاصل عددی $2x-3y$ برابر است با

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ گزینه ۲ ● به کمک اتحاد مزدوج حاصل $x+y$ را به دست آورده و سپس مقادیر عددی x و y را پیدا می‌کنیم:

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \Rightarrow (x+y) \times 4 = 32 \xrightarrow{(\div 4)} x+y = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=4 \end{cases} \Rightarrow x=6, y=2 \Rightarrow 2x-3y = 2 \times 6 - 3 \times 2 = 12 - 6 = 6$$

● تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

تفاضل هر دو عبارت با توان‌های زوج را می‌توان به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرد. یعنی اگر بتوانیم یک عبارت را به فرم $A^2 - B^2$ بنویسیم، آن‌گاه می‌توانیم آن را به صورت $(A-B)(A+B)$ تجزیه کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد مزدوج تا حد امکان تجزیه کنید.

الف) $4x^2 - 9y^2$

ب) $25 - (5x+4)^2$

پ) $x^8 - y^8$

ت) $16 - (x-2)^4$

پاسخ به کمک اتحاد مزدوج، عبارت داده‌شده در هر قسمت را تجزیه می‌کنیم. توجه کنید که ابتدا باید عبارت هر قسمت را به فرم

الف) $4x^2 - 9y^2 = (\underbrace{2x}_A)^2 - (\underbrace{3y}_B)^2 = (2x+3y)(2x-3y)$

$A^2 - B^2$ بنویسیم، پس داریم:

$$\boxed{ج} \quad 25 - (5x + 4)^2 = \underbrace{(5)}_A^2 - \underbrace{(5x + 4)}_B^2 = (5 + (5x + 4))(5 - (5x + 4)) = (5x + 9)(1 - 5x)$$

$$\boxed{د} \quad x^4 - y^4 = x^{2 \times 2} - y^{2 \times 2} = \underbrace{(x^2)}_A^2 - \underbrace{(y^2)}_B^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

مزدوج است

$$= (x^2 + y^2)((\underbrace{x^2}_A) - (\underbrace{y^2}_B)) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

مزدوج است

$$\boxed{ه} \quad 16 - (x - 2)^4 = 16 - (x - 2)^{2 \times 2} = \underbrace{4^2}_A - \underbrace{((x - 2)^2)}_B^2 = (4 + (x - 2)^2)(4 - (x - 2)^2)$$

مزدوج است

$$= (4 + (x^2 - 4x + 4))(4 - (x - 2)^2) = (x^2 - 4x + 8)(4 - (x - 2)^2) = (x^2 - 4x + 8)(x)(4 - x)$$

تست تجزیه شده عبارت $x^2 - y^2 - 2x - 6y - 8$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(1) $(x - y + 2)(x + y - 4)$ (2) $(x - y + 2)(x - y - 4)$ (3) $(x + y + 2)(x - y - 4)$ (4) $(x + y + 2)(x - y + 4)$

پاسخ گزینه ۴ به کمک دسته‌بندی و اتحاد مربع داریم:

$$x^2 - y^2 - 2x - 6y - 8 = x^2 - 2x + 1 - y^2 - 6y - 9 = (x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 6y + 9)$$

$$= (x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) - (y^2 + 2 \times y \times 3 + 3^2) = (x - 1)^2 - (y + 3)^2$$

حالا برای رسیدن به پاسخ مسئله کافی است عبارت به دست آمده را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنیم. در این صورت داریم:

$$x^2 - y^2 - 2x - 6y - 8 = \underbrace{(x - 1)}_A^2 - \underbrace{(y + 3)}_B^2 = ((x - 1) + (y + 3))((x - 1) - (y + 3)) = (x + y + 2)(x - y - 4)$$

محاسبات عددی به کمک اتحادها

تا به این جا سه تا از اتحادهای مهم رو یاد گرفتیم. یکی از کاربردهای اتحادها ساده کردن محاسبات عددی، تو این بخش با حل چند مثال و تست با بعضی از این کاربردها آشنا می‌شیم.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) 101^2 ب) 999^2 پ) 10002×9998

پاسخ الف به جای آن که 101 را در خودش ضرب کنیم و حاصل را به دست آوریم، حاصل را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$$

همانند مثال قسمت اول، داریم:

$$999^2 = (1000 - 1)^2 = 1000^2 - 2 \times 1000 \times 1 + 1^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$$

توجه کنید که $10002 = 10000 + 2$ و $9998 = 10000 - 2$ ، پس به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$10002 \times 9998 = (10000 + 2)(10000 - 2) = (10000)^2 - 2^2 = 100000000 - 4 = 99999996$$

تست حاصل عددی عبارت $(4 - \sqrt{15})^{2018} \times (4 + \sqrt{15})^{2018}$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(1) $16^{2018} - 15^{1009}$ (2) $16^{2018} + 15^{1009}$ (3) صفر (4) 1

پاسخ گزینه ۴ دقت کنید که چون توان عبارت‌های $(4 + \sqrt{15})$ و $(4 - \sqrt{15})$ با هم برابر است، پس طبق قانون ضرب اعداد با توان‌های برابر، می‌توانیم بنویسیم:

$$(4 - \sqrt{15})^{2018} \times (4 + \sqrt{15})^{2018} = \underbrace{((4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15}))}_{\text{اتحاد مزدوج}}^{2018} = (4^2 - (\sqrt{15})^2)^{2018} = (16 - 15)^{2018} = 1^{2018} = 1$$



تست حاصل عددی عبارت $(2 + \sqrt{2})^{1396} \times (6 - 4\sqrt{2})^{698}$ برابر است با:

- (۱) 2^{2792} (۲) 2^{1396} (۳) 2^{698} (۴) 2^{349}

پاسخ گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $1396 = 698 \times 2$ ، در این صورت با توجه به قانون‌های توان و اتحاد مربع دو جمله‌ای، داریم:

$$(2 + \sqrt{2})^{1396} = (2 + \sqrt{2})^{2 \times 698} = ((2 + \sqrt{2})^2)^{698} = (2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2)^{698} \\ = (4 + 4\sqrt{2} + 2)^{698} = (6 + 4\sqrt{2})^{698}$$

بنابراین می‌توانیم حاصل عبارت داده‌شده را به کمک اتحاد مزدوج همانند مسئله قبل به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$(2 + \sqrt{2})^{1396} \times (6 - 4\sqrt{2})^{698} = \underbrace{(6 + 4\sqrt{2})^{698}}_{\text{توان‌ها یکسان}} \times \underbrace{(6 - 4\sqrt{2})^{698}}_{\text{اتحاد مزدوج}} = ((6 + 4\sqrt{2})(6 - 4\sqrt{2}))^{698} \\ = (6^2 - (4\sqrt{2})^2)^{698} = (36 - 32)^{698} = 4^{698} = (2^2)^{698} = 2^{1396}$$

تست دو برابر حاصل عبارت $(5 + 3)(5^2 + 3^2)(5^4 + 3^4)(5^8 + 3^8)$ برابر است با

- (۱) $5^8 - 3^8$ (۲) $5^8 - 3^4$ (۳) 2^{16} (۴) $5^{16} - 3^{16}$

پاسخ گزینه ۱ ایده‌ای که برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم، یکی از ایده‌های مهم و پرکاربرد در حل مسائل به کمک اتحاد مزدوج است، پس سعی کنید خوب این ایده را به خاطر بسپارید. اگر اولین پیرانتز از سمت چپ در عبارت داده‌شده را در مزدوجش ضرب کنیم اتفاق جالبی رخ می‌دهد، ببینید:

$$A = (5 + 3)(5^2 + 3^2)(5^4 + 3^4)(5^8 + 3^8) \Rightarrow \underbrace{(5 - 3)}_2 \times A = \underbrace{(5 - 3)(5 + 3)}_{\text{مزدوج}} (5^2 + 3^2)(5^4 + 3^4)(5^8 + 3^8)$$

$$\Rightarrow 2A = \underbrace{(5^2 - 3^2)}_{\text{مزدوج}} (5^2 + 3^2)(5^4 + 3^4)(5^8 + 3^8) = ((5^2)^2 - (3^2)^2)(5^4 + 3^4)(5^8 + 3^8)$$

$$= \underbrace{(5^4 - 3^4)}_{\text{مزدوج}} (5^4 + 3^4)(5^8 + 3^8) = ((5^4)^2 - (3^4)^2)(5^8 + 3^8) = \underbrace{(5^8 - 3^8)}_{\text{مزدوج}} (5^8 + 3^8) = (5^8)^2 - (3^8)^2 = 5^{16} - 3^{16}$$

پس همان‌طور که می‌بینید ۲ برابر حاصل عبارت خواسته‌شده یا همان ۲A برابر است با $5^{16} - 3^{16}$.

بعد از آشنایی با سه اتحاد مهم و بررسی اون‌ها، حالا می‌رسیم به یکی از اتحادهایی که نسبت به قبل‌ها کمی مهم‌تره! اتحاد جمله مشترک ... این اتحاد کاربردهای بسیار زیادی در زمینه‌های مختلف حل مسائل جبری از جمله معادلات درجه دوم (که در سال‌های آتی با اون‌ها آشنا می‌شوید)، تجزیه عبارت‌های جبری دشوار و ... داره، پس فوب یادش بگیرید، خصوصاً روش‌های تجزیه‌اش رو.

اتحاد جمله مشترک

تساوی مقابل را اتحاد جمله مشترک می‌نامند.

ضرب مجموع جمله‌های غیرمشترک
در جمله مشترک

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

ضرب جمله‌های غیرمشترک مربع جمله مشترک جمله‌های غیرمشترک

به دو روش جبری و هندسی می‌توان اتحاد جمله مشترک را به دست آورد.

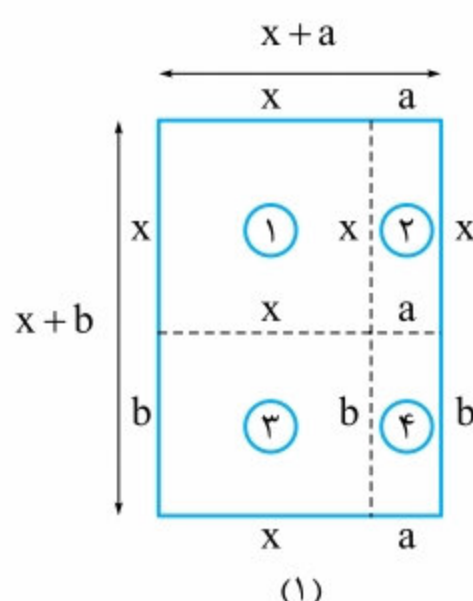
۱) روش جبری: با ضرب پیرانتزهای سمت چپ تساوی و به کمک فاکتورگیری داریم:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + \underbrace{bx + ax}_{\text{فاکتورگیری از } x} + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

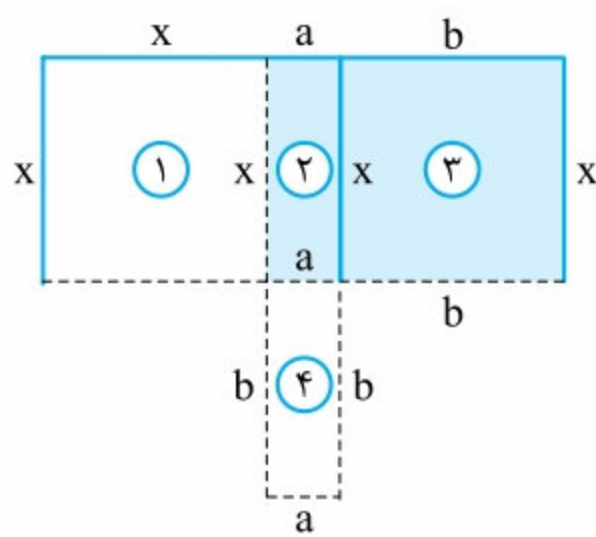
۲) روش هندسی: مطابق شکل (۱) مستطیلی به طول ضلع $x+a$ و $x+b$ را برش می‌زنیم:

از طرفی واضح است که مساحت کل مستطیل برابر است با:

$$S_{\text{کل}} = (x+a)(x+b) \quad (I)$$



از طرف دیگر اگر مستطیل (۳) را برداریم و کنار مستطیل (۲) قرار دهیم، مستطیل رنگی به ابعاد $(a + b)$ و x به دست می‌آید، پس مساحت کل شکل به صورت مقابل قابل محاسبه است:



$$S_{\text{کل}} = S_{(1)} + S_{\text{رنگی}} + S_{\text{ف}} \\ = x^2 + (a + b)x + ab \quad (\text{II})$$

در نهایت می‌توانیم با مقایسه روابط (I) و (II) نتیجه بگیریم:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

مثال عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد جمله مشترک ساده کنید.

الف) $(2x + 4)(3x + 9)$

ب) $(x^2 - \frac{1}{a})(x^2 + 2a)$

پ) $(x + y + 2)(x + y - 4)$

پاسخ الف) جمله‌های پرانتز اول عامل مشترک ۲ و جمله‌های پرانتز دوم نیز عامل مشترک ۳ را دارند، پس به کمک فاکتورگیری داریم:

$$(2x + 4)(3x + 9) = 2 \times (x + 2) \times 3 \times (x + 3) = 6 \underbrace{(x + 2)(x + 3)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 6(x^2 + (2 + 3)x + 2 \times 3)$$

$$= 6(x^2 + 5x + 6) = 6x^2 + 30x + 36$$

ب) جمله مشترک برابر x^2 و جمله‌های غیرمشترک برابر $-\frac{1}{a}$ و $2a$ است، پس داریم:

$$(x^2 - \frac{1}{a})(x^2 + 2a) = (x^2 + (-\frac{1}{a}))(x^2 + 2a) = (x^2)^2 + (-\frac{1}{a} + 2a)x^2 + (-\frac{1}{a})(2a)$$

$$= x^4 + (-\frac{1 + 2a \times a}{a})x^2 - 2 = x^4 + (\frac{2a^2 - 1}{a})x^2 - 2$$

پ) جمله مشترک را برابر $x + y$ در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$(x + y + 2)(x + y - 4) = (x + y)^2 + (2 + (-4))(x + y) + 2(-4) = x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 8$$

تست اگر $81x^4 = (3x - 2)(3x + 2)(9x^2 + 5)$ ، آن‌گاه مقدار عددی x^2 کدام است؟

$\frac{9}{20}$ (۴)

$\frac{20}{9}$ (۳)

$\frac{9}{10}$ (۲)

$\frac{10}{9}$ (۱)

پاسخ گزینه ۳: ابتدا عبارت سمت چپ تساوی داده شده را به کمک اتحادها ساده می‌کنیم و سپس مقدار x^2 را محاسبه می‌کنیم.

$$(3x - 2)(3x + 2)(9x^2 + 5) = ((3x)^2 - 2^2)(9x^2 + 5) = \underbrace{(9x^2 - 4)}_{\text{جمله مشترک}}(9x^2 + 5)$$

$$= (9x^2)^2 + (-4 + 5)(9x^2) + (-4)(5) = 81x^4 + 9x^2 - 20$$

حالا با توجه به ساده شده عبارت سمت چپ، داریم:

$$(3x - 2)(3x + 2)(9x^2 + 5) = 81x^4 \Rightarrow 81x^4 + 9x^2 - 20 = 81x^4 \Rightarrow 9x^2 - 20 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = \frac{20}{9}$$

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک

سه جمله‌ای $x^2 + Ax + B$ را در نظر بگیرید. اگر دو عدد یا متغیر مانند a و b وجود داشته باشند که به ازای آن‌ها داشته باشیم $A = a + b$ و $B = ab$ ، آن‌گاه می‌توانیم سه جمله‌ای اولیه را به صورت $x^2 + (a + b)x + ab$ بنویسیم و سپس آن را به کمک اتحاد جمله مشترک به صورت $(x + a)(x + b)$ تجزیه کنیم. پس برای تجزیه عبارت $x^2 + Ax + B$ ، به کمک اتحاد جمله مشترک کافی است دو متغیر (یا عدد) پیدا کنیم که حاصل جمعشان برابر A و هم‌چنین حاصل ضربشان برابر B شود.

مثال عبارت $x^2 + 9x + 14$ را تجزیه کنید.

پاسخ با کمی دقت متوجه می‌شویم که عبارت داده‌شده نه مربع کامل است و نه مزدوج. پس باید آن را به کمک اتحاد جمله‌مشتربک تجزیه کنیم. برای این کار نیز مطابق روش توضیح داده‌شده باید دو عدد پیدا کنیم که اولاً حاصل جمعشان برابر ۹ شود و دوماً حاصل ضربشان برابر ۱۴ شود. حالا دقت کنید که چون $14 = 2 \times 7$ و $9 = 2 + 7$ ، پس دو عدد موردنظر، ۲ و ۷ هستند، بنابراین می‌توانیم عبارت داده‌شده را به صورت روبه‌رو تجزیه کنیم:

$$x^2 + 9x + 14 = x^2 + (2+7)x + 2 \times 7 = (x+2)(x+7)$$

مثال عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد جمله‌مشتربک، تجزیه کنید.

الف) $x^2 - 4x - 45$

ب) $x^4 - x^3 - 6x^2$

پ) $x^6 - 7x^3 + 12$

پاسخ الف) باید دو عدد پیدا کنیم که اولاً حاصل ضرب آن‌ها برابر -45 باشد و دوماً حاصل جمعشان برابر -4 باشد. حالا دقت کنید که چون $-45 = -9 \times 5$ و ضمناً $-4 = (-9) + 5$ ، پس اعداد موردنظر ما، اعداد -9 و 5 هستند، بنابراین داریم:

$$x^2 - 4x - 45 = x^2 + ((-9) + 5)x + (-9) \times 5 = (x + (-9))(x + 5) = (x - 9)(x + 5)$$

ب) ب.م.م جمله‌های عبارت داده‌شده برابر x^2 است، پس اول از x^2 فاکتور می‌گیریم:

$$x^4 - x^3 - 6x^2 = x^2(x^2 - x - 6)$$

حالا برای تجزیه عبارت داخل پرانتز کافی است دو عدد پیدا کنیم که اولاً حاصل ضربشان برابر -6 شود و دوماً حاصل جمعشان برابر -1 شود، اما چون $-6 = -3 \times 2$ و $-1 = (-3) + 2$ ، پس اعداد موردنظر برابر -3 و 2 هستند، پس داریم:

$$x^4 - x^3 - 6x^2 = x^2(x^2 - x - 6) = x^2(x^2 + ((-3) + 2)x + (-3)(2)) = x^2(x + (-3))(x + 2) = x^2(x - 3)(x + 2)$$

پ) برای تجزیه این عبارت کافی است x^3 را به صورت $(x^3)^2$ بنویسیم، در این صورت عبارت به فرم $(x^3)^2 - 7x^3 + 12$ درمی‌آید.

حالا برای تجزیه این عبارت نیز باید دو عدد پیدا کنیم که اولاً حاصل ضربشان برابر 12 شود و دوماً حاصل جمعشان نیز برابر -7 شود، با کمی بررسی می‌توان فهمید که این دو عدد، اعداد -3 و -4 هستند، چون $12 = (-3) \times (-4)$ و $-7 = (-3) + (-4)$ ، پس داریم:

$$x^6 - 7x^3 + 12 = (x^3)^2 + ((-3) + (-4))x^3 + (-3)(-4) = (x^3 + (-3))(x^3 + (-4)) = (x^3 - 3)(x^3 - 4)$$

تا به حال در همه مثال‌های مربوط به تجزیه به کمک اتحاد جمله‌مشتربک، ضریب عددی x^2 برابر ۱ بوده است. در اینجا می‌خواهیم یک مثال حل کنیم که در آن ضریب x^2 برابر ۱ نیست، به روش حل این مثال توجه کنید ...

مثال عبارت $9x^2 + 21x + 10$ را تجزیه کنید.

پاسخ همان‌طور که می‌بینید در این عبارت تنها یک جمله مربع کامل $(9x^2)$ موجود است، پس احتمالاً نمی‌توانیم آن را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه کنیم، در نتیجه باید از اتحاد جمله‌مشتربک کمک بگیریم. حالا دقت کنید که ضریب عددی x^2 ، یعنی ۹ خود عددی مربع کامل است، پس می‌توانیم $9x^2$ را به صورت $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2$ بنویسیم. از طرفی $21x$ خود مضربی از $3x$ است و می‌توان آن را به صورت $7(3x)$ نمایش داد. در این صورت می‌توانیم سه جمله‌ای داده‌شده را به فرم زیر بازنویسی کنیم:

$$9x^2 + 21x + 10 = (3x)^2 + 7(3x) + 10$$

حالا با توجه به عبارت به دست آمده اگر $3x$ را به عنوان جمله مشترک در نظر بگیریم، آن‌گاه برای تجزیه عبارت کافی است دو عدد پیدا کنیم که ضربشان برابر 10 و جمعشان برابر 7 باشد، که این دو عدد نیز، عددهای 2 و 5 هستند، پس عبارت موردنظر به صورت زیر

$$9x^2 + 21x + 10 = (3x)^2 + 7(3x) + 10 = (3x)^2 + (2+5)(3x) + 2 \times 5 = (3x+2)(3x+5)$$

تجزیه می‌شود:

مثال عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $4x^2 + 4x - 15$

ب) $\frac{x^2}{4} + 4x + 7$

پاسخ الف) می‌دانیم $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$ و $4x = 2(2x)$. پس می‌توانیم عبارت داده‌شده را به صورت زیر بازنویسی و نهایتاً تجزیه

$$4x^2 + 4x - 15 = (2x)^2 + 2(2x) - 15 = (2x)^2 + (5 + (-3))(2x) + (5)(-3)$$

کنیم:

$$= (2x+5)(2x+(-3)) = (2x+5)(2x-3)$$



ب) می‌دانیم $\frac{x^2}{4} = \frac{1}{4} \times x^2 = \frac{1}{2} \times x^2 = (\frac{1}{2}x)^2$. حالا باید $4x$ را به صورت مضربی از $\frac{1}{2}x$ بنویسیم، چون $4x = \frac{8}{2}x$ ، در نتیجه

داریم $4x = 8(\frac{1}{2}x)$. نهایتاً با در نظر گرفتن $\frac{1}{2}x$ به عنوان جمله مشترک، می‌توانیم عبارت را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$\frac{x^2}{4} + 4x + 7 = (\frac{1}{2}x)^2 + 8(\frac{1}{2}x) + 7 = (\frac{1}{2}x)^2 + (7+1)(\frac{1}{2}x) + 7 \times 1 = (\frac{1}{2}x + 7)(\frac{1}{2}x + 1)$$

اگر دقت کرده باشید در چند مثال قبل تجزیه سه جمله‌ای‌های به فرم $Mx^2 + Nx + P$ که در آن‌ها M مخالف یک و برابر عددی مربع کامل است را بررسی کردیم. حالا اگر M مربع کامل نباشد، باید چه کار کرد؟! برای تجزیه این نوع سه جمله‌ای‌ها از روشی به نام روش A کمک می‌گیریم ...

روش A برای تجزیه چند جمله‌ای‌ها

فرض کنید $Mx^2 + Nx + P$ یک سه جمله‌ای باشد که در آن ضریب x^2 یعنی M مربع کامل نیست. در این صورت کل عبارت را مساوی A قرار داده و سپس دو طرف تساوی به دست آمده را در M ضرب می‌کنیم:

$$A = Mx^2 + Nx + P \xrightarrow{\times M} M \times A = M(Mx^2 + Nx + P) \Rightarrow M \times A = M^2x^2 + MNx + MP$$

$$\Rightarrow M \times A = (Mx)^2 + N(Mx) + MP$$

حالا در عبارت سمت راست به دست آمده در تساوی بالا، اگر Mx را به عنوان جمله مشترک در نظر بگیریم، می‌توانیم آن را تجزیه کنیم، برای این کار کافی است دو عدد پیدا کنیم که حاصل جمعشان برابر N و حاصل ضربشان برابر MP باشد.

مثال عبارت $3x^2 + 14x + 8$ را تجزیه کنید.

پاسخ چون 3 مربع کامل نیست، پس به روش A باید عبارت داده شده را تجزیه کنیم.

$$A = 3x^2 + 14x + 8 \xrightarrow{(\times 3)} 3A = 3 \times 3x^2 + 3 \times 14x + 3 \times 8 \Rightarrow 3A = (3x)^2 + 14(3x) + 24$$

$$\Rightarrow 3A = (3x)^2 + (12+2)(3x) + 12 \times 2 \Rightarrow 3A = \underbrace{(3x+12)}_{\text{از 3 فاکتور می‌گیریم}} (3x+2) \Rightarrow \cancel{3}A = \cancel{3}(x+4)(3x+2)$$

$$\Rightarrow A = (x+4)(3x+2)$$

مثال عبارت‌های زیر را به کمک روش A تجزیه کنید.

الف) $2x^2 + 9x - 18$

ب) $12x^2 + x - 20$

پاسخ در هر قسمت عبارت داده شده را مساوی A قرار داده و سپس با ضرب ضریب x^2 در دو طرف تساوی عبارت را تجزیه می‌کنیم.

الف) $A = 2x^2 + 9x - 18 \Rightarrow 2A = (2x)^2 + 9(2x) - 36 \Rightarrow 2A = (2x)^2 + (12+(-3))(2x) + (12)(-3)$

$$\Rightarrow 2A = \underbrace{(2x+12)}_{\text{از 2 فاکتور می‌گیریم}} (2x-3) \Rightarrow \cancel{2}A = \cancel{2}(x+6)(2x-3) \Rightarrow A = (x+6)(2x-3)$$

ب) $A = 12x^2 + x - 20 \Rightarrow 12A = (12x)^2 + 1(12x) - 240 \Rightarrow 12A = (12x)^2 + (16+(-15))(12x) + (-15)(16)$

$$\Rightarrow 12A = \underbrace{(12x+16)}_{\text{از 4 فاکتور می‌گیریم}} \underbrace{(12x-15)}_{\text{از 3 فاکتور می‌گیریم}} \Rightarrow \cancel{12}A = \cancel{4} \times (3x+4) \times \cancel{3} \times (4x-5) \Rightarrow A = (3x+4)(4x-5)$$

بسیار فب، اینم از تجزیه به کمک روش A. 😊 حالا تو این قسمت می‌فوییم به اتحاد بوتون معرفی کنیم که تو کتاب درسیتون نیست، اما جزء یکی از اتحادهای فیلی مهمی هست که سال بعد با اون آشنا می‌شید، پس مطرح کردنش فالی از لطف نیست ...

بیشتر بدانید

اتحاد چاق و لاغر

تساوی‌های زیر را اتحاد چاق و لاغر می‌نامند:

۱) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

۲) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$



اثبات جبری اتحاد چاق و لاغر به کمک ضرب پرانتزها به صورت زیر است:

$$1 \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3$$

$$2 \quad (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3$$

در اتحاد چاق و لاغر به عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ عبارت‌های لاغر و به عبارت‌های a^2+ab+b^2 و a^2-ab+b^2 عبارت‌های چاق می‌گویند.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد چاق و لاغر پیدا کنید.

الف) $(2+a)(a^2-2a+4)$

ب) $(x^2-2x^3)(x^4+2x^5+4x^6)$

پاسخ هر دو عبارت داده‌شده، صورت‌های مختلف اتحاد چاق و لاغر هستند، پس داریم:

الف) $(2+a)(a^2-2a+4) = 2^3 + a^3 = 8 + a^3$

ب) $(x^2-2x^3)(x^4+2x^5+4x^6) = (x^2-2x^3)((x^2)^2 + x^2 \times 2x^3 + (2x^3)^2) = (x^2)^3 - (2x^3)^3 = x^6 - 8x^9$

تست اگر $(a-\sqrt[3]{5})(a^2+\sqrt[3]{5}a+\sqrt[3]{25}) = 59$ ، آن‌گاه مقدار عددی a برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ گزینه ۴ با کمی دقت معلوم می‌شود که عبارت داده‌شده در سمت چپ تساوی، همان اتحاد چاق و لاغر است، پس داریم:

$$(a-\sqrt[3]{5})(a^2+\sqrt[3]{5}a+\sqrt[3]{25}) = (a-\sqrt[3]{5})(a^2+a \times \sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{5})^2) = a^3 - (\sqrt[3]{5})^3 = a^3 - \sqrt[3]{5^3} = a^3 - 5$$

$$\Rightarrow a^3 - 5 = 59 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a^3 = 4^3 \Rightarrow a = 4$$

تست اگر $x^2 - \sqrt[3]{49} = 1$ و $(x^2 + \sqrt[3]{7}x + \sqrt[3]{49})(x^2 - \sqrt[3]{7}x + \sqrt[3]{49}) = 8$ ، آن‌گاه مقدار عددی x^6 برابر است با

۵۷ (۴)

۶۵ (۳)

۴۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه ۴ چون $x^2 - \sqrt[3]{49} = 1$ ، پس به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$x^2 - \sqrt[3]{49} = 1 \Rightarrow x^2 - \sqrt[3]{7^3} = 1 \Rightarrow x^2 - (\sqrt[3]{7})^3 = 1 \Rightarrow (x - \sqrt[3]{7})(x + \sqrt[3]{7}) = 1 \quad (I)$$

حالا اگر طرفین هر دو رابطه داده‌شده در صورت سؤال را در هم ضرب کنیم، آن‌گاه با توجه به رابطه (I) و اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(x^2 + \sqrt[3]{7}x + \sqrt[3]{49})(x^2 - \sqrt[3]{7}x + \sqrt[3]{49}) \times (x^2 - \sqrt[3]{49}) = 1 \times 8$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^2 + \sqrt[3]{7}x + \sqrt[3]{7^2})}_{\text{چاق ولاغر}} \underbrace{(x^2 - \sqrt[3]{7}x + \sqrt[3]{7^2})}_{\text{چاق ولاغر}} \underbrace{(x - \sqrt[3]{7})(x + \sqrt[3]{7})}_{\text{چاق ولاغر}} = 8$$

$$\Rightarrow (x - \sqrt[3]{7})(x^2 + \sqrt[3]{7}x + (\sqrt[3]{7})^2) \times (x + \sqrt[3]{7})(x^2 - \sqrt[3]{7}x + (\sqrt[3]{7})^2) = 8$$

$$\Rightarrow (x^3 - (\sqrt[3]{7})^3)(x^3 + (\sqrt[3]{7})^3) = 8 \Rightarrow \underbrace{(x^3 - 7)(x^3 + 7)}_{\text{مزدوج}} = 8 \Rightarrow (x^3)^2 - 7^2 = 8$$

$$\Rightarrow x^6 - 49 = 8 \Rightarrow x^6 = 57$$

تجزیه به کمک اتحاد چاق و لاغر: اگر بتوانیم یک عبارت جبری را به صورت $X^3 - Y^3$ یا $X^3 + Y^3$ بنویسیم، آن‌گاه می‌توانیم آن را به کمک اتحاد چاق و لاغر به صورت‌های $(X - Y)(X^2 + XY + Y^2)$ و $(X + Y)(X^2 - XY + Y^2)$ تجزیه کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $27x^3 + 64y^3$ ب) $125 - \frac{x^3}{8}$ پ) $x^6 - y^6$ ت) $a + 2$

پاسخ در هر قسمت ابتدا عبارت داده‌شده را یا به صورت جمع دو عبارت با توان‌های ۳ می‌نویسیم یا به صورت تفریق دو عبارت با توان‌های ۳ و سپس آن‌ها را به اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم.

الف) $27x^3 + 64y^3 = 3^3 \times x^3 + 4^3 \times y^3 = (3x)^3 + (4y)^3 = (3x + 4y)((3x)^2 - (3x)(4y) + (4y)^2)$
 $= (3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)$

ب) $125 - \frac{x^3}{8} = 5^3 - \frac{x^3}{2^3} = 5^3 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 = (5 - \frac{x}{2})(5^2 + 5 \times \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2) = (5 - \frac{x}{2})(25 + \frac{5x}{2} + \frac{x^2}{4})$

پ) $x^6 - y^6 = x^{2 \times 3} - y^{2 \times 3} = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)((x^2)^2 + x^2 \times y^2 + (y^2)^2)$
 $= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$
 اتحاد مزدوج

د) شاید عبارت داده‌شده در این قسمت کمی عجیب باشد، اما تجزیه آن کار دشواری نیست و فقط کافی است دو جمله a و 2 را به صورت عبارتهایی با توان ۳ بنویسیم، بنابراین باید به صورت زیر عمل کنیم:

$a + 2 = (\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{2})((\sqrt[3]{a})^2 - (\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{2}) + (\sqrt[3]{2})^2) = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{4})$

تا این‌جا اتقارها و روش‌های تجزیه و فوول با هم بررسی کردیم. از این‌جا به بعد می‌فوییم بریم سراغ بخش پایانی درس؛ یعنی نامساوی‌ها و نامعادلات. امیدواریم که فسته نشده باشین.

پرسش‌های تشریحی

۲۰ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به کمک اتحادهای جبری به دست آورید.

- | | | | |
|----|--|----|--|
| ۱ | $(a - 5)(a + 5)$ | ۲ | $(2a - 1)(2a + 1)$ |
| ۳ | $(x - 2y)(2y + x)$ | ۴ | $(x + 2y)(3x - 6y)$ |
| ۵ | $(3m^2 - n^2)(6m^2 + 2n^2)$ | ۶ | $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ |
| ۷ | $(x + 1)(x - 3)$ | ۸ | $(x^2 + 1)(x^2 + 3)$ |
| ۹ | $(2a^2 - 4)(2a^2 + 6)$ | ۱۰ | $(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 3)$ |
| ۱۱ | $(a^2 - \sqrt{15})(a^2 + \sqrt{15})(a^4 + 15)$ | ۱۲ | $(\sqrt{2a} - \sqrt{3})(2\sqrt{2a} + \sqrt{12})$ |

۲۱ حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادهای جبری به دست بیاورید.

- | | | | |
|---|------------------|---|--------------------|
| ۱ | 497×503 | ۲ | 1194×1206 |
| ۳ | $502^2 - 398^2$ | ۴ | $5/19 \times 4/81$ |

۲۲ هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

- | | | | |
|---|----------------------|----|---------------------------|
| ۱ | $a^2 - 9$ | ۲ | $2a^2 - 8$ |
| ۳ | $x^4 - 8x^2$ | ۴ | $(x + y)^2 - (x - y)^2$ |
| ۵ | $(x^2 + 2x + 1) - 9$ | ۶ | $(2a - 1)^2 - (3a - 5)^2$ |
| ۷ | $x^2 - 3x - 10$ | ۸ | $a^2b^2 + 10ab + 21$ |
| ۹ | $a^3 - 11a^2 + 30a$ | ۱۰ | $4a^2 + 6ab - 4b^2$ |

۲۳ اگر $a - b = 7$ و $a^2 - b^2 = 56$ باشد، آن‌گاه $a + b$ کدام است؟

۲۴ به کمک اتحاد مزدوج نشان دهید که اگر $a, b > 0$ و $a^2 > b^2$ باشد، آن‌گاه $a > b$ است.

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۷۷ مجموع سه عدد a ، b و c برابر ۱۱ و مجموع حاصل ضرب دوبه‌دوی آن‌ها ۳ می‌باشد. مجموع مجذورات این سه عدد کدام است؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۱۰ (۴) ۱۱۵

۷۸ شرط برقراری تساوی $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2$ کدام است؟

- (۱) $a^2 = 2bc$ (۲) $b^2 = 2ac$ (۳) $c^2 = 2ab$ (۴) $a+b+c = abc$

۷۹ اگر a ، b و c اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وتر c باشند، حاصل $(a+b+c)^2$ برابر کدام است؟

- (۱) $2(a+b)(a+c)$ (۲) $2(a+c)(b+c)$ (۳) $2(b+c)(a+b)$ (۴) $2c(a+b+c)$

۸۰ اگر $a+b+c = 10$ باشد و داشته باشیم $ab+bc+ac = 5$ ، آن‌گاه $a^2+b^2+c^2$ کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۷۰ (۴) ۹۰

۸۱ حاصل عبارت $(a+b-c)^2 - (a+b)^2 + 2ac$ کدام است؟

- (۱) $c(c-2b)$ (۲) $a(c-2b)$ (۳) $c(c+2b)$ (۴) $a(c+2b)$

۸۲ اگر $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ باشد، کدام‌یک از روابط زیر درست است؟ ($abc \neq 0$)

- (۱) $a = \frac{bc}{a-c}$ (۲) $a = \frac{bc}{b+c}$ (۳) $a = \frac{ac}{a-c}$ (۴) $c = \frac{ab}{a-b}$

۸۳ حاصل عبارت $(x^2 + x + \frac{1}{x})^2$ کدام است؟

- (۱) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 + x^{-2}$ (۲) $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2$
(۳) $x^4 + x^2 + x^{-2} + 2x^3 + 2x + 2$ (۴) $x^4 - 2x^3 + x^2 + x^{-2} + 2x - 2$

۸۴ اگر $a+b+c = 1$ و $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ باشد، حاصل $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۲

۸۵ اگر $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 14 = 0$ باشد، آن‌گاه حاصل $x^2 + y^2 + z^2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۴ (۳) -۱۴ (۴) ۱۰

۸۶ اگر $x = \sqrt{2} + 1$ باشد، $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ کدام است؟

- (۱) $3 - 2\sqrt{2}$ (۲) $2 - 3\sqrt{2}$ (۳) $3 - 2\sqrt{2}$ (۴) $3 + 2\sqrt{2}$

۸۷ اگر $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ باشد، آن‌گاه $2x - y$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۴

۸۸ اگر $2a^2 + 4b^2 - 4ab - 2a + 1 = 0$ باشد، آن‌گاه حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۸۹ حاصل $950^2 - 900^2 - 50^2$ کدام است؟

- (۱) ۹۴۰۰۰ (۲) ۹۰۰۰۰ (۳) ۸۶۰۰۰ (۴) ۷۲۰۰۰

۹۰ حاصل $201^2 + 199^2$ کدام است؟

- (۱) ۲۰۰۰۲ (۲) ۴۰۰۰۲ (۳) ۸۰۰۰۲ (۴) ۱۶۰۰۰۲

۹۱ تجزیه عبارت $9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc$ کدام است؟

- (۱) $(3a + 2b + c)^2$ (۲) $(3a - 2b + c)^2$ (۳) $(3a - 2b - c)^2$ (۴) $(3a + 2b - c)^2$

۹۲ اگر $A = x - 3$ و $B = x + 2$ باشد، آن‌گاه $A^2 - B^2$ کدام است؟

- (۱) $x^2 - 6x + 25$ (۲) $-10x + 5$ (۳) $-2x + 1$ (۴) $x^2 + 6x + 25$

۹۳ حاصل عبارت $(x^{\frac{a+1}{2}} + y^{\frac{a-1}{2}})(x^{\frac{a+1}{2}} - y^{\frac{a-1}{2}})$ کدام است؟

- (۱) $x^{a+1} + y^{a-1}$ (۲) $x^{a+1} - y^{a-1}$ (۳) $x^{2a} - y^{2a}$ (۴) $x^{a-1} - y^{a+1}$

۹۴ اگر $A = a^2 + 4$ و $B = a^2 - 4$ باشد، حاصل عبارت $(A - B)(A + B) + B^2$ کدام است؟

- (۱) $a^2 + 8a + 16$ (۲) $-a^4 + 4a^2 - 16$ (۳) $2a^4 + 16a^2 + 32$ (۴) $a^4 + 8a^2 + 16$

۹۵ حاصل عبارت $(\sqrt{15} - 2)(\sqrt{15} + 2)$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) -۱۱ (۳) ۱۷ (۴) -۱۷

۹۶ جذر $2(2 + \sqrt{3})^2(2 - \sqrt{3})^3$ کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} + 1$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3} - 1$

(آزمون‌های پیشرفت تفهیمی فیلی سبز)

۹۷ حاصل عبارت $(5 - \sqrt{21})^4(2\sqrt{21} + 10)^4$ کدام است؟

- (۱) 2^8 (۲) 2^9 (۳) 8^7 (۴) 8^9

۹۸ حاصل $\frac{c^2 - (a - b)^2}{a - b + c}$ کدام است؟

- (۱) $a + b + c$ (۲) $b + c - a$ (۳) $a + b - c$ (۴) $a + c - b$

۹۹ اگر $a = 3^6$ و $b = 6^3$ باشد، حاصل $\frac{(2a^2 - b)(2a^2 + b) - b^2}{-2a^4 + 2b^2 - 2a^4}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) 3^6 (۴) 6^3

۱۰۰ اختلاف دو عدد 37^2 و 63^2 برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۲۶۰۱ (۲) ۲۶۱۰ (۳) ۲۰۶۱ (۴) ۲۶۰۰

۱۰۱ حاصل $\frac{1400 \times 101}{402^2 - 2^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $-\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{8}{7}$ (۴) $-\frac{8}{7}$

۱۰۲ حاصل عبارت $\frac{271^2 - 129^2}{542^2 - 258^2}$ کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۰۳ حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + 46^2 - 45^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1 = ?$

- (۱) ۱۲۷۵ (۲) ۱۳۲۵ (۳) ۳۰۲۵ (۴) ۵۰۵۰

۱۰۴ مقدار عبارت $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1) \dots (2^{128}+1)$ کدام است؟

- (۱) $2^{512} + 1$ (۲) $2^{512} - 1$ (۳) $2^{256} + 1$ (۴) $2^{256} - 1$

۱۰۵ اگر $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{255}+\sqrt{256}}$ باشد، مقدار A کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۰ (۳) $16\sqrt{2}$ (۴) $10\sqrt{2}$

۱۰۶ اگر $a = 61$ و $b = 60$ باشد، مقدار عددی عبارت $(a^{32} - (a+b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16}))$ کدام است؟

- (۱) 61^{32} (۲) 1^{32} (۳) 60^{32} (۴) $61^{32} - 60^{32}$

۱۰۷ اگر $x = \sqrt{8}$ و $y = 3$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) \dots (x^{256} + y^{256}) - y^{512}$

- (۱) 2^{256} (۲) $\sqrt{2}^{256}$ (۳) $\sqrt{8}^{128}$ (۴) -8^{256}

۱۰۸ مجموع ارقام عبارت $A = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$ به ازای $x = 10$ کدام است؟

- (۱) ۹۰ (۲) $10^{16} - 1$ (۳) ۱۴۴ (۴) 10^{16}

۱۰۹ در تساوی $\frac{(1-x^{16})}{A} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ ، عبارت A کدام است؟

- (۱) $1 - x$ (۲) $1 - x^2$ (۳) $1 - x^4$ (۴) $1 - x^8$

۱۱۰ حاصل عبارت $\frac{100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1}{1+2+3+\dots+100}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $100^2 - 1^2$



۱۱۱ حاصل عبارت $a^2b^2 + a^2b^3$ به ازای $a = \sqrt{8} - \sqrt{9}$ و $b = \sqrt{8} + \sqrt{9}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{9}$ (۲) $\sqrt{8}$ (۳) $2\sqrt{8}$ (۴) $2\sqrt{9}$

۱۱۲ اگر $p = 3^{1397} + 3^{-1397}$ و $q = 3^{1397} - 3^{-1397}$ باشد، حاصل $p^2 - q^2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) 2×3^{2794} (۴) 2×3^{-2794}

۱۱۳ حاصل عبارت $(6+2x)^2(27+3x^2)^2(3-x)^2$ پس از ضرب برابر کدام گزینه زیر است؟

- (۱) $36(81-x^4)$ (۲) $72(81-x^4)$ (۳) $36(81-x^4)^2$ (۴) $72(81-x^4)^2$

۱۱۴ تجزیه شده عبارت $a^2 - b^2 - 4b - 4$ کدام است؟

- (۱) $(a-b+2)(a+b+2)$ (۲) $(a-b-2)(a+b+2)$
(۳) $(a-b-2)(a-b)$ (۴) $(a-b-2)(a-2)$

۱۱۵ در تجزیه $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 1$ کدام عامل وجود دارد؟

- (۱) $a+b-c-1$ (۲) $a-b+c-1$ (۳) $(a+b)^2$ (۴) $a+b+c-1$

۱۱۶ دو عدد طبیعی a و b به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند. احتمال این که $a^2 - b^2$ بر ۳ بخش پذیر باشد، چه قدر است؟

(آزمون‌های پیش‌تاز قبلی سبز)

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۱۱۷ حاصل عبارت $(a^2 + a + 1)(a^2 + a - 1)$ کدام است؟

- (۱) $a^4 - 2a^2 - a^2 - 1$ (۲) $a^4 + 2a^2 - a^2 - 1$
(۳) $a^4 + 2a^2 + a^2 - 1$ (۴) $a^4 + 2a^2 + a^2 + 1$

۱۱۸ اگر $x^2 + 4y^2 = 4xy$ باشد، مقدار $x^2 - 4y^2$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) صفر

۱۱۹ عبارت $(a+b+c)^2 - (-a+b+c)^2$ همواره دارای کدام عامل است؟

- (۱) a (۲) b (۳) c (۴) $a+b$

۱۲۰ پس از تبدیل عبارت $x^2y^2 - y^2 - 2xy + 1$ به ضرب، کدام عامل زیر وجود دارد؟

- (۱) $xy + y + 1$ (۲) $-xy - 1 + y$ (۳) $xy - 1$ (۴) $xy - y - 1$

۱۲۱ حاصل عبارت $m^3 - 2m^2 - m + 2$ کدام است؟

- (۱) $(m-2)(m+2)(m-1)$ (۲) $(m-2)(m+1)(m-1)$
(۳) $(m-2)(m+2)(m+1)$ (۴) $(m+2)(m+1)(m-1)$

۱۲۲ حاصل عبارت $x^2 + a^2x + (a-1)(a+1)$ کدام است؟

- (۱) $(x+a^2-1)(x+1)$ (۲) $(x+a^2-1)(x-1)$ (۳) $(x+a^2+1)(x-1)$ (۴) $(x+a^2+1)(x+1)$

۱۲۳ حاصل عبارت $(\sqrt{4}-\sqrt{5})^{20}(\sqrt{4}+\sqrt{5})^{19}$ کدام است؟

- (۱) $(\sqrt{4})^{20} - (\sqrt{5})^{20}$ (۲) $\sqrt{4} - \sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{5} - \sqrt{4}$ (۴) ۱

(آزمون‌های پیش‌تاز قبلی سبز)

۱۲۴ حاصل عبارت $1 \frac{1}{77777} \times \frac{77776}{77777} + (\frac{1}{77777})^2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{77777}$ (۳) $(\frac{77776}{77777})^2$ (۴) صفر

۱۲۵ حاصل جمع ارقام 9997×10003 برابر چند است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲۶ (۳) ۳۸ (۴) ۶۴

(آزمون‌های پیشرفت تفصیلی قبلی سبز)

۱۲۶ کدام یک از عبارت‌های زیر در تجزیه $x^4 - x^2 - 12$ وجود ندارد؟

- (۱) $x-2$ (۲) $x+2$ (۳) $x+3$ (۴) x^2+3

۱۲۷ تجزیه عبارت $2x^2 - x - 3$ کدام است؟

- (۱) $(2x+3)(2x-1)$ (۲) $(2x-3)(x+1)$ (۳) $2(x-3)(x+1)$ (۴) $(2x-3)^2$



۱۲۸ حاصل عبارت $(x^2 + 4x + 2)^2 + 3(x^2 + 4x + 2) + 2$ برابر است با:

- (۱) $(x-2)^2(x+3)(x+1)$
 (۲) $(x+2)^2(x-3)(x-1)$
 (۳) $(x+2)^2(x+3)(x+1)$
 (۴) $(x+2)^2(x-3)(x+1)$

(آزمون‌های پیش‌تاز فیلی سبز)

۱۲۹ مجموع دو عدد α و β و حاصل ضرب آن‌ها b است. α و β جواب‌های کدام گزینه هستند؟

- (۱) $x^2 + ax + b = 0$
 (۲) $x^2 - ax + b = 0$
 (۳) $x^2 + ax - b = 0$
 (۴) $x^2 - ax - b = 0$

۱۳۰ در تجزیه $a^{12} - 1$ ، کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱) $a + 1$
 (۲) $a^4 + a^2 + 1$
 (۳) $a^2 + 1$
 (۴) $a^6 + a^3 + 1$

۱۳۱ عبارت $a^6 - 7a^3 - 8$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

- (۱) $a + 1$
 (۲) $a^2 - a + 1$
 (۳) $a^2 + 2a + 4$
 (۴) هر سه مورد

۱۳۲ اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟

- (۱) ۲۱۶
 (۲) ۲۳۸
 (۳) ۲۴۴
 (۴) ۲۶۴

۱۳۳ حاصل عبارت $\frac{(\sqrt{3}x-1)(3x^2+\sqrt{3}x+1)}{3\sqrt{3}x^3-1}$ کدام است؟

- (۱) -۱
 (۲) ۲
 (۳) -۲
 (۴) ۱

۱۳۴ اگر $a^2 + b^2 = ab$ باشد، حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) صفر
 (۳) -۱
 (۴) $1394ab$

۱۳۵ عبارت $(a-2)(a+2)(a^4+4a^2+16)$ با کدام عبارت برابر است؟

- (۱) $a^6 + 64$
 (۲) $(a^3 - 8)(a^3 + 8)$
 (۳) $(a^3 - 4)(a^3 + 4)$
 (۴) $a^6 - 64$

۱۳۶ اگر $a^2 + b^2 = 2$ باشد، حاصل $\frac{b^2 + b + 1}{a^2 + a + 1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{a}{b}$
 (۲) $-\frac{a}{b}$
 (۳) $\frac{a-1}{b-1}$
 (۴) $-\frac{a-1}{b-1}$

۱۳۷ اگر سن پسری را ۲ برابر کنیم و ۳ برابر سن شش سال قبل او را از آن کم کنیم، سن کنونی پسر به دست می‌آید. پسر چند سال دارد؟

- (۱) ۳
 (۲) ۹
 (۳) ۴
 (۴) ۱۲

۱۳۸ حاصل ضرب دو عدد فرد متوالی ۳۲۳ است. مجموع این دو عدد فرد، کدام است؟

- (۱) ۳۲
 (۲) ۳۴
 (۳) ۳۵
 (۴) ۳۶

۱۳۹ اختلاف نصف و ثلث عددی ۱۵ می‌باشد. آن عدد کدام است؟

- (۱) ۶۰
 (۲) ۹۰
 (۳) ۵۴
 (۴) ۸۴

۱۴۰ از ۴ برابر مجذور عددی طبیعی، ۹ واحد کم کردیم و حاصل از ۶ برابر همان عدد، ۹ واحد بیشتر شد. آن عدد کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۲
 (۴) ۷

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

نابرابری‌ها و مساوی‌ها

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، در این صورت سه حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول $a < b$ از b کم‌تر باشد که در این صورت می‌نویسیم $a < b$.

حالت دوم $a = b$ با b مساوی باشد که در این صورت می‌نویسیم $a = b$.

حالت سوم $a > b$ از b بیشتر باشد که در این صورت می‌نویسیم $a > b$.

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a < b$ ، آن‌گاه مقداری حقیقی و مثبت مانند P وجود دارد که وقتی با a جمع می‌شود، حاصل برابر b شود؛ یعنی داشته باشیم $a + P = b$.

نکته اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که a از b بیشتر نباشد، آن‌گاه می‌توانیم نتیجه بگیریم که a یا مساوی b است یا از b کم‌تر است. در این صورت می‌گوییم a کوچک‌تر یا مساوی b است و می‌نویسیم $a \leq b$. به همین ترتیب اگر m و n نیز دو عدد حقیقی باشند که

m از n کم‌تر نباشد، آن‌گاه m بزرگ‌تر یا مساوی n است و داریم $m \geq n$. مثلاً داریم: $3 \leq 5, -3 \geq -7, 5 \geq 5, -\frac{1}{4} \leq 0$

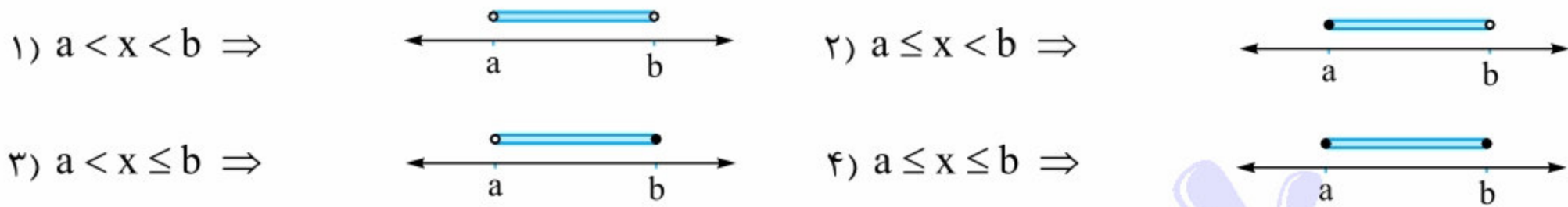
نتیجه فرض کنید a عددی حقیقی و نامنفی است، (یعنی a منفی نیست)، در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که a یا مثبت است یا برابر صفر است، یعنی $a \geq 0$. پس $a \geq 0$. به همین ترتیب اگر b عددی حقیقی و نامثبت باشد، داریم $b \leq 0$.

نمایش بازه اعداد حقیقی روی محور اعداد

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی و مشخص باشند که $a < b$ و x نیز متغیری حقیقی باشد که از a بزرگ‌تر است و از b کوچک‌تر، در این صورت می‌نویسیم $a < x < b$ و می‌گوییم x در بازه a تا b تغییر می‌کند و همچنین این بازه را روی محور اعداد به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



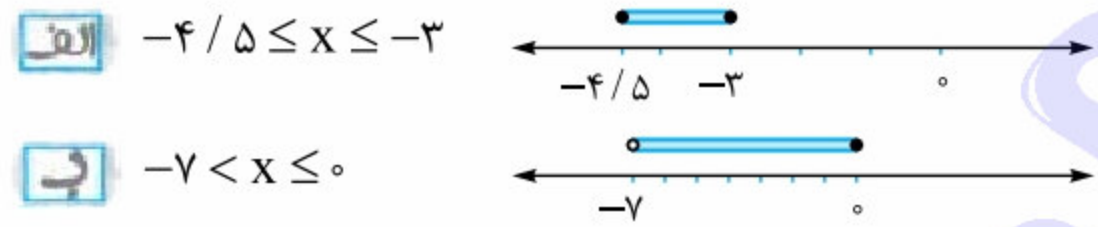
همان‌طور که دیدید در نمایش بازه $a < x < b$ روی محور اعداد حقیقی، در نقاط a و b از دایره‌های تو خالی استفاده کردیم، علت این نحوه نمایش این است که x هیچ‌گاه نه می‌تواند برابر a باشد و نه b . اگر x با حداقل یکی از a یا b برابر باشد، آن‌گاه باید از دایره‌های توپر استفاده کنیم. به طور کلی ۴ حالت زیر همیشه ممکن است رخ دهد:



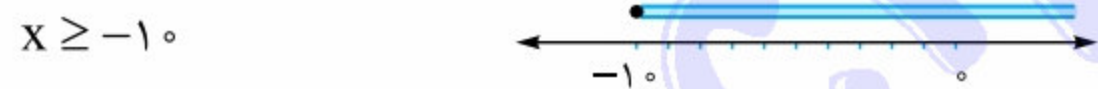
مثال بازه‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

- الف) $-4/5 \leq x \leq -3$ ب) $-7 < x \leq 0$ پ) $x \geq -10$ ت) $x < 12/3$

پاسخ با توجه به محدوده تغییرات x ، هر بازه را رسم می‌کنیم:



برای رسم بازه این قسمت، کافی است تمام نقاط روی محور اعداد حقیقی که بزرگ‌تر یا مساوی -10 هستند را مشخص کنیم. برای این کار از -10 تا انتهای قسمت مثبت محور اعداد را به صورت زیر رنگ می‌کنیم:



برای رسم بازه این قسمت نیز مانند روش قسمت سوم عمل می‌کنیم:



کاربرد نامساوی‌ها در تعیین علامت اعداد

یکی از کاربردهای نامساوی‌ها در تعیین مثبت یا منفی بودن یک متغیر (عدد) است، که در این بخش سعی می‌کنیم با حل چند مثال، این نوع مسئله‌ها را بررسی کنیم.

مثال درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را تعیین کنید.

- الف) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a^2 b > 0$ ، آن‌گاه b نامنفی است.
 ب) اگر x و y دو عدد حقیقی باشند که $xy^2 + 6xy + 9x \leq 0$ ، آن‌گاه هم x و هم y منفی‌اند.
 پ) اگر x ، y و z سه عدد حقیقی باشند که $xyz > 0$ ، آن‌گاه حداقل یکی از آن‌ها مثبت‌اند.
 ت) اگر a ، b و c سه عدد حقیقی باشند که $a^3 b^4 c^5 < 0$ ، آن‌گاه حداقل دو تا از آن‌ها مثبت‌اند.

پاسخ الف) دقت کنید که a^2 همواره عددی نامنفی است، پس برای آن که حاصل ضرب $a^2 \times b$ بزرگ‌تر از صفر شود باید اولاً a و b هر دو مخالف صفر باشند و دوماً b نیز عددی مثبت باشد، بنابراین این جمله غلط است، چون b نمی‌تواند برابر صفر باشد.

پ) اول از x در عبارت $xy^2 + 6xy + 9x = x(y^2 + 6y + 9)$ فاکتور می‌گیریم، در این صورت داریم:





از طرفی به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم: $xy^2 + 6xy + 9x = x(y^2 + 6y + 9) = x(y^2 + 2 \times y \times 3 + 3^2) = x(y + 3)^2$
 حالا مشابه قسمت (الف) برای این که حاصل ضرب $x \times (y + 3)^2$ کم‌تر یا مساوی صفر شود، یا باید y برابر -3 باشد یا x عددی نامثبت و y دلخواه باشد، پس این جمله هم غلط است.

ج فرض کنید هر سه‌تای x, y, z نامثبت باشند، در این صورت اگر حداقل یکی از آن‌ها برابر صفر باشد، آن‌گاه حاصل ضرب xyz برابر صفر می‌شود که خلاف فرض است و اگر هر سه منفی باشند نیز حاصل ضرب xyz هم منفی می‌شود که باز هم خلاف فرض است، پس حداقل یکی از x, y, z باید مثبت باشند، در نتیجه این جمله درست است.

د فرض کنید $a > 0$ و $c < 0, b < 0, b^4 > 0, c^5 < 0, a^3 > 0$ ، پس حاصل ضرب $a^3 b^4 c^5$ با توجه به علامت متغیرها برابر عددی منفی می‌شود و در نتیجه رابطه $a^3 b^4 c^5 < 0$ برقرار است، یعنی لزومی ندارد حداقل دو تا از a, b, c مثبت باشند، پس این جمله هم غلط است.

تست اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a < 0 < b$ ، آن‌گاه کدام گزینه در مورد علامت عبارت $a^2 - b^2$ صحیح است؟

- (۱) حتماً منفی است. (۲) حتماً مثبت است. (۳) کم‌تر یا مساوی صفر است. (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

پاسخ گزینه ۱: با توجه به این که a و b متغیرند، پس b می‌تواند برابر هر مقدار مثبت دلخواه باشد و a نیز می‌تواند برابر هر مقدار دلخواه منفی باشد، در این صورت به کمک مثال‌های عددی زیر می‌توان فهمید که نمی‌شود علامت $a^2 - b^2$ را به طور کلی تعیین کرد.

I) $a = -2, b = 3 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4 - 9 = -5 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0$

II) $a = -3, b = 3 \Rightarrow a^2 - b^2 = 9 - 9 = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0$

III) $a = -3, b = 2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0$

پس $a^2 - b^2$ می‌تواند منفی، مثبت یا برابر صفر باشد.

خواص نامساوی‌ها

در این بخش با خواص نامساوی‌ها که نقش مهمی در حل مسائل مربوط به نامعادلات دارند آشنا می‌شویم.

خاصیت ۱ اگر دو طرف یک نامساوی را با عددی مانند c جمع کنیم، نامساوی همچنان برقرار می‌ماند؛ یعنی مثلاً اگر $a < b$ و c عددی حقیقی و دلخواه باشد، آن‌گاه داریم $a + c < b + c$.

الف) $3 < 5 \xrightarrow{+(4)} 3 + 4 < 5 + 4 \Rightarrow 7 < 9$

مثال

ب) $x \geq 11 \xrightarrow{+(-5)} x + (-5) \geq 11 + (-5) \Rightarrow x - 5 \geq 11 - 5 \Rightarrow x - 5 \geq 6$

نتیجه به کمک خاصیت اول می‌دانیم که اگر دو طرف یک نامساوی را منهای عددی مانند c کنیم، آن‌گاه نامساوی همچنان برقرار می‌ماند؛ مثلاً اگر $a \geq b$ ، آن‌گاه داریم $a - c \geq b - c$.

خاصیت ۲ اگر دو طرف یک نامساوی را در عددی مثبت مانند c ضرب کنیم، نامساوی همچنان برقرار می‌ماند؛ مثلاً اگر $a > b$ و $c > 0$ ، آن‌گاه داریم $ac > bc$.

الف) $-4 \leq -1 \xrightarrow{\times(3)} (-4) \times 3 \leq (-1) \times 3 \Rightarrow -12 \leq -3$

مثال

ب) $-2x > 10 \xrightarrow{\times(\frac{1}{2})} \frac{1}{2} \times (-2x) > \frac{1}{2} \times 10 \Rightarrow -x > 5$

نتیجه به کمک خاصیت دوم می‌دانیم که اگر دو طرف یک نامساوی را تقسیم بر عددی مثبت مانند c کنیم، نابرابری همچنان برقرار می‌ماند؛ مثلاً اگر $a < b$ و $c > 0$ ، آن‌گاه داریم $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

خاصیت ۳ اگر دو طرف یک نامساوی را در عددی منفی مانند c ضرب کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند؛ یعنی مثلاً اگر $a \geq b$ و $c < 0$ ، آن‌گاه داریم $ac \leq bc$.

الف) $-5 > -7 \xrightarrow{\times(-3)} (-5) \times (-3) < (-7) \times (-3) \Rightarrow 15 < 21$

مثال

(جهت عوض شد)

ب) $5 \leq -2x \xrightarrow{\times(-\frac{1}{2})} (-\frac{1}{2}) \times 5 \geq (-\frac{1}{2}) \times (-2x) \Rightarrow -\frac{5}{2} \geq \frac{1}{2}x$

(جهت عوض شد)



نتیجه به کمک خاصیت سوم می‌توان فهمید که اگر دو طرف یک نامساوی را تقسیم بر عددی منفی مانند c کنیم، نابرابری هم‌چنان

برقرار می‌ماند اما جهت آن تغییر می‌کند؛ مثلاً اگر $a > b$ و $c < 0$ ، آن‌گاه داریم $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

خاصیت‌های (۱)، (۲) و (۳) فواید اصلی مربوط به نامساوی‌ها هستند، حال آنکه این فواید رو یاد گرفتیم بریم به پندتا مثال از شون حل کنیم و بعد بریم سراغ بقیه فواید.

مثال اگر $x < 4$ ، آن‌گاه ثابت کنید $3x - 4 < 8$.

پاسخ ابتدا دو طرف نامساوی $x < 4$ را در عدد سه ضرب می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$x < 4 \xrightarrow{\times(3)} 3 \times x < 3 \times 4 \Rightarrow 3x < 12 \quad (I)$$

حالا برای اثبات حکم مسئله کافی است دو طرف نامساوی (I) را منهای ۴ کنیم، در این صورت داریم:

$$3x < 12 \xrightarrow{-(4)} 3x - 4 < 12 - 4 \Rightarrow 3x - 4 < 8$$

مثال ثابت کنید اگر $2x - \frac{7}{3} \geq 5$ ، آن‌گاه داریم $10 - 6x \leq -12$.

پاسخ با توجه به این که در حکم مسئله ضریب عددی x برابر ۶- است و در فرض مسئله این ضریب برابر ۲ است، پس بهتر است برای

تبدیل ۲ به ۶-، طرفین نامساوی اولیه را در ۳- ضرب کنیم، پس داریم:

$$2x - \frac{7}{3} \geq 5 \xrightarrow{\times(-3)} (-3)(2x - \frac{7}{3}) \leq 5 \times (-3) \Rightarrow -6x + 7 \leq -15 \quad (I)$$

حالا اگر طرفین نامساوی (I) را با ۳ جمع کنیم، داریم:

$$-6x + 7 \leq -15 \xrightarrow{+(3)} -6x + 7 + 3 \leq -15 + 3 \Rightarrow -6x + 10 \leq -12 \Rightarrow 10 - 6x \leq -12$$

تست اگر بدانیم $3x - 2 < \frac{1}{3}$ و $a < \frac{4}{5}x + \frac{0}{5}$ و ضمناً $5\frac{1}{9} - 4x > b$ ، آن‌گاه حاصل ضرب کم‌ترین مقدار ممکن برای a در

بیشترین مقدار ممکن برای b برابر است با

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ گزینه ۲: ابتدا به کمک نامساوی $3x - 2 < \frac{1}{3}$ ، سمت چپ دو نامساوی دیگر را می‌سازیم.

$$1) \quad 3x - 2 < \frac{1}{3} \xrightarrow{\times(\frac{3}{2})} \frac{3}{2}(3x - 2) < \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{9x}{2} - 3 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{5}x - 3 < \frac{0}{5}$$

$$\xrightarrow{+(3/5)} \frac{4}{5}x - 3 + \frac{3}{5} < \frac{0}{5} + \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x + \frac{0}{5} < \frac{4}{5} \quad (I)$$

$$2) \quad 3x - 2 < \frac{1}{3} \xrightarrow{\times(-\frac{4}{3})} (-\frac{4}{3})(3x - 2) > \frac{1}{3} \times (-\frac{4}{3}) \Rightarrow -4x + \frac{8}{3} > -\frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{+(\frac{22}{9})} -4x + \frac{8 \times 3}{3 \times 3} + \frac{22}{9} > -\frac{4}{9} + \frac{22}{9} \Rightarrow -4x + \frac{46}{9} > \frac{18}{9} \Rightarrow 5\frac{1}{9} - 4x > 2 \quad (II)$$

حالا دقت کنید که با توجه به نامساوی (I)، ۴ کوچک‌ترین مقداری است که $\frac{4}{5}x + \frac{0}{5}$ از آن کم‌تر است و ضمناً با توجه به نامساوی

(II)، ۲ بیشترین مقداری است که $5\frac{1}{9} - 4x$ از آن بزرگ‌تر است، پس $a = 4$ و $b = 2$ در نتیجه $ab = 8$.

خواص دیگری از نامساوی‌ها

خاصیت (۴) طرفین دو نامساوی را به شرط یکسان بودن علامت بین طرفین نامساوی‌ها می‌توان با هم جمع کرد؛ یعنی مثلاً اگر $a > b$ و $c > d$ ، آن‌گاه

داریم $a + c > b + d$.

مثال الف) $\begin{cases} 5 \geq 2 \\ -9 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \geq 2 \\ -1 \geq -9 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 5 + (-1) \geq 2 + (-9) \Rightarrow 5 - 1 \geq 2 - 9 \Rightarrow 4 \geq -7$

ب) $\begin{cases} a < b - 2 \\ 2a > 5 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < b - 2 \\ 5 - b < 2a \end{cases} \xrightarrow{(+)} a + 5 - b < b - 2 + 2a$

خاصیت (۵) اگر $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ و $b, d > 0$ ، آن‌گاه نامساوی $ad > bc$ برقرار است. در واقع اگر در دو طرف یک نامساوی دو عبارت کسری موجود

باشند، آن‌گاه به شرطی می‌توانیم طرفین وسطین کنیم که مخرج هر دو کسر، اعداد مثبتی باشد.

الف) $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2 \times 4 < 3 \times 3 \Rightarrow 8 < 9$

ب) $\frac{3}{-5} \geq -\frac{8}{10} \xrightarrow{\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}, -\frac{8}{10} = \frac{-8}{10}} (-3) \times 10 \geq (-8) \times 5 \Rightarrow -30 \geq -40$

تست اگر بدانیم $\frac{3x+2}{3} \leq \frac{4x-3}{8}$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار ممکن برای $24x$ برابر است با:

(۱) -۲۵ (۲) -۵۰ (۳) ۲۵ (۴) ۵۰

پاسخ گزینه ۱ •• دقت کنید که چون مخرج عبارتهای کسری هر دو طرف نامساوی مثبت‌اند، پس می‌توانیم طرفین وسطین کنیم،

در این صورت داریم: $\frac{3x+2}{3} \leq \frac{4x-3}{8} \Rightarrow 8(3x+2) \leq 3(4x-3) \Rightarrow 24x+16 \leq 12x-9$ (I)

حالا اگر طرفین نامساوی (I) را ابتدا منهای $12x$ کنیم و سپس طرفین نامساوی جدید را منهای ۱۶ کنیم، آن‌گاه داریم:

$24x+16-12x \leq 12x-9-12x \Rightarrow 12x+16 \leq -9 \xrightarrow{-(16)} 12x+16-16 \leq -9-16 \Rightarrow 12x \leq -25$

نهایتاً دقت کنید چون $12x \leq -25$ پس با ضرب طرفین این نامساوی در عدد ۲ داریم، $24x \leq -50$ و این یعنی بیشترین مقدار $24x$ برابر -50 است.

خاصیت ۶ اگر بدانیم $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ هم‌علامت‌اند و ضمناً $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه با معکوس کردن کسرهای موجود در نامساوی، جهت نامساوی تغییر

می‌کند؛ یعنی داریم $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$.

مثال (الف) $\frac{2}{3} > \frac{4}{9} \xrightarrow[\text{هم‌علامت}]{\text{طرفین}} \frac{3}{2} < \frac{9}{4}$ (علامت عوض شد) $(\frac{3}{2} = 1/5, \frac{9}{4} = 2/25)$

(ب) $-\frac{5}{8} \leq -\frac{3}{16} \xrightarrow[\text{هم‌علامت}]{\text{طرفین}} -\frac{1}{5} \geq -\frac{16}{3}$ (علامت عوض شد) $(-\frac{1}{5} = -1/6, -\frac{16}{3} = -5/3)$

(طرفین نامساوی هم‌علامت نیستند، پس وقتی عبارتهای معکوس می‌کنیم، علامت لزوماً عوض نمی‌شود.) (پ) $-3 < 5 \Rightarrow -\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$

تست اگر $\frac{7}{2x-3} > 1$ ، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر حتماً صحیح است؟

(۱) $1 - \frac{2}{3}x > -\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}x - 1 > \frac{7}{3}$ (۳) $1 - \frac{2}{3}x < \frac{7}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}x - 1 > -\frac{7}{3}$

پاسخ گزینه ۱ • دقت کنید که چون $\frac{7}{2x-3}$ از ۱ بزرگ‌تر است، پس حتماً مثبت است. حالا چون دو طرف نامساوی داده شده، هم‌علامت‌اند، پس به کمک معکوس کردن دو طرف و خواص نامساوی‌ها داریم:

$\frac{7}{2x-3} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{7} < 1 \xrightarrow{\times(7)} 2x-3 < 7 \xrightarrow{\div(-2)} \frac{2x-3}{-2} > \frac{7}{-2} \xrightarrow{\text{تفکیک}} -\frac{2x}{2} + 1 > -\frac{7}{2} \Rightarrow 1 - \frac{2x}{2} > -\frac{7}{2}$

خاصیت ۷ اگر طرفین یک نامساوی را به توان عددی طبیعی و فرد مانند n برسانیم، نامساوی همچنان برقرار می‌ماند؛ مثلاً اگر $a < b$ و n عددی فرد باشد، آن‌گاه داریم $a^n < b^n$.

مثال (الف) $-3 < 2 \xrightarrow{()^3} (-3)^3 < 2^3 \Rightarrow -27 < 8$

(ب) $x-1 \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{()^5} (x-1)^5 \leq (\frac{3}{2})^5 \Rightarrow (x-1)^5 \leq \frac{243}{32}$

خیلی خاص

۱ اگر از طرفین یک نامساوی ریشه فرد بگیریم، نامساوی همچنان برقرار می‌ماند؛ یعنی مثلاً اگر $a \geq b$ و n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه داریم: $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$

مثال (الف) $32 < 243 \xrightarrow{(\sqrt[5]{\quad})} \sqrt[5]{32} < \sqrt[5]{243} \Rightarrow \sqrt[5]{2^5} < \sqrt[5]{3^5} \Rightarrow 2 < 3$

(ب) $x^3 \geq 512 \xrightarrow{(\sqrt[3]{\quad})} \sqrt[3]{x^3} \geq \sqrt[3]{512} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} \geq \sqrt[3]{8^3} \Rightarrow x \geq 8$

۲ فرض کنید طرفین یک نامساوی هم‌علامت‌اند و n نیز برابر عددی طبیعی و زوج است. در این صورت اگر بخواهیم طرفین این نامساوی را به توان n برسانیم، دو حالت زیر ممکن است رخ دهد:

(الف) اگر طرفین نامساوی هر دو مثبت باشند، آن‌گاه جهت نامساوی تغییر نمی‌کند؛ یعنی مثلاً اگر $a > b$ و $a, b > 0$ ، آن‌گاه $a^n \leq b^n$.

مثال $0/25 \leq 0/5 \xrightarrow{()^2} (0/25)^2 \leq (0/5)^2 \Rightarrow 0/0625 \leq 0/25$



ب) اگر طرفین نامساوی هر دو منفی باشند، آن‌گاه جهت نامساوی تغییر می‌کند؛ یعنی مثلاً اگر $a, b < 0$ و $a > b$ ، آن‌گاه $a^n < b^n$.

مثال

$$-3 > -4 \xrightarrow{()^4} (-3)^4 < (-4)^4 \Rightarrow 81 < 256$$

(علامت عوض شد)

۳ فرض کنید طرفین یک نامساوی هم‌علامت نیستند و n نیز برابر عددی طبیعی و زوج است. در این صورت اگر بخواهیم طرفین این نامساوی را به توان n برسانیم، نمی‌توانیم درباره جهت نامساوی جدید اظهار نظر قطعی کنیم، به مثال‌های زیر توجه کنید:

الف) $-3 \leq 5 \xrightarrow{()^2} (-3)^2 \leq 5^2 \Rightarrow 9 \leq 25$ (جهت نامساوی اولیه تغییر نکرد.)

ب) $-3 \leq 3 \xrightarrow{()^4} (-3)^4 = 3^4 \Rightarrow 81 = 81$ (نامساوی به رابطه تساوی تبدیل شد.)

پ) $-3 \leq 2 \xrightarrow{()^2} (-3)^2 \geq 2^2 \Rightarrow 9 \geq 4$ (جهت نامساوی اولیه تغییر کرد.)

مثال با توجه به نامساوی $b \leq -3$ ، تعیین کنید کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره برقرارند.

الف) $b^3 \leq -27$ ب) $b^4 \geq 81$ پ) $(2-b)^2 \leq 25$

پاسخ الف) چون ۳ عددی فرد است، پس اگر طرفین نامساوی $b \leq -3$ را به توان ۳ برسانیم، نامساوی هم‌چنان برقرار می‌ماند، پس

داریم:

$$b \leq -3 \xrightarrow{()^3} b^3 \leq (-3)^3 \Rightarrow b^3 \leq -27$$

پس این نامساوی صحیح است.

ب) چون b کم‌تر یا مساوی -3 است، پس b حتماً برابر عددی منفی است، در نتیجه اگر طرفین نامساوی $b \leq -3$ را به توان عددی

زوج برسانیم، جهت نامساوی عوض می‌شود، پس داریم:

$$b \leq -3 \xrightarrow{()^4} b^4 \geq (-3)^4 \Rightarrow b^4 \geq 81$$

پس این نامساوی هم صحیح است.

پ) به محاسبات زیر توجه کنید:

$$b \leq -3 \xrightarrow{\times(-1)} -b \geq 3 \xrightarrow{+(2)} 2-b \geq 5 \xrightarrow{()^2} (2-b)^2 \geq 5^2 \Rightarrow (2-b)^2 \geq 25$$

(جهت عوض نمی‌شود.)
هر دو مثبت‌اند
چون $-b$ مثبت است.

پس نامساوی این قسمت غلط است.

مثال اگر $(x+1)^{35} \geq 32^7$ ، آن‌گاه ثابت کنید $2(4-x)^3 - 4 \leq 50$.

پاسخ می‌دانیم $32 = 2^5$ و در نتیجه $32^7 = (2^5)^7 = 2^{35}$ ، حالا با گرفتن ریشه ۳۵ام از طرفین نامساوی اولیه و خواص نامساوی‌ها داریم:

$$(x+1)^{35} \geq 32^7 \Rightarrow (x+1)^{35} \geq 2^{35} \xrightarrow{(\sqrt[35]{})} x+1 \geq 2 \xrightarrow{\times(-1)} -x-1 \leq -2 \xrightarrow{+(5)} -x-1+5 \leq -2+5$$

$$\Rightarrow 4-x \leq 3 \xrightarrow{()^3} (4-x)^3 \leq 3^3 \Rightarrow (4-x)^3 \leq 27 \xrightarrow{\times(2)} 2(4-x)^3 \leq 54 \xrightarrow{-4} 2(4-x)^3 - 4 \leq 50$$

بسیار فب! بعد از خواص نامساوی‌ها حالا نوبت به نامعادله‌ها می‌رسد، برای این‌که بتوانید توکل نامعادله‌ها موفق باشید باید فوب روی خواص نامساوی‌ها تسلط داشته باشید، پس از فبش قبل غافل نشید.

نامعادله‌های تک‌مجهولی درجه اول

نامساوی‌های روبه‌رو را در نظر بگیرید:

۱) $x+3 < 5$ ۲) $2x-4 \geq 5x+3$

هر کدام از این نامساوی‌ها اولاً شامل یک متغیر مجهول (x) هستند و دوماً درجه حداقل یکی از عبارات‌های شرکت‌کننده در آن‌ها نسبت به متغیر مجهول برابر ۱ است، چنین نامساوی‌هایی را نامعادله‌های تک‌مجهولی درجه اول می‌نامند.

اگر به کمک خواص نامساوی‌ها در یک نامعادله تک‌مجهولی درجه اول، حدود تغییرات مجهول را پیدا کنیم، می‌گوییم نامعادله را حل کرده‌ایم. پس هدف از حل نامعادلات تک‌مجهولی درجه اول، یافتن حدود تغییرات مجهول شرکت‌کننده در نامعادله است.

تعریف حدود تغییرات مجهول پس از حل یک نامعادله را اصطلاحاً مجموعه جواب آن نامعادله می‌نامند.

روش حل نامعادلات تک‌مجهولی درجه اول

روش حل چنین نامعادلاتی همانند روش حل معادلات تک‌مجهولی درجه اول است، یعنی ابتدا همه مجهول‌ها را در یک طرف نامساوی و همه اعداد ثابت (معلوم‌ها) را نیز در طرف دیگر نامساوی جمع کرده و سپس با تقسیم طرفین نامساوی بر ضریب عددی مجهول، حدود تغییرات آن را پیدا می‌کنیم. (حواستان به جهت نامساوی پس از تقسیم باشد.)





مثال نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب هر کدام را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

الف) $x + 5 < 3$ ب) $3x + 4 \geq 16$ پ) $5x - 2 \leq 10x - 32$
 ت) $7(x - \frac{3}{7}) > 9(x - 4)$ ث) $\frac{12x + 3}{4} \geq \frac{5x - 7}{3}$

پاسخ در هر قسمت معلوم‌ها را در یک طرف نامعادله و مجهول‌ها را نیز در طرف دیگر نامعادله جمع کرده و نامعادله‌ها را حل می‌کنیم.

الف $x + 5 < 3 \Rightarrow x < 3 - 5 \Rightarrow x < -2$
 نمایش مجموعه جواب روی محور اعداد:

ب $3x + 4 \geq 16 \Rightarrow 3x \geq 16 - 4 \Rightarrow 3x \geq 12 \xrightarrow{\div(3)} x \geq 4$
 نمایش مجموعه جواب روی محور اعداد:

پ $5x - 2 \leq 10x - 32 \Rightarrow 5x - 10x \leq -32 + 2 \Rightarrow -5x \leq -30 \xrightarrow{\div(-5)} x \geq 6$
 نمایش مجموعه جواب روی محور اعداد:

ت $7(x - \frac{3}{7}) > 9(x - 4) \Rightarrow 7x - 3 > 9x - 36 \Rightarrow 7x - 9x > -36 + 3$
 $\Rightarrow -2x > -33 \xrightarrow{\div(-2)} x < \frac{33}{2} \Rightarrow x < 16.5$
 نمایش مجموعه جواب روی محور اعداد:

ث $\frac{12x + 3}{4} \geq \frac{5x - 7}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3(12x + 3) \geq 4(5x - 7) \Rightarrow 36x + 9 \geq 20x - 28 \Rightarrow 36x - 20x \geq -28 - 9$
 $\Rightarrow 16x \geq -37 \xrightarrow{\div(16)} x \geq -\frac{37}{16}$
 نمایش مجموعه جواب روی محور اعداد:

برخی از نامساوی‌ها شامل عباراتی هستند که درجه اول نیستند، اما قابل تبدیل شدن به نامعادلات درجه اول هستند. در مثال بعد، چندتا از این نامعادلات را با هم بررسی می‌کنیم.

مثال نامعادلات روبه‌رو را حل کنید. الف) $(x + 2)^2 \geq (x + 3)(x - 1)$ ب) $(2 - x)(x^2 + 4 + 2x) - 5 < 5x - x^3 + 12$

پاسخ الف عبارتهای داده‌شده در دو طرف نامساوی را به کمک اتحادهای مربع دو جمله‌ای و جمله‌مشترک ساده‌سازی کرده و نامعادله را حل می‌کنیم.

$(x + 2)^2 \geq (x + 3)(x - 1) \Rightarrow x^2 + 4x + 4 \geq x^2 + 2x - 3 \Rightarrow 4x - 2x \geq -3 - 4 \Rightarrow 2x \geq -7 \xrightarrow{\div(2)} x \geq -\frac{7}{2}$

ب ابتدا سمت چپ نامساوی داده‌شده را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده کرده و سپس با حذف x^3 از طرفین نامعادله، آن را حل می‌کنیم.

$(2 - x)(x^2 + 4 + 2x) = (2 - x)(x^2 + 2 \times x + 2^2) = 2^3 - x^3 = 8 - x^3$
 $(2 - x)(x^2 + 4 + 2x) - 5 < 5x - x^3 + 12 \Rightarrow 8 - x^3 - 5 < 5x - x^3 + 12 \Rightarrow 3 < 5x + 12$
 $\Rightarrow 3 - 12 < 5x \Rightarrow -9 < 5x \xrightarrow{\div(5)} -\frac{9}{5} < x$

ج دقت کنید که $32 = 2^5$ ، پس به کمک گرفتن ریشه پنجم از دو طرف نامساوی داریم:

$(3x + 7)^5 < 32(2x - 4)^5 \xrightarrow{\sqrt[5]{\quad}} \sqrt[5]{(3x + 7)^5} < \sqrt[5]{2^5(2x - 4)^5} \Rightarrow \sqrt[5]{(3x + 7)^5} < \sqrt[5]{2^5} \times \sqrt[5]{(2x - 4)^5}$
 $\Rightarrow 3x + 7 < 2(2x - 4) \Rightarrow 3x + 7 < 4x - 8 \Rightarrow 3x - 4x < -8 - 7 \Rightarrow -x < -15 \xrightarrow{\times(-1)} x > 15$



تعریف اگر مجموعه جواب دو نامعادله با هم برابر (یکسان) باشد، آن‌گاه می‌گوییم آن دو نامعادله (نامساوی) با هم معادل‌اند. مثلاً دو نامعادله $x + 3 \leq 7$ و $2x \leq 8$ با هم معادل‌اند، چون مجموعه جواب هر دوی آن‌ها $x \leq 4$ است.

تست دو نامساوی $5x + (x-2)(x+2) \geq (x+1)^2 + 7$ و $x^2 + x - 4a \geq (x+3)^2$ با هم معادل‌اند. در این صورت مقدار a برابر است با

(۱) $-\frac{4}{29}$ (۲) $\frac{4}{29}$ (۳) $\frac{29}{4}$ (۴) $-\frac{29}{4}$

پاسخ گزینه ۲: ابتدا هر دو نامعادله را حل می‌کنیم.

$$1) \quad 5x + \underbrace{(x-2)(x+2)}_{\text{مزدوج}} \leq \underbrace{(x+1)^2}_{\text{مربع دو جمله‌ای}} + 7 \Rightarrow 5x + x^2 - 4 \leq x^2 + 2x + 1 + 7 \Rightarrow 5x - 4 \leq 2x + 8$$

$$\Rightarrow 5x - 2x \leq 8 + 4 \Rightarrow 3x \leq 12 \xrightarrow{\div(3)} x \leq 4 \quad (I)$$

$$2) \quad x^2 + x - 4a \geq \underbrace{(x+3)^2}_{\text{مربع دو جمله‌ای}} \Rightarrow x^2 + x - 4a \geq x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x - 4a \geq 6x + 9 \Rightarrow x - 6x \geq 9 + 4a$$

$$\Rightarrow -5x \geq 9 + 4a \xrightarrow{\div(-5)} x \leq \frac{9 + 4a}{-5} \quad (II)$$

حالا توجه کنید که چون نامساوی‌های (I) و (II) باید یکسان باشند، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{9 + 4a}{-5} = 4 \xrightarrow{\times(-5)} 9 + 4a = -20 \Rightarrow 4a = -29 \xrightarrow{\div(4)} a = \frac{-29}{4}$$

حل دستگاه نامعادلات

یکی از مسائل مربوط به نامعادله‌ها، حل دستگاه نامعادله‌ها است. در این نوع مسئله‌ها با چندتا نامعادله روبه‌رو هستیم و هدف یافتن حدود مجهولاتی است که در همه نامعادله‌ها صدق می‌کنند. برای حل این دستگاه‌ها، ابتدا همه نامعادله‌ها را حل کرده و سپس بین مجموعه جواب‌های به دست آمده به کمک محور اعداد حقیقی اشتراک می‌گیریم. توجه کنید که اگر بازه‌های به دست آمده با هم اشتراک نداشته باشند، آن‌گاه دستگاه جواب ندارد.

مثال دستگاه نامعادلات روبه‌رو را حل کنید.

$$\begin{cases} 2(2x-3) + 5 \geq 3x - 4 \\ 2(5x+1) + 4 \leq 4(2x + \frac{7}{2}) \end{cases}$$

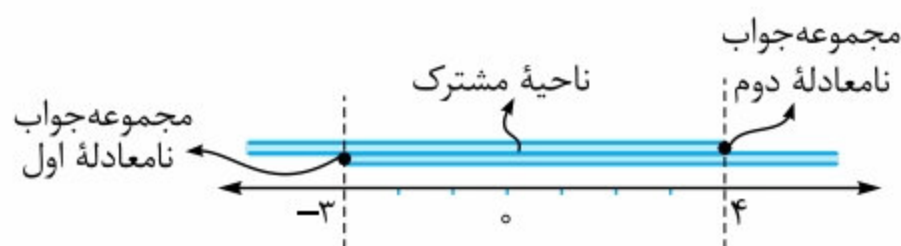
پاسخ ابتدا هر نامعادله را حل کرده و سپس بین مجموعه جواب‌های به دست آمده در هر نامعادله اشتراک می‌گیریم.

$$1) \quad 2(2x-3) + 5 \geq 3x - 4 \Rightarrow 4x - 6 + 5 \geq 3x - 4 \Rightarrow 4x - 1 \geq 3x - 4 \Rightarrow 4x - 3x \geq -4 + 1 \Rightarrow x \geq -3$$

$$2) \quad 2(5x+1) + 4 \leq 4(2x + \frac{7}{2}) \Rightarrow 10x + 2 + 4 \leq 8x + 14 \Rightarrow 10x + 6 \leq 8x + 14 \Rightarrow 10x - 8x \leq 14 - 6$$

$$\Rightarrow 2x \leq 8 \xrightarrow{\div(2)} x \leq 4$$

همان‌طور که می‌بینید مجموعه جواب نامعادله اول برابر تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی -3 است و مجموعه جواب نامعادله دوم نیز برابر تمام اعداد حقیقی کم‌تر یا مساوی 4 است، پس عددی در هر دو نامعادله صدق می‌کنند که هم کم‌تر یا مساوی 4 باشند و هم بزرگ‌تر یا مساوی -3 ، یعنی تمام اعداد حقیقی از -3 تا 4 . به کمک محور اعداد حقیقی نیز می‌توان این مجموعه جواب را به صورت زیر نمایش داد:



در نتیجه بنا بر توضیحات و نمودار فوق می‌توان فهمید، مجموعه جواب دستگاه داده شده برابر است با $-3 \leq x \leq 4$.

مثال نامعادله‌های روبه‌رو را حل کنید.

الف) $x - 3 \leq 2(2x + 4) - 2 \leq 7$

ب) $3x - 2 \leq \frac{5x + 3}{2} < x + 15$

پاسخ چنین نامعادله‌هایی به نامعادله‌های توأم معروف‌اند. برای حل این نامعادله‌ها نیز مانند حل دستگاه‌های نامعادلات باید به صورت زیر دو نامعادله را حل کرده و سپس بین مجموعه‌جواب‌های به دست آمده در هر نامعادله، اشتراک بگیریم.

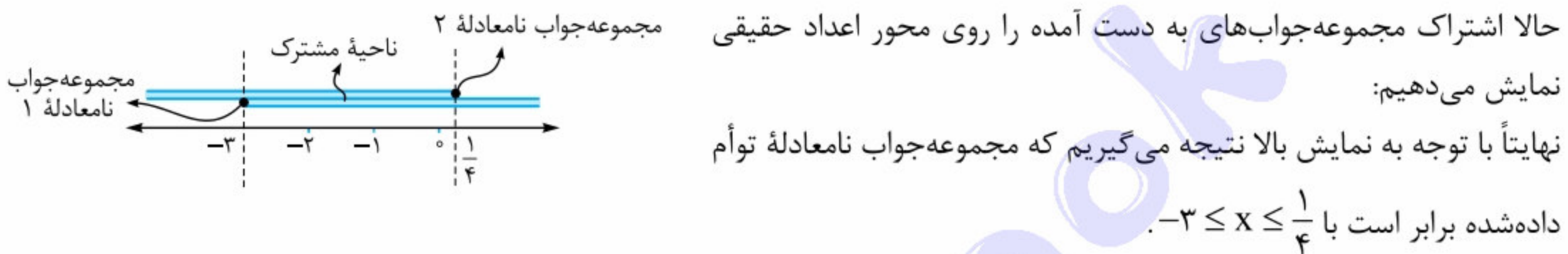
الف ابتدا دو نامعادله زیر را حل می‌کنیم:

$$\underbrace{x - 3 \leq 2(2x + 4) - 2 \leq 7}_{\text{نامعادله اول}} \Rightarrow \text{دستگاه مربوط به نامعادله داده شده: } \begin{cases} (1) x - 3 \leq 2(2x + 4) - 2 \\ (2) 2(2x + 4) - 2 \leq 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حل نامعادله اول: } x - 3 \leq 2(2x + 4) - 2 \Rightarrow x - 3 \leq 4x + 8 - 2 \Rightarrow x - 3 \leq 4x + 6 \Rightarrow x - 4x \leq 6 + 3$$

$$\Rightarrow -3x \leq 9 \xrightarrow{\div(-3)} x \geq -3$$

$$\Rightarrow \text{حل نامعادله دوم: } 2(2x + 4) - 2 \leq 7 \Rightarrow 4x + 8 - 2 \leq 7 \Rightarrow 4x + 6 \leq 7 \Rightarrow 4x \leq 7 - 6 \Rightarrow 4x \leq 1 \xrightarrow{\div(4)} x \leq \frac{1}{4}$$



ب مثل قسمت (الف) عمل می‌کنیم:

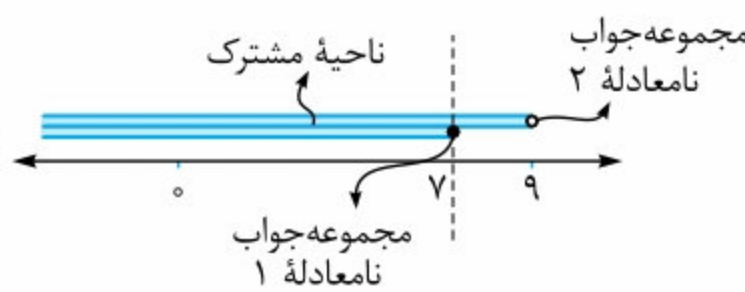
$$\underbrace{3x - 2 \leq \frac{5x + 3}{2} < x + 15}_{\text{نامعادله اول}} \Rightarrow \text{دستگاه مربوط به نامعادله داده شده: } \begin{cases} (1) 3x - 2 \leq \frac{5x + 3}{2} \\ (2) \frac{5x + 3}{2} < x + 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حل نامعادله اول: } 3x - 2 \leq \frac{5x + 3}{2} \xrightarrow{\times(2)} 2(3x - 2) \leq 5x + 3 \Rightarrow 6x - 4 \leq 5x + 3 \Rightarrow 6x - 5x \leq 3 + 4 \Rightarrow x \leq 7$$

$$\Rightarrow \text{حل نامعادله دوم: } \frac{5x + 3}{2} < x + 15 \xrightarrow{\times(2)} 5x + 3 < 2(x + 15) \Rightarrow 5x + 3 < 2x + 30 \Rightarrow 5x - 2x < 30 - 3$$

$$\Rightarrow 3x < 27 \xrightarrow{\div(3)} x < 9$$

\Rightarrow اشتراک مجموعه‌جواب‌های به دست آمده روی محور اعداد حقیقی:



\Rightarrow مجموعه‌جواب نامعادله توأم: $x \leq 7$

تست به ازای چند مقدار صحیح برای x ، نامساوی توأم $-8 \leq \frac{5x + 3}{4} \leq 2$ همواره برقرار است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

پاسخ گزینه ۴. برای حل این تست می‌توانیم مانند روش توضیح داده شده در مثال قبل، دو نامعادله را حل کنیم و سپس بین مجموعه‌جواب‌های به دست آمده اشتراک بگیریم، اما این روش برای حل تست کمی طولانی است، به همین علت سعی می‌کنیم مطابق روش زیر، به کمک خواص نامساوی‌ها و به دست آوردن حدود x ، هر دو نامعادله را هم‌زمان حل کرده و مجموعه‌جواب را پیدا کنیم.

$$-8 \leq \frac{5x + 3}{4} \leq 2 \xrightarrow{\text{ضرب می‌کنیم کل رابطه را در ۴}} 4 \times (-8) \leq 4 \left(\frac{5x + 3}{4} \right) \leq 4 \times 2 \Rightarrow -32 \leq 5x + 3 \leq 8$$

$$\xrightarrow{\text{کل رابطه را منهای ۳ می‌کنیم}} -32 - 3 \leq 5x + 3 - 3 \leq 8 - 3 \Rightarrow -35 \leq 5x \leq 5 \xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم کل رابطه را بر ۵}} -\frac{35}{5} \leq \frac{5x}{5} \leq \frac{5}{5} \Rightarrow -7 \leq x \leq 1$$

بنابراین نامساوی داده‌شده به ازای همه اعداد حقیقی از -7 تا 1 برقرار است که شامل ۹ عدد صحیح $(-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1)$ می‌باشد.

پرسش‌های تشریحی

۲۵ با توجه به تساوی‌های زیر، یک نابرابری بین a و b بنویسید.

۱ $a = b + 5$

۲ $a + 2 = b$

۳ $a - 5 = b + 4$

۴ $5a = 2b$ ($a, b > 0$)

۵ $3a - 1 = 6b + 2$ ($a, b > 0$)

۶ $a - b = 2$

۲۶ جاهای خالی را با نمادهای $>$ و $<$ پر کنید.

۲ اگر $a - 2 = b - 1$ باشد، آن‌گاه a b .

۱ اگر $a = b + 1$ باشد، آن‌گاه a b .

۴ اگر $2a - 1 = 2b + 3$ باشد، آن‌گاه a b .

۳ اگر $a + 3 = b - 4$ باشد، آن‌گاه a b .

۶ اگر $\frac{a-b}{2} = -2$ باشد، آن‌گاه a b .

۵ اگر $3a - 2 = 2(b - 3)$ باشد، آن‌گاه a b .

۲۷ درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

۲ اگر $a, b < 0$ و $c > 0$ باشد، آن‌گاه $a^2bc < 0$ است.

۱ اگر $a - b = +2$ باشد، آن‌گاه $a > b$ است.

۴ اگر $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه $a^2 > a$ است.

۳ اگر $a, b > 0$ و $c < 0$ باشد، آن‌گاه $a + b > a + c$.

۵ اگر $a, b > 0$ باشند و بدانیم $3a = 2b$ است، آن‌گاه $a < b$ می‌باشد.

۲۸ اگر $a < 0$ و $b, c > 0$ باشند، علامت هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

۱ abc

۲ a^2bc

۳ $\frac{ab}{c^2}$

۴ $-\frac{\sqrt{b}}{a}$

۵ $\frac{|a|}{3a^2}$

۶ $-\frac{\sqrt{2}}{2}a^2b^3$

۷ $\frac{b^2 - a^2}{3c}$

۸ $(a - b)^2$

۲۹ علامت عددهای حقیقی a, b, c را به گونه‌ای تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشند.

۱ $ab > 0$

۲ $2ab < 0$

۳ $-a^2b > 0$

۴ $a^2b^2 > 0$

۵ $\frac{ab^2}{c} < 0$

۶ $\frac{|a|b}{c} < 0$

۳۰ عبارات‌های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

۱ مجموع ۳ برابر عدد a با ثلث عدد b حداقل برابر ۱۵ است.

۲ پنج برابر عددی با چهار جمع شود، از عدد ۳ کم‌تر است.

۳ اگر عددی را سه برابر کنیم، حداقل ۴ واحد از دو برابر آن بیشتر است.

۴ مجموع نصف عددی با دو برابر همان عدد، کوچک‌تر از دو است.

۵ اگر پول علی را پنج برابر کنیم، حداقل ۱۰۰۰ تومان از سه برابر پولش بیشتر می‌شود.

۳۱ هر یک از نامعادله‌های زیر را حل کرده، سپس مجموعه جواب آن‌ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

۱ $4x - 1 < 3x + 5$

۲ $4(2x + 1) - 3 > 5 - 2x$

۳ $x + \frac{x+1}{2} \geq 3x - 1$

۴ $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > \frac{x}{12} + 1$

۵ $\frac{4x-1}{2} \leq \frac{x+1}{3}$

۶ $(x+1)^2 - (x-1)^2 \leq 2x - 2$

۷ $x(x+2) < x^2 + 3x - 1$

۸ $x^2 - 1 \leq x^2 - 2x + 1$

۹ $(x-1)(x-3) > (x+3)(x-3)$

۱۰ $(x-1)^2 \leq x^2 - 2x + 1$

۳۲ می‌دانیم مصرف اینترنت شرکتی ۱۰ گیگابایت در ساعت است. اگر بدانیم مسئول IT امروز به مقدار ۱۶۰۰ گیگابایت اینترنت خریداری کرده و از طرفی هر روز کاری برابر با ۸ ساعت باشد، حداکثر چند روز دیگر مسئول IT شرکت باید دوباره اینترنت خریداری کند؟

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱۴۱ اگر $a < b < 0$ باشد، کدام نامساوی همواره درست است؟

(۱) $b^2 < a^2$ (۲) $b^2 < a^2$ (۳) $a^2 < ab$ (۴) $ab < b^2$

۱۴۲ اگر $a < 0$ ، $b > 0$ و $c < 0$ باشد، آن‌گاه چه تعداد از عبارتهای زیر حتماً درست است؟

(الف) $a^2bc < 0$ (ب) $-\frac{a^2}{b} > 0$ (پ) $\frac{b^2a}{c^2} > 0$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴۳ اگر $a^2 > b^2$ باشد، آن‌گاه:

(۱) $a > b$ (۲) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (۳) $a - b < a + b$ (۴) هیچ‌کدام

۱۴۴ اگر $a^2b < 0$ و $bc > 0$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه حتماً درست است؟ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

(۱) $a > 0$ (۲) $a < 0$ (۳) $b > 0$ (۴) $c < 0$

۱۴۵ اگر $\frac{\sqrt{a^2b}}{a} \times \sqrt{c^2b^2} < 0$ باشد، آن‌گاه چه تعداد از عبارتهای زیر همواره درست است؟

(الف) $ab > 0$ (ب) $bc > 0$ (پ) $\frac{a}{b^2} < 0$ (ت) $\frac{b^2}{c^2a} > 0$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴۶ مجموع اعداد طبیعی که در نامعادله $3x - 1 < 8$ صدق می‌کند، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۴۷ کوچک‌ترین عدد صحیحی که در نامعادله $3x - 7 \leq 5x - 3$ صدق می‌کند، کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) صفر

۱۴۸ در نامعادله $\frac{3x-1}{2} < \frac{-2x+1}{3}$ ، محدوده x کدام است؟

(۱) $x > \frac{5}{13}$ (۲) $x < \frac{5}{13}$ (۳) $x > -\frac{5}{13}$ (۴) $x < -\frac{5}{13}$

$1 - \frac{x-1}{2} \leq \frac{x+1}{3}$

۱۴۹ کدام گزینه جواب نامعادله مقابل است؟

(۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{7}{5}\}$ (۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7}{5} \leq x\}$

(۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \leq x\}$ (۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{5}\}$

۱۵۰ عبارت کلامی روبه‌رو، به صورت ریاضی کدام است؟ «مجموع نصف عدد x و سه برابر عدد y ، حداکثر -۲۰ است.»

(۱) $\frac{x}{2} + 3y > -20$ (۲) $\frac{x}{2} + 3y \geq -20$

(۳) $\frac{x}{2} + 3y < -20$ (۴) $\frac{x}{2} + 3y \leq -20$

۱۵۱ مقدار a چه قدر باشد تا مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{4}x + a > \frac{x-4}{4} + 3x$ به صورت $x > 1$ باشد؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۱۵۲ مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{3x-1}{2} < -1$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3} < x < -2$

(۳) $x < 3$ (۴) $x > 3$



۱۵۳ اگر $3 < x < 6$ و $a < \frac{1}{x-1} < b$ معادل باشند، کدام است $\frac{a}{b}$ ؟

- (۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $-\frac{4}{7}$ (۴) $-\frac{7}{4}$

۱۵۴ به ازای چند مقدار صحیح x ، نامساوی $\frac{x-1}{3} < \frac{5}{7} < \frac{x+4}{5}$ درست است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۵۵ اگر تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جواب نامعادله $a \leq 2x + 3 \leq b$ برابر با ۱۰ باشد، در این صورت $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۵۶ مجموعه جواب نامعادله $(x+2)^2 - (x-1)^2 > 4(2x-1)$ کدام است؟

(۱) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -\frac{7}{2}\}$ (۲) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < \frac{7}{2}\}$

(۳) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -\frac{7}{2}\}$ (۴) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > \frac{7}{2}\}$

$2x(x-3) - x^2 + 3 < x(x-1) - 2$

- (۱) $x > 1$ (۲) $x < -1$ (۳) $x < -1$ (۴) $x > 1$

$\begin{cases} x+3 > 2x-5 \\ 5x-3 > x+9 \end{cases}$

- (۱) $x < 8$ (۲) $3 < x < 8$ (۳) $x < 3$ (۴) $-8 < x < -3$

۱۵۷ مجموعه جواب نامعادله مقابل کدام است؟

- (۱) $x > -1$ (۲) $x < 1$

۱۵۸ مجموعه جواب دستگاه نامعادله مقابل کدام است؟

- (۱) $x < 8$ (۲) $3 < x < 8$ (۳) $x < 3$ (۴) $-8 < x < -3$

(آزمون‌های پیش‌تاز فیلی سبز)



پاسخ ۲

شماره سؤال	یک جمله‌ای	ضریب عددی	قسمت حرفی
۱	$2a$	۲	a
۲	$\frac{a^2}{5}$	$\frac{1}{5}$	a^2
۳	-5	-5	ندارد
۴	$-\frac{\sqrt{2}}{2}xy$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	xy
۵	$3\sqrt{\pi}x^2$	$3\sqrt{\pi}$	x^2
۶	$\frac{3x^2}{y^{-2}} = 3x^2y^2$	۳	x^2y^2
۷	$\sqrt{\frac{x^6y^4}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^3y^2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	x^3y^2
۸	$5ab - 2ab = 3ab$	۳	ab
۹	$\frac{20a^2b^2c^2}{3ab^2} = \frac{20a^2c^2}{3}$	$\frac{20}{3}$	a^2c^2
۱۰	$\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^2$	ندارد
۱۱	$5\sqrt[5]{t^{10}} = 5t^2$	۵	t^2
۱۲	$(5ab^2)(3a^2b) = 15a^3b^3$	۱۵	a^3b^3
۱۳	$4(a^2b)^3 = 4a^6b^3$	۴	a^6b^3
۱۴	$x^2y - 2x^2y = -x^2y$	-۱	x^2y

پاسخ ۳

۱ متشابه‌اند.

۲ متشابه نیستند؛ زیرا قسمت حرفی آن‌ها برابر نیست.

$(a^2b^3 \neq a^2b^2)$

۳ متشابه نیستند. $(xy^2 \neq x^2y)$

۴ متشابه نیستند. $(a^2b \neq x^2y)$

۵ متشابه نیستند. $(xy \neq \frac{1}{xy})$

۶ متشابه‌اند؛ زیرا $(\frac{1}{2}xy^2)^2 = \frac{1}{4}x^2y^4$ می‌باشد، در نتیجه

قسمت حرفی دو عبارت یکسان است.

پاسخ پرسش‌های تشریحی

پاسخ ۱

۱ درست

۲ درست - زیرا $\frac{3a^2b}{c^{-2}} = 3a^2bc^2$ است.

۳ درست - زیرا همه اعداد حقیقی به تنهایی یک جمله‌ای هستند.

۴ نادرست - زیرا بین دو جمله‌ای ۴ و $2x$ علامت + قرار دارد.

۵ درست

۶ نادرست - زیرا $\sqrt{xy} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ است. توان x برابر $\frac{1}{2}$ است که

عضو مجموعه اعداد حسابی نیست.

۷ درست

۸ درست - زیرا $\sqrt{3x^4y} = \sqrt{3}x^2y^{\frac{1}{2}}$ می‌باشد که یک جمله‌ای است.

۹ نادرست - زیرا $\sqrt{3x^2y^2} = \sqrt{3}|x||y|$ است. عبارت شامل

قدرمطلق یک جمله‌ای نیست.

۱۰ نادرست - عبارت شامل قدرمطلق، یک جمله‌ای نیست.

۱۱ درست - زیرا $5|x^2y^2| = 5x^2y^2$ می‌باشد و این عبارت

یک جمله‌ای است.

۱۲ درست

۱۳ نادرست - زیرا توان a برابر -2 است که عضو مجموعه اعداد

حسابی نیست.

۱۴ درست - زیرا $2x^2y + 3x^2y = 5x^2y$ می‌باشد که یک جمله‌ای

است.

۱۵ درست - زیرا $5\sqrt[3]{x^3} = 5x$ می‌باشد که یک جمله‌ای است.

۱۶ نادرست - زیرا عبارت شامل قدرمطلق، یک جمله‌ای نیست.

۱۷ نادرست - زیرا بین دو جمله‌ای x^5 و 1 ، علامت - وجود دارد.

۱۸ درست - زیرا حاصل $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ یک عدد حقیقی است که

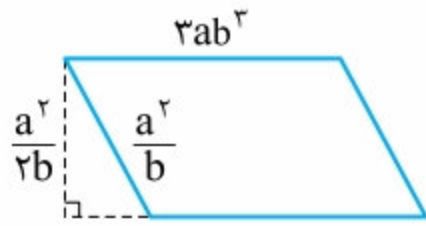
یک جمله‌ای محسوب می‌شود.

۱۹ درست - زیرا π یک عدد حقیقی و مثبت است؛ بنابراین $\sqrt{\pi}$

نیز عددی حقیقی بوده و یک جمله‌ای می‌باشد.

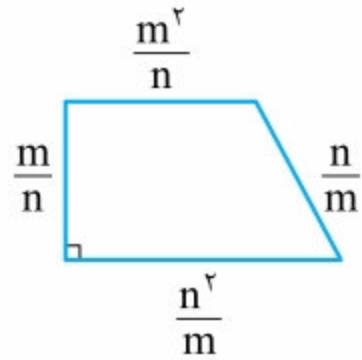
۲۰ درست - زیرا متغیر a بر عدد حقیقی π تقسیم شده؛ بنابراین

این عبارت یک جمله‌ای است.



$$\text{محیط} = 2(2ab^2 + \frac{a^2}{b}) = 4ab^2 + \frac{2a^2}{b}$$

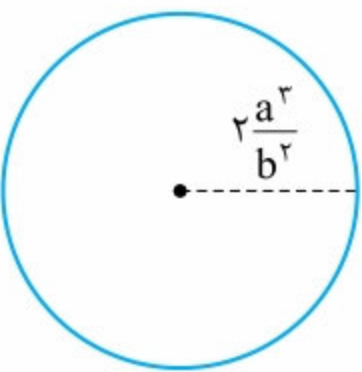
$$\text{مساحت} = 2ab^2 \times \frac{a^2}{2b} = \frac{2a^2b^2}{2}$$



$$\text{محیط} = \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{m} + \frac{n}{m}$$

$$= \frac{m^2 + m^3 + n^3 + n^2}{nm}$$

$$\text{مساحت} = \frac{m}{n} (\frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{m}) = \frac{m}{n} (\frac{m^3 + n^3}{nm}) = \frac{m^3 + n^3}{n^2}$$



$$\text{محیط} = 2\pi(\frac{2a^2}{b^2}) = \frac{4\pi a^2}{b^2}$$

$$\text{مساحت} = \pi(\frac{2a^2}{b^2})^2 = \pi(\frac{4a^4}{b^4})$$

۲

۳

۴

پاسخ ۷

$$(ab^2)(-3\frac{a^2}{b}) = -3a^3b$$

$$3(xy^2z)(4x^2y)^2 = 3xy^2z \times 16x^4y^2 = 48x^5y^4z$$

$$(\frac{m^2}{n})(3\frac{n^2}{m}) = 3mn$$

$$\Delta(2a + b^2) = 15a + \Delta b^2$$

$$(2a - b)(a^2 + 3b^2) = 2a^3 + 6ab^2 - a^2b - 3b^3$$

$$\Delta a(a^2 - a + a^{-1}) = \Delta a^3 - \Delta a^2 + \Delta$$

$$\Delta \frac{a}{b^2} (3a^2b^2 - 4\frac{a}{b^2} - 1) = 15a^3 - 20\frac{a^2}{b^2} - 5\frac{a}{b^2}$$

$$\Delta a(2ab^2 - b^3) + 3a^2b^2 = 10a^2b^2 - \Delta ab^3 + 3a^2b^2$$

$$= 13a^2b^2 - \Delta ab^3$$

۱

۲

۳

۴

۵

۶

۷

۸

پاسخ ۸

۱ چند جمله‌ای است.

۲ چند جمله‌ای است.

۳ چند جمله‌ای است، حاصل جمع دو عدد حقیقی، عددی حقیقی

است که چند جمله‌ای محسوب می‌شود.

۴ چند جمله‌ای است.

۵ چند جمله‌ای است.

۶ چند جمله‌ای نیست، زیرا $\frac{1}{x}$ یک جمله‌ای نیست؛ بنابراین

$x + \frac{1}{x}$ چند جمله‌ای محسوب نمی‌شود.

۷ چند جمله‌ای است، زیرا π عددی حقیقی است؛ بنابراین

$\sqrt{\pi}$ نیز عددی حقیقی محسوب می‌شود.

۷ متشابه‌اند؛ زیرا $\frac{\Delta a^2 b^5}{b^2} = \Delta a^2 b^3$ می‌باشد، در نتیجه قسمت حرفی دو عبارت یکسان است.

۸ متشابه‌اند؛ زیرا قسمت حرفی هر دو عبارت برابر ax^2 می‌باشد (توجه داشته باشید π^2 عددی حقیقی است).

۹ متشابه نیستند؛ زیرا $\Delta \sqrt{x^2} = \Delta |x|$ است، بنابراین $\Delta |x|$ یک جمله‌ای نیست و دو عبارت متشابه نیستند.

۱۰ متشابه‌اند؛ زیرا $10\sqrt[3]{x^3} = 10x$ است، بنابراین قسمت حرفی دو عبارت یکسان است.

پاسخ ۴

می‌دانیم برای این که دو یک جمله‌ای متشابه باشند، باید قسمت حرفی آن‌ها یکسان باشد؛ بنابراین داریم:

$$a^2b^3 = a^y b^x \Rightarrow y=2, x=3$$

$$a^{2x}b^3 = a^2b^y \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1, y=3$$

$$a^{2x-1} = a^5b^{2y} \Rightarrow 2x-1=5 \Rightarrow 2x=6$$

$$\Rightarrow x=3, 2y=0 \Rightarrow y=0$$

$$(\Delta b^2 a^2)(2a^2 b^y) = 10 a^y b^{2+y}$$

$$(\Delta a^2 b)(-3\frac{a^x}{b})(-\frac{b^2}{3}) = \Delta a^{2+x} b^2$$

$$\Rightarrow a^y b^{2+y} = a^{2+x} b^2 \Rightarrow 2+x=7 \Rightarrow x=5$$

$$2+y=3 \Rightarrow y=1$$

پاسخ ۵

عبارت جبری	متغیرها	ضریب عددی	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به همه متغیرها
$3xy^2$	x, y	۳	۱	۲	$1+2=3$
$-\sqrt{2}x^2y^2z^4$	x, y, z	$-\sqrt{2}$	۲	۳	$2+3+4=9$
$-\sqrt{\pi}x^3$	x	$-\sqrt{\pi}$	۳	۰	۳
$-\frac{\sqrt{2}}{5}$	ندارد	$-\frac{\sqrt{2}}{5}$	۰	۰	۰
$3x^2y + 5x^2y = 8x^2y$	x, y	۸	۲	۱	$2+1=3$
$100x^{100}y^{50}z^{25}$	x, y, z	۱۰۰	۱۰۰	۵۰	$100+50+25=175$

پاسخ ۶

۱

$$\text{محیط} = 2(3a^2b + 2ab) = 6a^2b + 4ab$$

$$\text{مساحت} = 3a^2b \times 2ab = 6a^3b^2$$

عبارت جبری	مرتب‌سازی نسبت به توان نزولی x	درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x
$x^2y - zx^2 + x^2y^2 - 1$	$x^2y^2 + x^2y - zx^2 - 1$	$4+3=7$	3	4
$x^2 - 5x^2 + x - 2x^2$	$x^2 - 7x^2 + x$	$3+0=3$	0	3
$x^2y^2 - y^4$	$x^2y^2 - y^4$	$3+2=5$	4	3

پاسخ ۱۱

کافی است در هر یک از عبارتهای خواسته شده، مقدار جبری B، A و C را قرار دهیم، سپس آن را ساده کنیم.

$$3A - 2B = 3(2x^2 - 1) - 2(2(3x - 2)) \quad 1$$

$$= 6x^2 - 3 - 12x + 8 = 6x^2 - 12x + 5$$

$$AB - C = (2x^2 - 1)(2(3x - 2)) - (x^2 - x) \quad 2$$

$$= (2x^2 - 1)(6x - 4) - x^2 + x$$

$$= 12x^3 - 8x^2 - 6x + 4 - x^2 + x = 12x^3 - 9x^2 - 5x + 4$$

$$B^2 - 2C = (2(3x - 2))^2 - 2(x^2 - x) \quad 3$$

$$= (6x - 4)^2 - 2(x^2 - x) = (36x^2 - 48x + 16) - 2x^2 + 2x$$

$$= 34x^2 - 46x + 16$$

پاسخ ۱۲

برای این که دو عبارت، یک اتحاد جبری را تشکیل دهند، باید بتوانیم نشان دهیم که به ازای همه مقادیری که به ازای آن تعریف می‌شوند، با هم برابرند.

$$3x - 1 = x + 1 \Rightarrow 3x - x = 1 + 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \quad 1$$

همان‌طور که مشخص است این تساوی فقط به ازای $x = 1$ برقرار می‌باشد، پس اتحاد نیست.

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad 2$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1$$

از آن جایی که همواره $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ است، بنابراین عبارت فوق اتحاد را تشکیل می‌دهد.

$$x(x - \frac{1}{x}) = x^2 - 1, (x \neq 0) \quad 3$$

برای بررسی این عبارت، به ساده‌سازی سمت چپ تساوی می‌پردازیم.

$$x(x - \frac{1}{x}) = x^2 - x \cdot \frac{1}{x} = x^2 - 1$$

بنابراین عبارت فوق اتحاد جبری است.

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x - 1 \quad 4$$

$$\Rightarrow \underline{x^2} - \underline{2x} - \underline{x^2} - \underline{2x} = -1 - 1 \Rightarrow -4x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین عبارت داده شده فقط به ازای $x = \frac{1}{2}$ برقرار است، پس اتحاد جبری نیست.

۸ چندجمله‌ای نیست، زیرا \sqrt{a} یک جمله‌ای نیست. بنابراین

$\sqrt{a} - x$ چندجمله‌ای محسوب نمی‌شود.

۹ چندجمله‌ای نیست، زیرا $\sqrt{a^2} = |a|$ است و $|a|$ یک جمله‌ای

نیست؛ بنابراین $|a| + x$ چندجمله‌ای محسوب نمی‌شود.

۱۰ چندجمله‌ای است، زیرا $\sqrt{a^4} = a^2$ است؛ بنابراین $a^2 + x$

چندجمله‌ای است.

۱۱ چندجمله‌ای نیست، زیرا متغیر x در توان ظاهر شده است؛

بنابراین 2^x یک جمله‌ای نیست، در نتیجه $x^2 - 2^x$ چندجمله‌ای

به حساب نمی‌آید.

پاسخ ۹

$$3x - 5x^2 + 2x - 1 = (3+2)x - 5x^2 - 1 \quad 1$$

$$= -5x^2 + 5x - 1$$

$$4x - 2x^2 - x + 3x^2 = (4-1)x + (-2+3)x^2 \quad 2$$

$$= x^2 + 3x$$

$$x^2 + 2x^2 - x - 2x^2 + 3x^2 = x^2 + (2-2+3)x^2 - x \quad 3$$

$$= x^2 + 3x^2 - x$$

$$3xy + x^2 - 4xy^2 - 1 = x^2 + 3xy - 4xy^2 - 1 \quad 4$$

$$\underline{ax^2} - \underline{3x^2} + \underline{x^5} + \underline{2x^2} + \underline{x^2} \quad 5$$

$$= (a+2)x^2 + (-3+1)x^2 + x^5 = x^5 - 2x^2 + (a+2)x^2$$

$$(x - x^2)(x^2 + x^2 - 1) \quad 6$$

$$= \underline{x^4} + \underline{x^3} - \underline{x} - \underline{x^5} - \underline{x^4} + \underline{x^2} = -x^5 + x^3 + x^2 - x$$

$$(4x^2 - x)(x^2 + x - 1) + x^4 - 1 \quad 7$$

$$= \underline{4x^4} + \underline{4x^3} - \underline{4x^2} - \underline{x^3} - \underline{x^2} + \underline{x} + \underline{x^4} - 1$$

$$= (4+1)x^4 + (4-1)x^3 + (-4-1)x^2 + x - 1$$

$$= 5x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1$$

$$(x^2y - xy^2)(3x + 2y) \quad 8$$

$$= 3x^3y + 2x^2y^2 - 3x^2y^2 - 2xy^3$$

$$= 3x^3y + (2-3)x^2y^2 - 2xy^3 = 3x^3y - x^2y^2 - 2xy^3$$

پاسخ ۱۰

عبارت جبری	مرتب‌سازی نسبت به توان نزولی x	درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x
$2xy^2 - 2x^2y^2$	$-2x^2y^2 + 2xy^2$	$2+2=4$	2	2
$4x^2 - x^2y + x^2$	$x^2 - x^2y + 4x^2$	$3+1=4$	1	3
$y^2 - 2y^2 - x$	$-x + y^2 - 2y^2$	$1+3=4$	3	1

$$(0/997)^2 = (1 - 0/003)^2 = 1^2 - 2 \times 0/003 + (0/003)^2$$

$$= 1 - 0/006 + 0/000009 = 0/994009$$

۴

پاسخ ۱۶

$$\left. \begin{aligned} x + y = 3 &\Rightarrow (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 9 \\ xy = 5 & \end{aligned} \right\} \xrightarrow{-} x^2 + 2xy + y^2 - 3xy = 9 - 15 = -6$$

$$\frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2 + xy} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

پاسخ ۱۷

برای تجزیه عبارتهای زیر، کافی است بزرگ‌ترین عامل مشترک هر یک جمله‌ای را در هر عبارت به دست آوریم.

$$ab + a^2c = a(b + ac)$$

$$a^2b - b^2c = b(a^2 - bc)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{y} = \frac{1}{y}(x + z)$$

$$xy^2z^2 - x^2y^2z = xy^2z(z^2 - x^2)$$

$$\Delta a^2b^2c^2 + 15a^2b^2c - 20a^2bc^2$$

$$= \Delta a^2bc(b^2c^2 + 3b - 4ac)$$

$$12ab^2 - 3ac^2 - 6 = 3(4ab^2 - ac^2 - 2)$$

۱

۲

۳

۴

۵

۶

پاسخ ۱۸

$$12x - 6x^2 - 3x^3 = 3x(4 - 2x - x^2)$$

$$\Delta x^2y^2 - 15x^2y + 20xy^2 = \Delta xy(xy - 3x^2 + 4y^2)$$

$$t(m+n)^2 + (m+n) = (m+n)(t(m+n) + 1)$$

$$a^2 + 2a^2 + a = a(a^2 + 2a + 1) = a(a+1)^2$$

$$4a^2 - 12a^2 + 9a = a(4a^2 - 12a + 9) = a(2a+3)^2$$

$$x^2y^2 + 4xy + 4 = (xy+2)^2$$

$$16a^2b^2 - 40a^2b^2 + 25 = (4a^2b^2 - 5)^2$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = (a + \frac{1}{a})^2$$

$$a^2 + \frac{9}{a^2} + 6 = a^2 + (\frac{3}{a})^2 + 2 \times a \times \frac{3}{a} = (a + \frac{3}{a})^2$$

$$a^2 + 3a + \frac{9}{4} = a^2 + 2 \times \frac{3}{2}a + (\frac{3}{2})^2 = (a + \frac{3}{2})^2$$

$$25a^2 + a + 0/01 = (\Delta a)^2 + 2 \times \Delta a \times 0/1 + (0/1)^2$$

$$= (\Delta a + 0/1)^2$$

$$(a+b)^2 + 4(a+b) + 4 = (a+b)^2 + 2 \times 2(a+b) + 2^2$$

$$= ((a+b) + 2)^2$$

۱

۲

۳

۴

۵

۶

۷

۸

۹

۱۰

۱۱

۱۲

پاسخ ۱۳

$$(x-3)^2 = x^2 - 2 \times 3x + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 3(2x) + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$(2a+b)^2 = (2a)^2 + 2 \times (2a)(b) + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$(a^2-b)^2 = (a^2)^2 - 2a^2b + b^2 = a^4 - 2a^2b + b^2$$

$$(-x-2y)^2 = (-x)^2 + 2(-x)(-2y) + (-2y)^2$$

$$= x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$(ab-b^2)^2 = (ab)^2 - 2(ab)b^2 + (b^2)^2$$

$$= a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$$

$$(\frac{m}{n} + \frac{n}{m})^2 = (\frac{m}{n})^2 + 2 \times (\frac{m}{n}) \times (\frac{n}{m}) + (\frac{n}{m})^2$$

$$= \frac{m^2}{n^2} + 2 + \frac{n^2}{m^2}$$

$$(a^3-a^2)^2 = (a^3)^2 - 2 \times a^3 \times a^2 + (a^2)^2$$

$$= a^6 - 2a^5 + a^4$$

$$(\frac{2}{8})^2 + 2(\frac{2}{8})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 = (\frac{2}{8} + \frac{1}{2})^2$$

$$= (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$(\frac{3}{4})^2 - 2(\frac{3}{4})(\frac{0}{4}) + (\frac{0}{4})^2 = (\frac{3}{4} - \frac{0}{4})^2$$

$$= \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$(a+b+2c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)(2c) + (2c)^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 4ac + 4bc + 4c^2$$

$$(a-2b+c)^2 = (a-2b)^2 + 2(a-2b)(c) + c^2$$

$$= a^2 - 4ab + 4b^2 + 2ac - 4bc + c^2$$

پاسخ ۱۴

$$(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$$

$$(m-8)^2 = m^2 - 16m + 64$$

$$(2t+4)^2 = 4t^2 + 16t + 16$$

$$(\frac{1}{a} + a)^2 = \frac{1}{a^2} + 2 + a^2$$

$$(\Delta a^2 - 3b^2)^2 = 2\Delta a^2 - 2 \times \Delta a^2 b^2 + 9b^4$$

$$(3a^2 + 2b^2)^2 = 9a^4 + 12a^2b^2 + 4b^4$$

$$(7x^2 + 4y)^2 = 49x^4 + 56x^2y + 16y^2$$

$$(3t^2 - 2t)^2 = 9t^4 + 12t^2 + 4t^2$$

پاسخ ۱۵

$$(1004)^2 = (1000+4)^2 = 1000^2 + 2 \times 4 \times 1000 + 4^2$$

$$= 1000000 + 8000 + 16 = 1008016$$

$$(997)^2 = (1000-3)^2 = 1000^2 - 2 \times 3 \times 1000 + 3^2$$

$$= 1000000 - 6000 + 9 = 994009$$

$$(0/97)^2 = (1-0/03)^2 = 1^2 - 2 \times 0/03 + (0/03)^2$$

$$= 1 - 0/06 + 0/0009 = 0/9409$$

۱

۲

۳

$$=(\sqrt{2a}-\sqrt{3})(2\sqrt{2a}+2\sqrt{3})=(\sqrt{2a}-\sqrt{3})\times 2(\sqrt{2a}+\sqrt{3})$$

$$=2((\sqrt{2a})^2-(\sqrt{3})^2)=2(2a^2-3)=4a^2-6$$

پاسخ ۲۱

$$497 \times 503 = (500-3)(500+3) = 500^2 - 3^2$$

$$= 250000 - 9 = 249991$$

$$1194 \times 1206 = (1200-6)(1200+6) = 1200^2 - 6^2$$

$$= 1440000 - 36 = 1439964$$

$$502^2 - 398^2 = (502+398)(502-398) = 900 \times 104$$

$$= 93600$$

$$5/19 \times 4/11 = (5+0/19)(5-0/19) = 5^2 - (0/19)^2$$

$$= 25 - 0/361 = 24/9639$$

پاسخ ۲۲

$$a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$$

$$2a^2 - 8 = 2(a^2 - 4) = 2(a-2)(a+2)$$

$$x^2 - 8x^2 = x^2(x^2 - 8) = x(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2$$

$$= ((x+y) + (x-y))((x+y) - (x-y))$$

$$= (2x)(2y) = 4xy$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 9 = (x+1)^2 - 3^2$$

$$= (x+1+3)(x+1-3) = (x+4)(x-2)$$

$$(2a-1)^2 - (3a-5)^2$$

$$= ((2a-1) + (3a-5))((2a-1) - (3a-5))$$

$$= (5a-6)(-a+4)$$

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 + (2-5)x + (2 \times (-5))$$

$$= (x+2)(x-5)$$

$$a^2b^2 + 10ab + 21 = (ab)^2 + (7+3)ab + (7 \times 3)$$

$$= (ab+7)(ab+3)$$

$$a^2 - 11a^2 + 30a = a(a^2 - 11a + 30)$$

$$= a(a^2 + (-5-6)a + (-5 \times (-6))) = a(a-5)(a-6)$$

$$4a^2 + 6ab - 4b^2 = (2a)^2 + 2(b)(2a) - 4b^2$$

$$= (2a)^2 + (4b-b)(2a) + (4b \times (-b))$$

$$= (2a+4b)(2a-b)$$

پاسخ ۲۳

می‌دانیم $a-b=7$ و $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=56$ است؛

بنابراین داریم:

$$(a-b)(a+b) = 7(a+b) = 56 \Rightarrow a+b = \frac{56}{7} = 8$$

پاسخ ۲۴

می‌دانیم a و b هر دو اعدادی مثبت هستند؛ بنابراین داریم:

$$a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > b^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0$$

پاسخ ۱۹

می‌دانیم $a + \frac{1}{a} = 10$ است؛ بنابراین داریم:

$$(a + \frac{1}{a})^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 100$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 100 - 2 = 98$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 98 \Rightarrow (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 = 98^2$$

$$\Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} + 2 = 9604 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 9604 - 2 = 9602$$

$$\Rightarrow 9(a^4 + \frac{1}{a^4}) = 9 \times 9602 \Rightarrow 9a^4 + \frac{9}{a^4} = 86418$$

پاسخ ۲۰

$$(a-5)(a+5) = a^2 - 25$$

$$(2a-1)(2a+1) = (2a)^2 - 1^2 = 4a^2 - 1$$

$$(x-2y)(x+2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$$

$$(x+2y)(3x-6y) = (x+2y) \times 3(x-2y)$$

$$= 3((x+2y)(x-2y)) = 3(x^2 - (2y)^2) = 3(x^2 - 4y^2)$$

$$= 3x^2 - 12y^2$$

$$(3m^2-n^2)(6m^2+2n^2) = (3m^2-n^2) \times 2(3m^2+n^2)$$

$$= 2((3m^2-n^2)(3m^2+n^2)) = 2((3m^2)^2 - (n^2)^2)$$

$$= 2(9m^4 - n^4) = 18m^4 - 2n^4$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$$

$$(x+1)(x-3) = x^2 + (1-3)x + (1 \times (-3))$$

$$= x^2 - 2x - 3$$

$$(x^2+1)(x^2+3) = (x^2)^2 + (1+3)x^2 + (1 \times 3)$$

$$= x^4 + 4x^2 + 3$$

$$(2a^2-4)(2a^2+6) = (2a^2)^2 + (-4+6)2a^2 + (-4 \times 6)$$

$$= 4a^4 + 4a^2 - 24$$

$$(x^2+2x-1)(x^2+2x+3)$$

$$= ((x^2+2x)-1)((x^2+2x)+3)$$

$$= (x^2+2x)^2 + (-1+3)(x^2+2x) + (-1) \times 3$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4x^2 + 2(x^2+2x) - 3$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4x^2 + 2x^2 + 4x - 3$$

$$= x^4 + 4x^2 + 6x^2 + 4x - 3$$

$$(a^2-\sqrt{15})(a^2+\sqrt{15})(a^4+15) = (a^4-15)(a^4+15)$$

$$= a^8 - 225$$

$$(\sqrt{2a}-\sqrt{3})(2\sqrt{2a}+\sqrt{12})$$

$$= (\sqrt{2a}-\sqrt{3})(2\sqrt{2a}+\sqrt{4 \times 3})$$



پاسخ ۲۸

- ۱ $a < 0, b, c > 0 \Rightarrow abc < 0$
- ۲ $a < 0 \Rightarrow a^2 > 0, b, c > 0 \Rightarrow a^2 bc > 0$
- ۳ $a < 0, b, c > 0 \Rightarrow c^2 > 0 \Rightarrow \frac{ab}{c^2} < 0$
- ۴ $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{b} > 0$
 $\Rightarrow \frac{\sqrt{b}}{a} < 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{b}}{a} > 0$
- ۵ $a < 0 \Rightarrow |a| > 0, a^3 < 0 \Rightarrow \frac{|a|}{3a^3} < 0$
- ۶ $a < 0 \Rightarrow a^2 > 0, b > 0 \Rightarrow b^3 > 0$
 $\Rightarrow a^2 b^3 > 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} a^2 b^3 < 0$
- ۷ $a < 0 \Rightarrow a^3 < 0, b > 0 \Rightarrow b^2 > 0$
 $\Rightarrow b^2 - a^3 > 0$ و $c > 0 \Rightarrow 3c > 0 \Rightarrow \frac{b^2 - a^3}{3c} > 0$
- ۸ $a < 0, b > 0 \Rightarrow -b < 0 \Rightarrow a - b < 0$
 $\Rightarrow (a - b)^2 > 0$

پاسخ ۲۹

- ۱ $ab > 0 \Rightarrow a, b$ یا $a, b > 0$ یا $a, b < 0$ هم‌علامت‌اند.
- ۲ $2ab < 0 \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow a$ و b هم‌علامت نیستند.
- ۳ $\Rightarrow a > 0, b < 0$ یا $a < 0, b > 0$
 $-a^2 b > 0 \Rightarrow a^2 b < 0 \Rightarrow a^2 > 0, b < 0$
 $\Rightarrow a > 0, b < 0$ یا $a < 0, b < 0$
- ۴ $a^2 b^2 > 0 \Rightarrow a^2 > 0, b^2 > 0$
 $\Rightarrow a$ و b می‌توانند هر علامتی داشته باشند.
- ۵ $\frac{ab^2}{c} < 0 \Rightarrow b^2 > 0$ و $\frac{a}{c} < 0$
 $\Rightarrow a$ و c هم‌علامت نیستند و b عددی غیر صفر است.
- ۶ $\frac{|a|b}{c} < 0 \Rightarrow |a| > 0, \frac{b}{c} < 0$
 $\Rightarrow c$ و b هم‌علامت نیستند و a عددی غیر صفر است.

پاسخ ۳۰

- ۱ $\frac{3a}{2} + \frac{b}{3} \geq 15$
 ۳ برابر a ۲ ۳
 ثلث b
- ۲ عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم؛ بنابراین داریم:
 $5x + 4 < 3$
- ۳ عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم؛ بنابراین داریم:
 $3x > 2x + 4$ یا $3x - 2x > 4$
- ۴ عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم؛ بنابراین داریم:
 $\frac{x}{2} + 2x < 2$

$\Rightarrow (a - b)(a + b) > 0$

می‌دانیم a و b هر دو اعدادی مثبت هستند؛ بنابراین حاصل جمع آن‌ها یعنی $a + b$ نیز عددی مثبت است. از آنجایی که $(a + b)(a - b) > 0$ است، بنابراین $a - b$ و $a + b$ هم‌علامت هستند؛ در نتیجه داریم:

$a - b > 0 \Rightarrow a - b + b > 0 + b \Rightarrow a > b$

پاسخ ۲۵

- ۱ $a = b + 5 \Rightarrow a = b + p, p = 5 > 0 \Rightarrow a > b$
- ۲ $a + 2 = b \Rightarrow b = a + p, p = 2 > 0 \Rightarrow a < b$
- ۳ $a - 5 = b + 4 \Rightarrow a = b + 4 + 5$
 $\Rightarrow a = b + 9 \Rightarrow a = b + p, p = 9 > 0 \Rightarrow a > b$
- ۴ $5a = 2b, a, b > 0 \Rightarrow b = \frac{5}{2}a \Rightarrow b = 2/5a$
 $\Rightarrow b = a + 1/5a \Rightarrow b = a + p, p = 1/5a > 0 \Rightarrow b > a$
- ۵ $3a - 1 = 6b + 2 \Rightarrow 3a = 6b + 3 \Rightarrow a = 2b + 1$
 از طرفی می‌دانیم a و b هر دو اعدادی مثبت هستند؛ بنابراین داریم:
 $a = b + b + 1 \Rightarrow a = b + p, p = b + 1 > 0 \Rightarrow a > b$
- ۶ $a - b = 2 \Rightarrow a = b + 2 \Rightarrow a = b + p, p = 2 > 0$
 $\Rightarrow a > b$

پاسخ ۲۶

- ۱ $a = b + 1 \Rightarrow a = b + p, p = 1 > 0 \Rightarrow a > b$
- ۲ $a - 2 = b - 1 \Rightarrow a = b - 1 + 2 = b + 1$
 $\Rightarrow a = b + p, p = 1 > 0 \Rightarrow a > b$
- ۳ $a + 3 = b - 4 \Rightarrow a + 3 + 4 = b \Rightarrow a + 7 = b$
 $\Rightarrow b = a + p, p = 7 > 0 \Rightarrow a < b$
- ۴ $2a - 1 = 2b + 3 \Rightarrow 2a = 2b + 3 + 1 \Rightarrow 2a = 2b + 4$
 $\xrightarrow{\div 2} a = b + 2 \Rightarrow a = b + p, p = 2 > 0 \Rightarrow a > b$
- ۵ $3a - 2 = 3(b - 3) \Rightarrow 3a - 2 = 3b - 9$
 $\Rightarrow 3a - 2 + 9 = 3b \Rightarrow 3a + 7 = 3b \xrightarrow{\div 3} a + \frac{7}{3} = b$
 $\Rightarrow b = a + p \Rightarrow p = \frac{7}{3} > 0 \Rightarrow a < b$
- ۶ $\frac{a - b}{2} = -2 \xrightarrow{\times 2} a - b = -4 \Rightarrow a + 4 = b$
 $\Rightarrow b = a + p, p = 4 > 0 \Rightarrow a < b$

پاسخ ۲۷

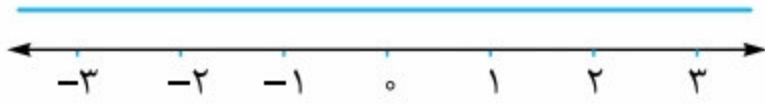
- ۱ درست
- ۲ درست
- ۳ درست - می‌دانیم $b > c$ است؛ بنابراین داریم:
 $a + b > a + c$
- ۴ نادرست - کافی است به جای a ، عددی بین صفر و یک مانند $\frac{1}{2}$ را قرار دهیم. آن‌گاه خواهید دید که رابطه بیان شده اشتباه است.
- ۵ درست

$$\Rightarrow -4x > -12 \Rightarrow x < 3$$



$$(x-1)^2 \leq x^2 - 2x + 1 \Rightarrow (x-1)^2 \leq (x-1)^2 \quad 10$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید عبارت‌های دو سمت علامت \leq با هم برابرند، بنابراین به ازای همه مقادیر x عبارت بالا برقرار است.



پاسخ ۳۲

از آن جایی که در هر ساعت ۱۰ گیگابایت اینترنت مصرف می‌شود و هر روز کاری ۸ ساعت است، بنابراین مصرف روزانه اینترنت در هر روز کاری برابر $8 \times 10 = 80$ گیگابایت است. اگر تعداد روزهایی که شرکت می‌تواند فعالیت‌های کاری اینترنتی خود را انجام دهد، x در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$80x \leq 1600 \Rightarrow x \leq \frac{1600}{80} = 20$$

نتیجه می‌گیریم این حجم از اینترنت برای مصرف ۲۰ روز کاری شرکت کافی است.

پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱ گزینه \odot همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در عبارت مربوط به گزینه (۳) یعنی $5x^{-1}$ ، توان x عدد -1 است که عضو مجموعه اعداد حسابی نیست؛ بنابراین $5x^{-1}$ ، یک جمله‌ای نمی‌باشد.

۲ گزینه \odot براساس تعریف یک جمله‌ای‌های جبری، بین حروف و اعداد نمی‌توان علامت‌های جمع و تفریق قرار گیرد؛ بنابراین $3x^2y - 5xy^2$ یک جمله‌ای به حساب نمی‌آید.

وقت‌کنید حاصل عبارت $\sqrt{5x^4}$ در گزینه (۲) برابر $\sqrt{5x^2}$ است که یک جمله‌ای محسوب می‌شود.

۳ گزینه \odot حاصل عبارت $\frac{a}{\sqrt{2a}}$ برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{a^{-1}}{\sqrt{2}}$$

از آن جایی که توان متغیر a در این عبارت عددی منفی است، نتیجه می‌گیریم عبارت فوق یک جمله‌ای نیست.

۴ گزینه \odot حاصل گزینه (۴) برابر است با:

$$\sqrt{2}(x+y) = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$$

از آن جایی که بین اعداد و متغیرهای این عبارت علامت جمع قرار دارد، نتیجه می‌گیریم این عبارت یک جمله‌ای نیست.

وقت‌کنید حاصل گزینه (۳) برابر است با $-\frac{x}{6}$ که $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = -\frac{x}{6}$ یک جمله‌ای به حساب می‌آید.

۵ گزینه \odot برای این که دو یک جمله‌ای متشابه باشند باید قسمت حرفی آن‌ها کاملاً یکسان باشد که تنها گزینه (۲) این گونه است.

۶ گزینه \odot درجه یک جمله‌ای $5x^2y^3$ نسبت به متغیرهای x و y برابر مجموع توان آن‌ها است. $2+3=5$

۵ اگر پول علی را a در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

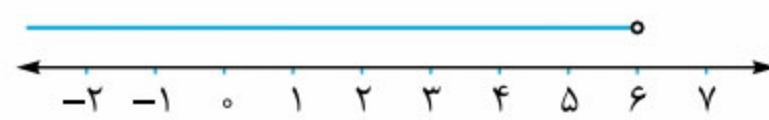
برابر پول علی

$$5a > 3a + 1000 \text{ یا } 5a - 3a > 1000$$

برابر پول علی

پاسخ ۳۱

$$4x - 1 < 3x + 5 \Rightarrow 4x - 3x < 5 + 1 \Rightarrow x < 6 \quad 1$$



$$4(2x+1) - 3 > 5 - 2x \Rightarrow 8x + 4 - 3 > 5 - 2x \quad 2$$

$$\Rightarrow 8x + 2x > 5 + 3 - 4 \Rightarrow 10x > 4 \Rightarrow x > \frac{4}{10}$$



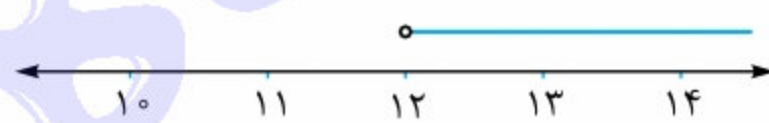
$$x + \frac{x+1}{2} \geq 3x - 1 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 2} 2x + x + 1 \geq 6x - 2 \quad 3$$

$$\Rightarrow 3x - 6x \geq -2 - 1 \Rightarrow -3x \geq -3 \Rightarrow x \leq 1$$



$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > \frac{x}{12} + 1 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 12} 6x - 4x > x + 12 \quad 4$$

$$\Rightarrow 6x - 4x - x > 12 \Rightarrow x > 12$$



$$\frac{4x-1}{2} \leq \frac{x+1}{3} \xrightarrow{\text{طرفین } \times 6} 12x - 3 \leq 2x + 2 \quad 5$$

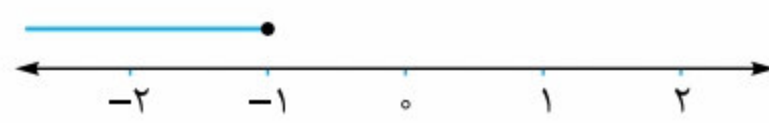
$$\Rightarrow 12x - 2x \leq 2 + 3 \Rightarrow 10x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$



$$(x+1)^2 - (x-1)^2 \leq 2x - 2 \quad 6$$

$$\Rightarrow \underline{x^2} + \underline{2x} + \underline{1} - \underline{x^2} + \underline{2x} - \underline{1} \leq 2x - 2 \Rightarrow 4x \leq 2x - 2$$

$$\Rightarrow 4x - 2x \leq -2 \Rightarrow 2x \leq -2 \Rightarrow x \leq -1$$



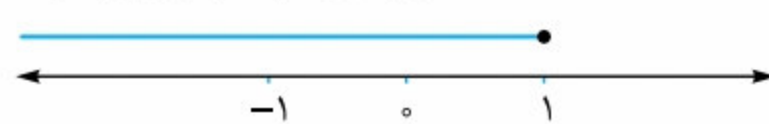
$$x(x+2) < x^2 + 3x - 1 \Rightarrow x^2 + 2x < x^2 + 3x - 1 \quad 7$$

$$\Rightarrow \underline{x^2} + \underline{2x} - \underline{x^2} - \underline{3x} < -1 \Rightarrow -x < -1 \Rightarrow x > 1$$



$$x^2 - 1 \leq x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \underline{x^2} - \underline{x^2} + 2x \leq 1 + 1 \quad 8$$

$$\Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$$



$$(x-1)(x-3) > (x+3)(x-3) \quad 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 > x^2 - 9 \Rightarrow \underline{x^2} - 4x - \underline{x^2} > -9 - 3$$



گزینه ۷ :: بررسی سایر گزینه‌ها

گزینه (۱): درجه y در عبارت $5x^3y^5$ برابر با توان آن یعنی عدد ۵ است.

گزینه (۲): یک جمله‌ای $5a^3$ برابر $5a^2b$ است؛ بنابراین درجه این یک جمله‌ای نسبت به b برابر صفر است.

گزینه (۳): درجه یک جمله‌ای xy^2zt^3 نسبت به تمام متغیرهای آن برابر $1+2+1+3=7$ است.

گزینه ۸ :: می‌دانیم درجه یک جمله‌ای $5x^a y^{2-a} z^{3a-1}$ نسبت به متغیرهای x و y یکسان است، پس توان x و y با هم برابر است؛ بنابراین داریم: $a=2-a \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$
درجه یک جمله‌ای نسبت به متغیر z برابر با $3a-1$ است؛ بنابراین داریم: $3 \times 1 - 1 = 2$

گزینه ۹ :: می‌دانیم درجه یک جمله‌ای نسبت به a و b برابر ۵ است؛ بنابراین: $x+y=5$
هم‌چنین می‌دانیم درجه یک جمله‌ای نسبت به b و c ، 7 و نسبت به a و c برابر ۶ است.

در نتیجه $y+z=7$ و $x+z=6$ است. حال به محاسبه مجموع تساوی‌های به دست آمده می‌پردازیم: $x+y+y+z+x+z=5+7+6=18 \Rightarrow 2x+2y+2z=18$

$$\Rightarrow 2(x+y+z)=18 \Rightarrow x+y+z=\frac{18}{2}=9$$

عبارت $x+y+z$ برابر توان یک جمله‌ای $a^x b^y c^z$ نسبت به تمام متغیرهایش است که برابر ۹ است.

گزینه ۱۰ :: از آنجایی که حاصل $5a^x b^3 + 3a^x b^y$ یک جمله‌ای است، بنابراین قسمت حرفی دو عبارت یکسان است؛ پس $y=3$ می‌باشد. از طرفی می‌دانیم درجه یک جمله‌ای حاصل نسبت به a برابر ۴ است. نتیجه می‌گیریم: $3x-2y=3 \times 4 - 2 \times 3 = 12 - 6 = 6$

گزینه ۱۱ ::
$$\left. \begin{aligned} A &= 2x^3 y^2 \\ B &= \frac{1}{5} x^2 y \\ C &= 10x^4 y^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{A^2 B C^3}{2} = \frac{(2x^3 y^2)^2 \times \frac{1}{5} x^2 y \times (10x^4 y^2)^3}{2} = \frac{4x^6 y^4 \times \frac{1}{5} x^2 y \times 1000x^{12} y^6}{2}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، درجه عبارت فوق نسبت به متغیر y برابر است با: $4+1+6=11$

گزینه ۱۲ :: چندجمله‌ای‌های جبری از جمع دو یا چند یک جمله‌ای به وجود می‌آیند. از آنجایی که عبارت $\frac{x-2y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{2y}{z}$ است و عبارت‌های $\frac{x}{z}$ و $\frac{2y}{z}$ یک جمله‌ای نیستند، پس $\frac{x-2y}{z}$ چندجمله‌ای نیست.

گزینه ۱۳ :: با توجه به پاسخ سؤال قبل، گزینه (۱) چندجمله‌ای نیست.

گزینه ۱۴ :: کافی است حاصل عبارت داده‌شده را به دست آوریم.
$$3x(2x^2+1) - 4x^2(2x-3) + 2x^3$$

$$= 6x^3 + 3x - 8x^3 + 12x^2 + 2x^3 = 8x^3 - 8x^3 + 12x^2 + 3x$$

$$= 12x^2 + 3x$$

بنابراین درجه نسبت به x برابر ۲ است.

گزینه ۱۵ :: درجه عبارت داده‌شده نسبت به a و b برابر ۳، نسبت به c برابر ۵ و نسبت به d برابر ۴ است.

گزینه ۱۶ :: درجه چندجمله‌ای داده‌شده نسبت به x و y برابر $4+5=9$ است.

گزینه ۱۷ :: هر یک از دو پرانتز دارای ۴ جمله متمایز هستند؛ بنابراین از ضرب این دو پرانتز $4 \times 4 = 16$ جمله متمایز به دست می‌آید.

گزینه ۱۸ :: ابتدا از $2(A+B)$ فاکتور می‌گیریم:
$$2A(A+B) - 2(A+B)B = 2(A+B)(A-B)$$

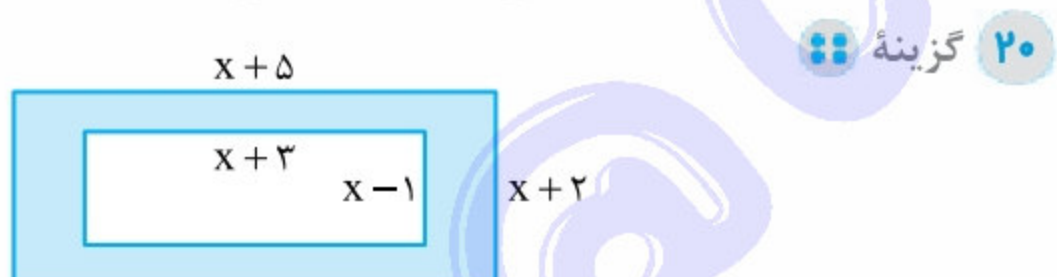
$$= 2(x+1+2x-1)(x+1-2x+1) = 2(3x)(-x+2)$$

$$= -6x^2 + 12x$$

گزینه ۱۹ ::
$$\left. \begin{aligned} A &= x^2 + 2x + 3 \\ B &= 2x^2 - 2x + 4 \\ C &= -x^2 + x - 4 \end{aligned} \right\}$$


$$\Rightarrow A+B-C = x^2 + 2x + 3 + 2x^2 - 2x + 4 - (-x^2 + x - 4)$$

$$= x^2 + 2x + 3 + 2x^2 - 2x + 4 + x^2 - x + 4 = 4x^2 - x + 11$$

گزینه ۲۰ :: 

مساحت مستطیل بزرگ: $(x+5)(x+2) = x^2 + 7x + 10$
مساحت مستطیل کوچک: $(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$
مساحت قسمت رنگی: $x^2 + 7x + 10 - (x^2 + 2x - 3)$
 $= 5x + 13$

گزینه ۲۱ :: برای محاسبه مساحت خواسته‌شده، مساحت قسمت‌های ۱ تا ۴ را به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم.


$$\left. \begin{aligned} (1) &: b \times 1 = b \\ (2) &: 2 \times a = 2a \\ (3) &: c \times 1 = c \\ (4) &: d \times a = ad \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مساحت کل} = b + 2a + c + ad$$



گزینه ۲۹: برای پاسخ به این سؤال کافی است ۳ رابطه صورت

$$\left. \begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ 2x + z &= 7 \\ y + 2z &= 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3x + 3y + 3z = 30$$

$$\Rightarrow 3(x + y + z) = 30 \Rightarrow x + y + z = 10$$

$$\Rightarrow 7x + 7y + 7z = 70$$

گزینه ۳۰:

$$2m - 3 = 7 \Rightarrow 2m = 3 + 7 = 10 \Rightarrow m = 5$$

$$y = m - 1 \xrightarrow{m=5} 5 - 1 = 4$$

$$z = 2m + 1 \xrightarrow{m=5} 2 \times 5 + 1 = 11$$

گزینه ۳۱: ابتدا با جای‌گذاری $x = -\frac{1}{3}$ مقدار A را به دست می‌آوریم، سپس مقدار A را در B جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{1+x}{1-x}, B = \frac{1-A}{1+A}, x = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۳۲: می‌دانیم $A = -B$ و $C = \frac{1}{B}$ ؛ بنابراین داریم:

$$((BA^3 + B^4)C + B^2C^2)^1$$

$$= ((B \times (-B)^3 + B^4) \frac{1}{B} + B^2 \times \frac{1}{B^2})^1$$

$$= [(-B^3 + B^4) \frac{1}{B} + 1]^1 = [0 + 1]^1 = 1$$

گزینه ۳۳: می‌دانیم $a * b = a^2b - ab^2$ است؛ بنابراین داریم:

$$(a * b)(b * a) = (a^2b - ab^2)(b^2a - ba^2)$$

$$= ab(a - b) \times ab(b - a) = a^2b^2(a - b) \times (-(a - b))$$

$$= -\underbrace{a^2b^2(a - b)^2}_{\geq 0} \leq 0$$

گزینه ۳۴:

$$\frac{x^6 + 3x}{3x^6 + 9x^4} = \frac{x^6 + 3x}{3x^3(x^3 + 3x)} = \frac{1}{3x^2}$$

$$\xrightarrow{x = -\frac{1}{3}} \frac{1}{3(-\frac{1}{3})^2} = -9$$

گزینه ۳۵:

$$(3x + 2)(x - 1) = 3x^2 - 3x + 2x - 2 = 3x^2 - x - 2$$

گزینه ۳۶:

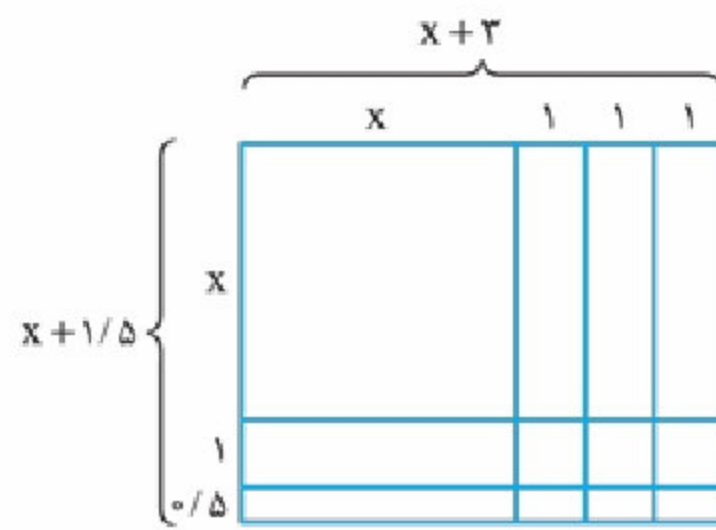
$$(3x - k)(x + k) = 3x^2 + 6x - k^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3kx - kx - k^2 = 3x^2 - 6x - k^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2kx - k^2 = 3x^2 + 6x - k^2 \Rightarrow 2kx = 6x$$

$$\Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$$

گزینه ۲۲:



$$S = (x + 3)(x + 1/5) = x^2 + 4/5x + 3/5$$

گزینه ۲۳: از آن جایی که $A = x^{\frac{5}{m-1}} + x^{m+2}$ چند جمله‌ای است، بنابراین $\frac{5}{m-1}$ باید عضو مجموعه اعداد حسابی باشد. در نتیجه ۵ بر $m-1$ بخش پذیر است پس داریم:

$$\frac{5}{m-1} \in \mathbb{W} \Rightarrow \begin{cases} m-1=1 \Rightarrow m=2 \\ m-1=5 \Rightarrow m=6 \end{cases}$$

$m=2$ اگر $\Rightarrow A = x^5 + x^4 \Rightarrow x$ به نسبت ۵

$m=6$ اگر $\Rightarrow A = x + x^8 \Rightarrow x$ به نسبت ۸

گزینه ۲۴: در زیر هر پرانتز مربوط به عبارت A، بزرگ‌ترین توان X را نوشته، سپس آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$A = \underbrace{(x^3 - 1)^2}_{x^6} \underbrace{(x^2 + 4)^3}_{x^6} - x^{11} + 1$$

$$x^6 \times x^6 = x^{12}$$

گزینه ۲۵:

نکته: برای به دست آوردن مجموع ضرایب یک چند جمله‌ای، کافی است به جای متغیرهای آن، عدد ۱ را قرار دهیم.

$$(2x^2 - x^3 + 1)(x^2 - 2x)$$

$$\xrightarrow{x=1} (2 - 1 + 1)(1 - 2) = 2 \times (-2) = -4$$

گزینه ۲۶:

نکته: برای به دست آوردن مجموع ضرایب یک چند جمله‌ای باید به جای متغیرهای آن عدد ۱ را قرار دهیم و حاصل را محاسبه کنیم. با توجه به نکته بالا، به جای X و Y، عدد ۱ را قرار می‌دهیم.

$$(3 - 5)^2 (3 + 2 + a)^3 = (-2)^2 (5 + a)^3 = 32$$

$$(5 + a)^3 = 8 \Rightarrow 5 + a = 2 \Rightarrow a = -3$$

گزینه ۲۷: بزرگ‌ترین درجه X هر پرانتز را زیر آن می‌نویسیم و

حاصل را در هم ضرب می‌کنیم تا درجه کل عبارت نسبت به متغیر X مشخص شود.

$$x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+10)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x \times x \times x \times x \times \dots \times x = x^{11}$$

۱۱ بار

گزینه ۲۸:

$$(2x+3)(2x^2-6x+4) = 4x^3 - 12x^2 + 8x + 6x^2 - 18x + 12$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 6x^2 - 10x + 12$$

$$\Rightarrow 8x - 18x = -10x \Rightarrow x \text{ ضریب } = -10$$



گزینه ۴۶

$$a - b = 0 \Rightarrow (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

گزینه ۴۷ اگر عدد اول را x و عدد دوم را y در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 11 \\ xy &= 24 \\ x^2 + y^2 &=? \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x + y)^2 = 11^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 121 \Rightarrow x^2 + y^2 + 48 = 121$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 121 - 48 = 73$$

گزینه ۴۸ $x^2 + y^2 = 2xy \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\frac{2x^2 + y^2}{3y^2 - x^2} = \frac{2x^2 + x^2}{3x^2 - x^2} = \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۴۹

$$x - y = 2 \Rightarrow (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4 + 2xy = 4 + 2 \times 5 = 4 + 10 = 14$$

$$\frac{x^2 + y^2}{4xy} = \frac{14}{4 \times 5} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

گزینه ۵۰

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 &= 150 \\ (a - b)^2 &= 100 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 150 - 2ab = 100$$

$$\Rightarrow 2ab = 50 \Rightarrow ab = 25$$

گزینه ۵۱ برای این که عبارت $4x^2 - 12x + 1$ به صورت مربع دو جمله‌ای درآید، باید آن را به صورت $(a + b)^2$ یا $(a - b)^2$ نوشت.

$$\left. \begin{aligned} 4x^2 &= (2x)^2 \\ 12x &= 2 \times (2x) \times 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} (2x - 3)^2 &= 4x^2 - 12x + 9 \\ &= 4x^2 - 12x + 1 + 8 \end{aligned}$$

گزینه ۵۲ مطابق سؤال قبل به این سؤال پاسخ می‌دهیم:

$$4x^2 + mx + 9 = (2x)^2 + mx + 3^2 \Rightarrow mx = 2 \times 2x \times 3$$

$$\text{یا } mx = -2 \times 2x \times 3$$

$$\Rightarrow m = 12 \text{ یا } m = -12$$

گزینه ۵۳ $9x^2 - 2x + 4 = (3x)^2 - 2x + 2^2$

$$\Rightarrow (3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 2 \times 3x + 4 = 9x^2 - 12x + 4 = 9x^2 - 2x + 4 - 10x$$

گزینه ۵۴ $x^2 - (m + 2)x + 2m$

از آن جایی که $2m$ باید مربع کامل باشد، اعدادی مانند ۲، ۴، ۱۸، ۳۲ و ... را می‌توان به جای m قرار داد، اما از آن جایی که $m + 2$ باید برابر

(جمله دوم $\times 2$) باشد، تنها عدد ۲ را می‌توان به جای m قرار داد.

گزینه ۳۷ کافی است ضرایب سمت راست و چپ تساوی را

$$2x^2 + ax - 3 = (x - 1)(2x + 3)$$

$$= 2x^2 - 2x + 3x - 3 = 2x^2 + x - 3 \Rightarrow a = 1$$

گزینه ۳۸ کافی است ضرایب سمت راست و چپ تساوی را

$$ax^2 + b(x + 1)^2 + c(x + 2)^2 = (x + 3)^2$$

از آن جایی که $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ است، بنابراین ضریب x^2 در سمت چپ تساوی باید برابر ۱ باشد.

$$ax^2 + bx^2 + cx^2 = x^2 \Rightarrow (a + b + c)x^2 = x^2$$

$$\Rightarrow a + b + c = 1$$

گزینه ۳۹ $x(a^2 - 1) + y(a^2 + a - 3) = a^2 - 2a + 3$

همان‌طور که در سمت راست تساوی مشخص است، ضریب a^2 برابر ۱ می‌باشد. بنابراین کافی است ضریب a^2 در سمت چپ تساوی را برابر ۱ قرار دهیم. حال داریم:

$$xa^2 + ya^2 = a^2 \Rightarrow (x + y)a^2 = a^2 \Rightarrow x + y = 1$$

گزینه ۴۰ عبارت داده شده در سؤال یا باید به صورت $(a + b)^2$

نوشته شود یا به صورت $(a - b)^2$ ؛ بنابراین داریم:

$$9x^2y^2 + x^4 + A = (3xy + x^2)^2 = 9x^2y^2 + x^4 + 6x^3y$$

$$\Rightarrow A = 6x^3y$$

گزینه ۴۱ مانند سؤال قبل باید عبارت را به صورت اتحاد مربع

دوجمله‌ای بنویسیم:

$$\Delta x^2 + y^2 + B = (\sqrt{\Delta}x + y)^2 = \Delta x^2 + y^2 + 2\sqrt{\Delta}xy$$

گزینه ۴۲

$$x^2 + m(m + 1)x + 36 = x^2 + m(m + 1)x + 6^2$$

$$\Rightarrow m(m + 1)x = 2 \times 6 \times x \Rightarrow m(m + 1) = 12 \Rightarrow m = 3$$

گزینه ۴۳ اگر عدد اول را x و عدد دوم را y در نظر بگیریم،

خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 18 \\ xy &= 72 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &=? \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۴۴

$$3a - 4b = 1 \Rightarrow (3a - 4b)^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2 = 1$$

حال طرفین تساوی را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2(9a^2 - 24ab + 16b^2) = 2 \Rightarrow 18a^2 - 48ab + 32b^2 = 2$$

گزینه ۴۵

$$\left. \begin{aligned} (a + b)^2 &= 15 \\ a^2 + b^2 &= 35 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 35 + 2ab = 15$$

$$\Rightarrow 2ab = -20 \Rightarrow ab = -10$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 35 - 2(-10) = 35 + 20 = 55$$



گزینه ۶۲ •• در عبارت زیر، x^4 ها و ضرایب آن‌ها را در هر پرانتز

$$3(x^2 - x^3 + 2)^2 + (3x^4 - x^3 - 1)$$

↓

$$3 \times x^4 + 3x^4 = 6x^4$$

گزینه ۶۳ ••

$$(0/999)^2 = (1-0/001)^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times 0/001 + (0/001)^2$$

$$= 1 - 0/002 + 0/000001 = 0/998001$$

جمع ارقام این عدد برابر است با: $9 + 9 + 8 + 1 = 27$

گزینه ۶۴ ••

$$x^2 + y^2 = 10x - 6y - 34 \Rightarrow x^2 - 10x + y^2 + 6y + 34$$

$$= x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = (x-5)^2 + (y+3)^2 = 0$$

مجموع ۲ عبارت بزرگ‌تر یا مساوی صفر، برابر صفر شده است؛ پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} x - 5 = 0 &\Rightarrow x = 5 \\ y + 3 = 0 &\Rightarrow y = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + y = 5 - 3 = 2$$

گزینه ۶۵ • با دسته‌بندی متغیرهای عبارت داده‌شده در سؤال،

سعی می‌کنیم عبارت‌هایی به شکل $x^2 + y^2$ به دست آوریم:

$$2x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + y^4$$

$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^4 + x^2y^2 + y^2$$

$$= (x^2 + y^2)^2 + x^2(x^2 + y^2) + y^2 = 1^2 + x^2 + y^2$$

$$= 1 + 1 = 2$$

گزینه ۶۶ •• برای پاسخ‌دادن به این سؤال باید عبارت $7 + 2\sqrt{12}$

را به گونه‌ای بنویسیم که به شکل $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$ درآید. اگر $a = 3$ و $b = 4$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $a + b = 7$ است و $\sqrt{ab} = \sqrt{12}$.

$$7 + 2\sqrt{12} = 3 + 2\sqrt{12} + 4 = (\sqrt{3} + \sqrt{4})^2$$

گزینه ۶۷ • مانند سؤال قبل باید عبارت $8 - \sqrt{60} = 8 - 2\sqrt{15}$

را به صورت $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$ بنویسیم. اگر $a = 3$ و $b = 5$ باشد، آن‌گاه $a + b = 8$ و $\sqrt{ab} = \sqrt{15}$ خواهد بود؛ بنابراین

$$(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = 3 - 2\sqrt{15} + 5 = 8 - 2\sqrt{15}$$

داریم:

حال داریم:

$$\sqrt{8 - \sqrt{60}} = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$$

$$= |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

گزینه ۶۸ • باید عبارت زیر هر یک از رادیکال‌ها را به فرم

$$a + b = 3 \pm 2\sqrt{ab} + b$$

درآوریم. اگر $a = 1$ و $b = 2$ باشد، آن‌گاه $a + b = 3$

و $ab = 2$ خواهد بود.

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2+1-2\sqrt{2 \times 1}} + \sqrt{2+1+2\sqrt{2 \times 1}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{1})^2} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{2}+1 = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۵۵ •• $a + 2\sqrt{a} + 1$ مربع کامل است یعنی \sqrt{a} عددی

صحیح است. در نتیجه داریم:

$$a + 2\sqrt{a} + 1 = (\sqrt{a} + 1)^2$$

عدد مربع کامل بعدی $\rightarrow (\sqrt{a} + 2)^2 = a + 4\sqrt{a} + 4$

دومین مربع کامل بعدی $\rightarrow (\sqrt{a} + 3)^2 = a + 6\sqrt{a} + 9$

گزینه ۵۶ ••

$$\frac{xy(y^{-2} + x^{-2} + 2x^{-1}y^{-1})}{(x+y)} = \frac{xy(x^{-1} + y^{-1})^2}{(x+y)}$$

$$= \frac{xy(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})^2}{(x+y)} = \frac{xy(\frac{x+y}{xy})^2}{(x+y)} = \frac{xy \times \frac{(x+y)^2}{x^2y^2}}{(x+y)}$$

$$= \frac{(x+y)}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

گزینه ۵۷ •

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2 - 2ab}$$

$$a^2 + b^2 - 5ab = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab = 7ab \\ a^2 + b^2 - 2ab = 3ab \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2 - 2ab} = \frac{7ab}{3ab} = \frac{7}{3}$$

گزینه ۵۸ •• اگر $a = b$ باشد، آن‌گاه $a^2 + b^2 = 2a^2 \neq a^2$

پس مورد (الف) برقرار نیست.

هم‌چنین از آن‌جایی که $a^2 + b^2 = ab$ است، داریم:

$$(a+b)ab = (a+b)(a^2 + b^2) = a^3 + ab^2 + ba^2 + b^3$$

$$\neq a^3 + b^3$$

نتیجه می‌گیریم هر دو مورد برقرار نیست.

گزینه ۵۹ ••

$$4a^2 + b^2 = 4ab \Rightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2a = b$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - ab} = \frac{a^2 + (2a)^2}{a^2 - a(2a)} = \frac{a^2 + 4a^2}{a^2 - 2a^2} = \frac{5a^2}{-a^2} = -5$$

گزینه ۶۰ ••

$$a^2 + b^2 = 4a - 2b - 5 = a^2 - 4a + b^2 + 2b + 5 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 + (b+1)^2 = 0$$

مجموع دو عدد همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر، برابر صفر شده است؛ نتیجه می‌گیریم:

$$\left. \begin{aligned} a - 2 = 0 &\Rightarrow a = 2 \\ b + 1 = 0 &\Rightarrow b = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - b = 2 - (-1) = 3$$

گزینه ۶۱ •• مجموع ۳ عبارت بزرگ‌تر یا مساوی صفر، برابر صفر

شده است؛ بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} a - b = 0 &\Rightarrow a = b \\ b + c = 0 &\Rightarrow b = -c \\ a + c = 0 &\Rightarrow a = -c \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{3(a+b+c)}{2a} = \frac{3(a+a-a)}{2a} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}$$



گزینه ۷۷ :: می‌دانیم $a+b+c=11$ و $ab+bc+ac=3$ است. حال باید به محاسبه $a^2+b^2+c^2$ بپردازیم:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\Rightarrow 11^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$$

$$\Rightarrow 121 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 121 - 6 = 115$$

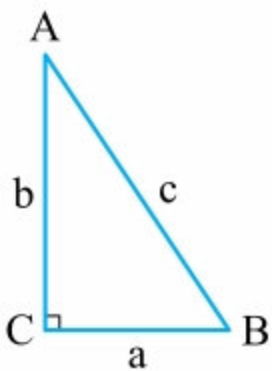
گزینه ۷۸ • فرض می‌کنیم تساوی زیر برقرار باشد:

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac$$

$$\Rightarrow 2bc = 0$$

گزینه ۷۹ :: همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، C وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC است.



$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= c^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= 2(c^2 + ac + bc + ab) = 2(c^2 + (a+b)c + ab)$$

$$= 2(c+a)(c+b)$$

گزینه ۸۰ :: می‌دانیم $a+b+c=10$ است و $ab+bc+ac=5$ بنابراین داریم:

$$(a+b+c)^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) = 100$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 5 = 100 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 90$$

گزینه ۸۱ • ابتدا حاصل عبارت $(a+b-c)^2$ را به دست می‌آوریم:

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$$

$$\Rightarrow (a+b-c)^2 - (a+b)^2 + 2ac$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac - a^2 - b^2 - 2ab - 2ac$$

$$\Rightarrow -b^2 - 2ab + 2ac = c^2 - 2bc = c(c-2b)$$

گزینه ۸۲ :: کافی است در تساوی $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ دو طرف علامت مساوی را برابر هم قرار دهیم:

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow -2ab - 2ac + 2bc = 0 \Rightarrow 2bc = 2ab + 2ac$$

$$\Rightarrow bc = ab + ac \Rightarrow a(b+c) = bc \Rightarrow a = \frac{bc}{b+c}$$

گزینه ۸۳ ::

$$(x^2 + x + \frac{1}{x})^2 = x^4 + x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x^3 + 2x + 2$$

$$= x^4 + x^2 + x^{-2} + 2x^3 + 2x + 2$$

گزینه ۶۹ :: می‌دانیم $a = \frac{1}{b}$ است؛ بنابراین داریم:

$$a^2 b^2 + b^2 a^2 = a^2 b^2 (a+b) = 15$$

$$\text{از طرفی: } a^2 b^2 = a^2 \times \frac{1}{a^2} = 1$$

$$\text{بنابراین: } a+b=15 \Rightarrow (a+b)^2 = 15^2 = 225$$

گزینه ۷۰ ::

$$\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 5 \Rightarrow (\frac{m}{n} + \frac{n}{m})^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{n^2} + 2 \times \frac{m}{n} \times \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2} = 25$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{n^2} + \frac{n^2}{m^2} + 2 = 25 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} + \frac{n^2}{m^2} = 23$$

گزینه ۷۱ ::

$$3x - \frac{1}{4x} = 5 \Rightarrow (3x - \frac{1}{4x})^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 2 \times 3x \times \frac{1}{4x} + \frac{1}{16x^2} = 25$$

$$\Rightarrow 9x^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{16x^2} = 25$$

$$\Rightarrow 9x^2 + \frac{1}{16x^2} = 25 + \frac{3}{2} = \frac{26}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین} \times 2} 18x^2 + \frac{1}{8x^2} = \frac{52}{5}$$

گزینه ۷۲ •

$$\frac{a^2+1}{a} = 14 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 14 \Rightarrow a + 2 + \frac{1}{a} = 14 + 2 = 16$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}})^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 4 \Rightarrow \frac{a+1}{\sqrt{a}} = 4$$

گزینه ۷۳ ::

$$a+b=5 \Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

$$= a+b + 2\sqrt{ab} = 5 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

گزینه ۷۴ •

$$a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow a - \frac{1}{a} = (\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}})(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}) \Rightarrow \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 \Rightarrow 1^2 = a + \frac{1}{a} - 2 = 1 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 3$$

گزینه ۷۵ • ابتدا $x^2 + x^{-2}$ را به صورت $x^2 + \frac{1}{x^2}$ می‌نویسیم:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 5 \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = 5^2 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 25$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = x^4 + x^{-4} = 23$$

گزینه ۷۶ :: اگر عبارت $25^x + 25^{-x}$ را به صورت $(5^2)^x + (5^2)^{-x}$ بنویسیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$(5^2)^x + (5^2)^{-x} = (5^x)^2 + (5^{-x})^2 = 14$$

$$\Rightarrow (5^x)^2 + (5^{-x})^2 + 2 = 14 + 2 \Rightarrow (5^x + 5^{-x})^2 = 16$$

$$\Rightarrow 5^x + 5^{-x} = \sqrt{16} = 4$$



گزینه ۹۲

$$\left. \begin{aligned} A^2 - B^2 &= (A+B)(A-B) \\ A &= x-3 \\ B &= x+2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow (x-3+x+2)(x-3-x-2) = (2x-1)(-5) = -10x+5$$

گزینه ۹۳ •• همان‌طور که در عبارت سؤال مشاهده می‌شود، ضرب دو پرانتز در هم یک اتحاد مزدوج را تشکیل می‌دهد.

$$\frac{a+1}{x^2+y^2} \frac{a-1}{x^2-y^2} = \frac{a+1}{x^2} - \frac{a-1}{y^2}$$

$$= x^{a+1} - y^{a-1}$$

گزینه ۹۴

$$(A-B)(A+B) + B^2 = A^2 - B^2 + B^2 = A^2$$

$$A = a^2 + 4 \Rightarrow A^2 = (a^2 + 4)^2 = a^4 + 8a^2 + 16$$

گزینه ۹۵ •• ابتدا از پرانتز اول یک علامت منفی فاکتور می‌گیریم، سپس داریم:

$$(-\sqrt{15}-2)(\sqrt{15}-2) = -(\sqrt{15}+2)(\sqrt{15}-2)$$

$$= -(\sqrt{15}^2 - 2^2) = -(15-4) = -11$$

گزینه ۹۶ •• ابتدا حاصل عبارت سؤال را به دست می‌آوریم، سپس جذر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$2(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^2 = 2 \underbrace{(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^2}_{\text{اتحاد مزدوج}}(2-\sqrt{3})^2$$

$$= 2(2^2 - \sqrt{3}^2)^2(2-\sqrt{3})^2 = 2(4-3)^2(2-\sqrt{3})^2 = 2(2-\sqrt{3})^2$$

حال از عبارت به دست آمده جذر می‌گیریم:

$$\sqrt{2(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

حالا باید عبارت $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ را ساده کنیم. اگر در اتحاد $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$ را برابر ۱ در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{1})^2 = 3+1-2\sqrt{3 \times 1} \Rightarrow (\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

در نتیجه داریم:

گزینه ۹۷ •• ابتدا از پرانتز دوم، عدد ۲ را فاکتور می‌گیریم:

$$(5-\sqrt{21})^2(2\sqrt{21}+10)^2 = 2^2(5-\sqrt{21})^2(5+\sqrt{21})^2$$

$$= 2^2(5^2 - (\sqrt{21})^2)^2 = 2^2(25-21)^2 = 2^2(4)^2 = 8^2$$

گزینه ۹۸ ••

$$\frac{c^2 - (a-b)^2}{a-b+c} = \frac{(c-(a-b))(c+(a-b))}{a-b+c}$$

$$= \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{(a-b+c)} = c-a+b = b+c-a$$

گزینه ۹۹ ••

$$\frac{(2a^2-b)(2a^2+b)-b^2}{-2a^4+2b^2-2a^4}$$

$$= \frac{(2a^2)^2 - b^2 - b^2}{-4a^4+2b^2} = \frac{4a^4 - 2b^2}{-4a^4+2b^2} = -1$$

گزینه ۸۴ •• می‌دانیم $a+b+c=1$ و از طرفی $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ است، یعنی:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ac+ab}{abc} = 0 \Rightarrow ab+ac+bc=0$$

از طرفی $(a+b+c)^2 = 1^2$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 + 2(ab+ac+bc) = 1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 1$$

گزینه ۸۵ •• عبارت موجود در این سؤال را باید به وسیله دسته‌بندی و شکستن عدد ۱۴، به اتحادهایی که می‌شناسیم تبدیل کنیم:

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+14=0$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2+6z+9=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=0$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مجموع ۳ عبارت بزرگ‌تر یا مساوی صفر، برابر صفر شده است. پس هر کدام از آن‌ها برابر صفر می‌باشد.

$$\left. \begin{aligned} x-2=0 &\Rightarrow x=2 \\ y-1=0 &\Rightarrow y=1 \\ z+3=0 &\Rightarrow z=-3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=4+1+9=14$$

گزینه ۸۶ ••

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(\sqrt{2}+2)^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2+4\sqrt{2}+4}{2}$$

$$= \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2}$$

گزینه ۸۷ ••

$$x^2+y^2-2x+4y+5=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x-1=0 \\ y+2=0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x=1, y=-2 \Rightarrow 2x-y=2-(-2)=4$$

گزینه ۸۸ •• عبارت این سؤال را باید به وسیله دسته‌بندی، به عبارت‌هایی که می‌شناسیم، تبدیل کنیم.

$$2a^2+4b^2-4ab-2a+1=0$$

$$\Rightarrow a^2-4ab+4b^2+a^2-2a+1=0 \Rightarrow (a-2b)^2+(a-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a-2b=0 &\Rightarrow a=2b \\ a-1=0 &\Rightarrow a=1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow a+b=\frac{3}{2}$$

گزینه ۸۹ ••

$$950^2 - 900^2 - 50^2 = (900+50)^2 - 900^2 - 50^2$$

$$= 900^2 + 2 \times 900 \times 50 + 50^2 - 900^2 - 50^2$$

$$= 2 \times 900 \times 50 = 90000$$

گزینه ۹۰ ••

$$201^2 + 199^2 = (200+1)^2 + (200-1)^2 = 2 \times (200^2 + 1^2)$$

$$= 2(40000+1) = 80002$$

گزینه ۹۱ ••

$$9a^2+4b^2+c^2-12ab+6ac-4bc = (3a-2b+c)^2$$



ضرب کنیم تا به کمک اتحاد مزدوج آن را ساده کنیم.

$$a^{32} - (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{16}+b^{16}) = (a-b)a^{32} - \underbrace{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{16}+b^{16})}_{a^2-b^2} = \underbrace{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{16}+b^{16})}_{a^4-b^4} = \dots = \underbrace{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{16}+b^{16})}_{a^8-b^8} = \dots = \underbrace{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{16}+b^{16})}_{a^{16}-b^{16}}$$

همان‌طور که می‌بینید، با استفاده از اتحاد مزدوج پرانتزها ساده می‌شوند و در نهایت داریم:

$$(a-b)a^{32} - (a^{32} - b^{32}) = (a-b)a^{32} - a^{32} + b^{32}$$

حال به جای a و b مقادیرشان را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\underbrace{(61-60)}_1 61^{32} - 61^{32} + 60^{32} = 60^{32}$$

۱۰۷ گزینه ۱: از آن‌جایی که $y^2 - x^2 = 9 - 8 = 1$ است، کل عبارت را بدون این‌که مقدار آن تغییر کند، در $(y^2 - x^2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{(y^2 - x^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \dots (x^{256} + y^{256})}_{y^4 - x^4} - y^{512} = \underbrace{(y^2 - x^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \dots (x^{256} + y^{256})}_{y^8 - x^8} - y^{512} = \dots = \underbrace{(y^2 - x^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \dots (x^{256} + y^{256})}_{y^{16} - x^{16}} - y^{512}$$

مانند مثال قبل عبارت‌ها به ترتیب ساده می‌شوند و در نهایت داریم:

$$y^{512} - x^{512} - y^{512} = -x^{512} = (\sqrt{8})^{512} = -8^{256}$$

۱۰۸ گزینه ۲: ابتدا به وسیله ضرب پرانتزها از چپ به راست و با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$A = \underbrace{(x-1)(x+1)}_{x^2-1} \underbrace{(x^2+1)}_{x^4-1} \underbrace{(x^4+1)}_{x^8-1} \underbrace{(x^8+1)}_{x^{16}-1} = x^{16} - 1$$

حال به جای x ، عدد ۱۰ را قرار می‌دهیم.

حاصل برابر با $10^{16} - 1$ خواهد شد، که برابر $\underbrace{999999 \dots 9}_{16}$ است. حاصل جمع ارقام این عدد برابر $16 \times 9 = 144$ است.

۱۰۹ گزینه ۱: کافی است $(1-x^{16})$ را به وسیله اتحاد مزدوج تجزیه کنیم و دو طرف تساوی را برابر هم قرار دهیم.

$$\frac{(1-x^{16})}{A} = \frac{(1+x^{16})(1+x^8)(1+x^4)(1+x^2)(1+x)(1-x)}{A} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$$

حال کافی است دو طرف تساوی را با هم ساده کنیم:

$$\Rightarrow A = (1-x)$$

۱۰۰ گزینه ۲: اختلاف دو عدد 63^2 و 37^2 را می‌توانیم در قالب

اتحاد مزدوج نمایش دهیم؛ یعنی:

$$63^2 - 37^2 = (63-37)(63+37) = 26 \times 100 = 2600$$

۱۰۱ گزینه ۱: به وسیله اتحاد مزدوج مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1400 \times 101}{402^2 - 2^2} = \frac{1400 \times 101}{(402-2)(402+2)} = \frac{\cancel{14}00 \times \cancel{1}01}{\cancel{4}00 \times \cancel{4}04} = \frac{7}{8}$$

۱۰۲ گزینه ۱:

$$\frac{271^2 - 129^2}{542^2 - 258^2} = \frac{(271-129)(271+129)}{(542-258)(542+258)} = \frac{142 \times 400}{284 \times 800} = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

۱۰۳ گزینه ۱: عبارت داده‌شده در صورت سؤال را به شکل اتحاد مزدوج می‌نویسیم:

$$50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = \underbrace{(50-49)}_1 (50+49) + \underbrace{(48-47)}_1 (48+47) + \dots + \underbrace{(4-3)}_1 (4+3) + \underbrace{(2-1)}_1 (2+1) = 50 + 49 + 48 + 47 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$$

۱۰۴ گزینه ۲: برای این‌که حاصل ضرب داده‌شده در سؤال را بتوانیم

محاسبه کنیم، کافی است عبارت $(2-1) = 1$ را در A ضرب کنیم:

$$A = \underbrace{(2-1)(2+1)}_{2^2-1} (2^2+1) \dots (2^{128}+1)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، حاصل هر دو پرانتز، تشکیل یک اتحاد مزدوج را با پرانتز بعدی می‌دهد و در نهایت داریم:

$$(2^{128} - 1)(2^{128} + 1) = 2^{256} - 1$$

۱۰۵ گزینه ۱: برای پاسخ به این سؤال، کافی است مزدوج مخرج

هر کسر را در صورت و مخرج آن ضرب کنیم؛ بنابراین داریم:

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{255}+\sqrt{256}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{\sqrt{255}-\sqrt{256}}{(\sqrt{255}+\sqrt{256})(\sqrt{255}-\sqrt{256})} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{255}-\sqrt{256}}{-1} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{256}-\sqrt{255} = -1 + \sqrt{256} = -1 + 16 = 15$$

۱۰۶ گزینه ۲: از آن‌جایی که $(a-b) = 61 - 60 = 1$ است، پس

می‌توانیم کل عبارت را بدون آن‌که مقدار آن تغییر کند، در $(a-b)$

۱۱۶ گزینه ۳: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

پس برای این که $a^2 - b^2$ بر ۳ بخش پذیر باشد، باید حداقل یکی از عبارتهای $a - b$ یا $a + b$ بر ۳ بخش پذیر باشد.

$a - b$ در صورتی بر ۳ بخش پذیر است که باقی مانده a و b در تقسیم بر ۳ یکسان باشد، (باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۳، سه حالت دارد: ۰، ۱ و ۲)

$a + b$ در صورتی بر ۳ بخش پذیر است که باقی مانده یکی در تقسیم بر ۳، ۱ و باقی مانده دیگری، ۲، یا باقی مانده هر دو در تقسیم بر ۳ برابر صفر باشد.

پس در مجموع ۵ حالت $((0,0), (1,1), (2,2), (1,2), (2,1))$ از ۹ حالت ممکن، بر ۳ بخش پذیر است؛ بنابراین گزینه «۳» درست است.

۱۱۷ گزینه ۳: برای حل این سؤال از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$(a^2 + a + 1)(a^2 + a - 1) = (a^2 + a)^2 - 1^2$$

$$= a^4 + 2a^3 + a^2 - 1$$

۱۱۸ گزینه ۲: $4xy$ را به سمت چپ تساوی برده و از اتحاد

مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2 = 0$$

از آن جایی که یک عبارت همواره نامنفی برابر صفر شده است، نتیجه می‌گیریم مقدار آن برابر صفر است.

$$(x - 2y)^2 = 0 \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$$

$$x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y) = 0 \times (x + 2y) = 0$$

۱۱۹ گزینه ۱: برای پاسخ به این سؤال از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$(a + b + c)^2 - (-a + b + c)^2$$

$$= (a + b + c + (-a) + b + c)(a + b + c - (-a + b + c))$$

$$= (2b + 2c)(2a) = 4(b + c)(a)$$

۱۲۰ گزینه ۲: ابتدا به وسیله دسته‌بندی، قسمتی از عبارت را به

اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای تبدیل کرده، سپس به وسیله اتحاد مزدوج کل عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 y^2 - y^2 - 2xy + 1 = x^2 y^2 - 2xy + 1 - y^2$$

$$= (xy - 1)^2 - y^2 = (xy - 1 + y)(xy - 1 - y)$$

۱۲۱ گزینه ۲: ابتدا از دو جمله اول عبارت، m^2 را فاکتور می‌گیریم:

$$m^3 - 2m^2 - m + 2 = m^2(m - 2) - m + 2$$

$$= m^2(m - 2) - (m - 2)$$

حالا از هر یک از جمله‌ها عبارت $(m - 2)$ را فاکتور می‌گیریم و بعد از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$(m - 2)(m^2 - 1) = (m - 2)(m - 1)(m + 1)$$

۱۲۲ گزینه ۱: ابتدا به وسیله اتحاد مزدوج جمله آخر چندجمله‌ای

$$x^2 + a^2 x + (a - 1)(a + 1) = x^2 + a^2 x + a^2 - 1$$

۱۱۰ گزینه ۲: برای پاسخ دادن به این سؤال کافی است صورت

عبارت داده شده را با استفاده از اتحاد مزدوج ساده کنیم.

$$\frac{100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1}{1 + 2 + 3 + \dots + 100}$$

$$= \frac{(100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \dots}{1 + 2 + 3 + \dots + 100}$$

$$= \frac{100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1}{1 + 2 + 3 + \dots + 100} = 1$$

۱۱۱ گزینه ۳: ابتدا عبارت $a^2 b^2$ را از $a^2 b^2 + a^2 b^3$ فاکتور

$$a^2 b^2 + a^2 b^3 = a^2 b^2 (a + b)$$

می‌گیریم:

سپس مقدار a و b را در عبارت جای گذاری می‌کنیم:

$$a^2 b^2 (a + b) \frac{a = \sqrt{8} - \sqrt{9}}{b = \sqrt{8} + \sqrt{9}}$$

$$= (\sqrt{8} - \sqrt{9})^2 (\sqrt{8} + \sqrt{9})^2 (\sqrt{8} - \sqrt{9} + \sqrt{8} + \sqrt{9})$$

$$= (\sqrt{8}^2 - \sqrt{9}^2)^2 (2\sqrt{8}) = (8 - 9)^2 (2\sqrt{8}) = (-1)^2 2\sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{8}$$

۱۱۲ گزینه ۲: ابتدا به وسیله اتحاد مزدوج عبارت $p^2 - q^2$ را

تجزیه کرده، و سپس مقادیر p و q را در آن جای گذاری می‌کنیم:

$$p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$$

$$= (3^{1397} + 3^{-1397} + 3^{1397} - 3^{1397})$$

$$\times (3^{1397} + 3^{-1397} - 3^{1397} + 3^{-1397})$$

$$= (2 \times 3^{1397})(2 \times 3^{-1397}) = 4(3^{1397} \times 3^{-1397}) = 4 \times 3^0 = 4$$

۱۱۳ گزینه ۳: ابتدا باید عدد 2^2 را از $(6 + 2x)^2$ و 3^2 را از

$$(27 + 3x^2)^2$$
 فاکتور بگیریم، سپس به وسیله اتحاد مزدوج عبارت

داده شده را ساده کنیم.

$$(3 - x)^2 (27 + 3x^2)^2 (6 + 2x)^2$$

$$= (3 - x)^2 \times (27 + 3x^2)^2 \times 2^2 (3 + x)^2$$

$$= 2^2 (3^2 - x^2)^2 (27 + 3x^2)^2 = 2^2 \times (9 - x^2)^2 \times 3^2 (9 + x^2)^2$$

$$= 4 \times 9 (81 - x^4)^2 = 36 (81 - x^4)^2$$

۱۱۴ گزینه ۲: عبارت داده شده را به وسیله دسته‌بندی تجزیه می‌کنیم:

$$a^2 - b^2 - 4b - 4 = a^2 - (b^2 + 4b + 4) = a^2 - (b + 2)^2$$

$$= (a - (b + 2))(a + (b + 2)) = (a - b - 2)(a + b + 2)$$

۱۱۵ گزینه ۲: ابتدا به وسیله اتحاد مربع سه جمله‌ای قسمت

راست عبارت را تجزیه کرده، سپس از اتحاد مزدوج برای تجزیه آن

استفاده می‌کنیم.

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 1 = (a + b + c)^2 - 1$$

$$= (a + b + c - 1)(a + b + c + 1)$$



$$\Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

همان‌طور که می‌بینید اگر α و β را به جای x قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد بود.

گزینه ۱۳۰ :: برای تجزیه این عبارت از اتحاد چاق و لاغر که در درس‌نامه توضیح داده شد، استفاده می‌کنیم:

$$a^{12} - 1 = (a^4)^3 - 1^3 = (a^4 - 1)(a^4 + a^4 + 1)$$

$$= (a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + a^4 + 1)$$

$$= (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + a^4 + 1)$$

گزینه ۱۳۱ :: برای پاسخ به این سؤال از اتحاد جمله‌مشترب استفاده می‌کنیم:

$$a^6 - 7a^3 - 8 = (a^3 - 8)(a^3 + 1)$$

سپس به وسیله اتحاد چاق و لاغر عبارت به دست آمده را دوباره تجزیه می‌کنیم:

$$(a^3 - 8)(a^3 + 1) = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)(a + 1)(a^2 - a + 1)$$

می‌بینیم که عبارت فوق بر هر ۳ گزینه اول بخش‌پذیر است.

گزینه ۱۳۲ :: می‌دانیم $x + y = 7$ و $xy = 5$ است. بنابراین با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توانیم $x^2 + y^2$ را بیابیم، اما ابتدا باید $x^2 + y^2$ را حساب کنیم:

$$x + y = 7 \Rightarrow (x + y)^2 = 7^2 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 49$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 49 - 2xy = 39$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (7)(39 - 5)$$

$$= 7 \times 34 = 238$$

گزینه ۱۳۳ :: با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$3\sqrt{3}x^3 - 1 = (\sqrt{3}x)^3 - 1^3 = (\sqrt{3}x - 1)(3x^2 + \sqrt{3}x + 1)$$

حال عبارت به دست آمده را به جای مخرج قرار می‌دهیم:

$$\frac{(\sqrt{3}x - 1)(3x^2 + \sqrt{3}x + 1)}{(\sqrt{3}x - 1)(3x^2 + \sqrt{3}x + 1)} = 1$$

گزینه ۱۳۴ :: با کمی دقت در صورت سؤال متوجه می‌شویم که

$$a^2 - ab + b^2 = 0 \text{ است. این عبارت قسمت دوم اتحاد چاق و لاغر}$$

$$\text{است؛ بنابراین داریم: } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 0$$

$$\text{حال داریم: } (a + b)(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) \dots (a^{1397} + b^{1397}) = 0$$

گزینه ۱۳۵ :: ابتدا به وسیله اتحاد مزدوج دو پرانتز اول را

ساده می‌کنیم؛ سپس با کمک اتحاد چاق و لاغر عبارت نهایی را به دست می‌آوریم.

$$(a - 2)(a + 2)(a^4 + 4a^2 + 16)$$

$$= (a^2 - 4)(a^4 + 4a^2 + 16) = (a^2)^3 - 4^3 = a^6 - 64$$

گزینه ۱۳۶ :: ابتدا عبارت $a^3 + b^3 = 2$ را به شکل اتحاد چاق

و لاغر درمی‌آوریم:

$$a^3 + b^3 = 2 \Rightarrow a^3 + b^3 - 2 = (a^3 - 1) + (b^3 - 1) = 0$$

حال با دسته‌بندی، عبارت باقی‌مانده را تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 + a^2x + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a^2x + a^2$$

$$= (x + 1)(x - 1) + a^2(x + 1)$$

در نهایت از $(x + 1)$ فاکتور می‌گیریم:

$$(x + 1)(x - 1) + a^2(x + 1) = (x + 1)(x - 1 + a^2)$$

گزینه ۱۲۳ :: برای پاسخ به این سؤال ابتدا $(\sqrt{4} - \sqrt{5})^2$ را

به $(\sqrt{4} - \sqrt{5})(\sqrt{4} - \sqrt{5})^9$ تبدیل می‌کنیم:

$$(\sqrt{4} - \sqrt{5})(\sqrt{4} - \sqrt{5})^9(\sqrt{4} + \sqrt{5})^9$$

$$= (\sqrt{4} - \sqrt{5})(\sqrt{4}^2 - \sqrt{5}^2)^9 = (\sqrt{4} - \sqrt{5})(4 - 5)^9$$

$$= (\sqrt{4} - \sqrt{5})(-1)^9 = -(\sqrt{4} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - \sqrt{4}$$

گزینه ۱۲۴ :: اگر $a = 1$ و $b = \frac{1}{777777}$ در نظر بگیریم، عبارت

موجود در سؤال به شکل زیر درمی‌آید:

$$1 \frac{1}{777777} \times \frac{777776}{777777} + \left(\frac{1}{777777}\right)^2 = (a + b) \times (a - b) + b^2$$

$$= a^2 - b^2 + b^2 = a^2$$

از آنجایی که $a = 1$ است، پس $a^2 = 1$ می‌شود.

گزینه ۱۲۵ :: 9997×10003 را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$9997 \times 10003 = (10000 - 3)(10000 + 3) = 10000^2 - 3^2$$

$$= 100000000 - 9 = 99999991$$

مجموع ارقام عدد به دست آمده برابر است با: $7 \times 9 + 1 = 63 + 1 = 64$

گزینه ۱۲۶ :: برای تجزیه عبارت داده‌شده از اتحاد جمله‌مشترب

کمک می‌گیریم:

$$x^4 - x^2 - 12 = (x^2 - 4)(x^2 + 3) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 3)$$

گزینه ۱۲۷ :: برای پاسخ به این سؤال از اتحاد جمله‌مشترب و

روش A که در درس‌نامه توضیح داده شد، استفاده می‌کنیم:

$$A = 2x^2 - x - 3 \Rightarrow 2A = 4x^2 - 2x - 6$$

$$\Rightarrow 2A = (2x - 3)(2x + 2) \Rightarrow 2A = (2x - 3) \times 2 \times (x + 1)$$

$$\Rightarrow A = (2x - 3)(x + 1)$$

نکته :: برای پاسخ به این سؤال می‌توانستیم حاصل هر گزینه

را به دست آوریم و با صورت سؤال تطبیق دهیم.

گزینه ۱۲۸ :: برای پاسخ به این سؤال از اتحاد جمله‌مشترب

استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که جمله‌مشترب $(x^2 + 4x + 2)$ است.

$$(x^2 + 4x + 2)^2 + 3(x^2 + 4x + 2) + 2$$

$$= ((x^2 + 4x + 2) + 1)((x^2 + 4x + 2) + 2)$$

$$= (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 4) = (x + 3)(x + 1)(x + 2)^2$$

گزینه ۱۲۹ :: اگر در گزینه (۲) به جای a ، از $\alpha + \beta$ و به جای b ،

از $\alpha\beta$ استفاده کنیم، به کمک اتحاد جمله‌مشترب خواهیم داشت:

$$x^2 - ax + b = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$



۱۴۳ گزینه $\bullet\bullet$ با آوردن مثال نقض، به پاسخ این سؤال می‌رسیم.

گزینه (۱): اگر $a = -2$ و $b = 1$ باشد، $a^2 > b^2$ می‌شود، اما $a > b$ برقرار نیست.

گزینه (۲): اگر $a = -2$ و $b = 1$ در نظر گرفته شود، $a^2 > b^2$ است، اما $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ نیست.

گزینه (۳): اگر $a = -2$ و $b = -1$ باشد، $a^2 > b^2$ است، اما $a - b < a + b$ برقرار نیست.

بنابراین هیچ‌کدام از گزینه‌ها درست نیستند.

۱۴۴ گزینه $\bullet\bullet$ از آنجایی که $a^2 b < 0$ می‌باشد و a^2 عبارتی نامنفی است، بنابراین $b < 0$ است. از طرفی $bc > 0$ می‌باشد، یعنی b و c هم‌علامت‌اند. نتیجه می‌گیریم $c < 0$ است.

۱۴۵ گزینه \bullet از آنجایی که عبارت‌هایی که از زیر رادیکال با فرجه ۲ خارج می‌شوند، نامنفی هستند، بنابراین ضرب دو عبارت زمانی کوچک‌تر از صفر است که $a < 0$ باشد. همچنین چون $a^2 b$ عبارتی مثبت است، بنابراین $b > 0$ است. حال داریم:

(الف) $ab < 0$ (ب) راجع به علامت bc نمی‌توان صحبت کرد، زیرا

$$\frac{b^2}{c^2 a} < 0 \quad (\text{پ}) \quad \frac{a}{b^2} < 0 \quad (\text{ت})$$

بنابراین تنها عبارت (پ) حتماً درست است.

۱۴۶ گزینه $\bullet\bullet$ با استفاده از قوانین نامساوی‌ها به حل نامعادله مطرح‌شده در سؤال می‌پردازیم: $3x - 1 < 8 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3$ به یاد داریم مجموعه اعداد طبیعی به صورت $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ است؛ بنابراین اعداد ۱ و ۲ می‌توانند در نامعادله بالا قرار گیرند. مجموع این اعداد برابر $1 + 2 = 3$ است.

۱۴۷ گزینه $\bullet\bullet$ با استفاده از قوانین نامساوی‌ها، نامعادله مسئله را ساده می‌کنیم:

$$3x - 7 \leq 5x - 3 \Rightarrow -7 + 3 \leq 5x - 3x \Rightarrow -4 \leq 2x \Rightarrow -2 \leq x$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید کوچک‌ترین عدد صحیحی که می‌تواند در نامعادله قرار گیرد، عدد -2 است.

۱۴۸ گزینه $\bullet\bullet$ برای این که مخرج‌های دو طرف نامعادله از بین بروند، طرفین نامعادله را در عدد ۶ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{3x-1}{2} < \frac{-2x+1}{3} \xrightarrow{\times 6 \text{ طرفین}} 9x - 3 < -4x + 2$$

$$\Rightarrow 9x + 4x < 2 + 3 \Rightarrow 13x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{13}$$

۱۴۹ گزینه $\bullet\bullet$ برای این که مخرج‌های دو طرف نامعادله از بین بروند، طرفین نامعادله را در عدد ۶ ضرب می‌کنیم:

$$1 - \frac{x-1}{2} \leq \frac{x+1}{3} \xrightarrow{\times 6 \text{ طرفین}} 6 - 3x - 3 \leq 2x + 2$$

$$\Rightarrow 6 - 3 - 2 \leq 2x + 3x \Rightarrow 1 \leq 5x \Rightarrow \frac{1}{5} \leq x$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب نامعادله: } \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \leq x\}$$

$$(a-1)(a^2+a+1) + (b-1)(b^2+b+1) = 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a^2+a+1) = -(b-1)(b^2+b+1)$$

$$\Rightarrow \frac{b^2+b+1}{a^2+a+1} = -\frac{a-1}{b-1}$$

۱۳۷ گزینه $\bullet\bullet$ هدف از این سؤال استفاده از عبارت‌های جبری

در حل معادله‌ها است. اگر سن فعلی پسر را x در نظر بگیریم، سن ۶ سال قبل او برابر با $x - 6$ می‌شود. حال با استفاده از اطلاعات مسئله، معادله سن پسر را تشکیل می‌دهیم:

$$2x - 3(x - 6) = x \Rightarrow 2x - 3x + 18 = x$$

$$\Rightarrow -x + 18 = x \Rightarrow 18 = 2x \Rightarrow x = 9$$

۱۳۸ گزینه $\bullet\bullet$ اگر دو عدد فرد متوالی را $(x-1)$ و $(x+1)$

در نظر بگیریم، می‌توانیم در پاسخ به این سؤال از اتحاد مزدوج

$$\text{استفاده کنیم: } (x-1)(x+1) = 323 \Rightarrow x^2 - 1 = 323$$

$$\Rightarrow x^2 = 323 + 1 = 324 \Rightarrow x = \sqrt{324} = 18$$

$$\Rightarrow x - 1 = 17 \Rightarrow 17 + 19 = 36 \Rightarrow x + 1 = 19$$

۱۳۹ گزینه $\bullet\bullet$ اگر عدد موردنظر را x در نظر بگیریم، آن‌گاه

نصف آن برابر $\frac{x}{2}$ و ثلث آن برابر $\frac{x}{3}$ است. حال با توجه به اطلاعات

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 15 \Rightarrow \frac{x}{6} = 15 \Rightarrow x = 90$$

مسئله داریم:

۱۴۰ گزینه \bullet عدد موردنظر را x در نظر می‌گیریم، بنابراین مجذور آن برابر است با x^2 ؛ حال داریم:

$$4x^2 - 9 = 6x + 9 \Rightarrow 4x^2 - 6x - 18 = 0$$

حال از اتحاد جمله‌مشتک برای تجزیه عبارت استفاده می‌کنیم:

$$4x^2 - 6x - 18 = (2x - 6)(2x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

از آنجایی که در صورت سؤال گفته شده عدد موردنظر عضو مجموعه اعداد طبیعی است، تنها $x = 3$ قابل قبول است.

۱۴۱ گزینه \bullet برای پاسخ به این سؤال کافی است دو عدد دلخواه

a و b را به گونه‌ای انتخاب کنید که شرط $a < b < 0$ در مورد آن‌ها برقرار باشد. به عنوان نمونه می‌توانیم $a = -2$ و $b = -1$ را قرار دهیم. خواهیم دید که فقط گزینه «۱» درست است.

۱۴۲ گزینه $\bullet\bullet$ اگر $a, c < 0$ و $b > 0$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\text{الف) } a^2 > 0, b > 0, c < 0 \Rightarrow a^2 bc < 0 \quad \checkmark$$

$$\text{ب) } a^2 > 0, b > 0 \Rightarrow \frac{a^2}{b} > 0 \Rightarrow -\frac{a^2}{b} < 0 \quad \times$$

$$\text{پ) } b > 0 \Rightarrow b^2 > 0, a < 0, c < 0 \Rightarrow c^2 > 0 \Rightarrow \frac{b^2 a}{c^2} < 0 \quad \times$$

در نتیجه تنها رابطه (الف) به درستی نوشته شده است.

$$\Rightarrow x < \frac{22}{7}$$

$$\frac{5}{7} < \frac{x+4}{5} \xrightarrow{\text{طرفین } \times 25} 25 < 7x+28 \Rightarrow -3 < 7x$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{7} < x \Rightarrow -\frac{3}{7} < x < \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$$

اعداد صحیحی که در این بازه قرار می‌گیرند، عبارت‌اند از: ۰، ۱، ۲ و ۳.

گزینه ۱۵۵ :: ابتدا نامعادله داده شده را براساس a و b می‌نویسیم:

$$a \leq 2x+3 \leq b \Rightarrow a-3 \leq 2x \leq b-3$$

$$\Rightarrow \frac{a-3}{2} \leq x \leq \frac{b-3}{2}$$

از آن جایی که تفاضل $\frac{a-3}{2}$ و $\frac{b-3}{2}$ برابر ۱۰ است، داریم:

$$\frac{b-3}{2} - \frac{a-3}{2} = 10 \Rightarrow b-3-a+3=20 \Rightarrow b-a=20$$

گزینه ۱۵۶ :: ابتدا به وسیله اتحاد مربع دو جمله‌ای عبارت را

$$(x+2)^2 - (x-1)^2 > 4(2x-1) \quad \text{ساده می‌کنیم:}$$

$$\Rightarrow \underline{x^2} + \underline{4x} + \underline{4} - \underline{x^2} + \underline{2x} - \underline{1} > \underline{8x} - \underline{4}$$

$$\Rightarrow 6x+3 > 8x-4 \Rightarrow 3+4 > 8x-6x$$

$$\Rightarrow 7 > 2x \Rightarrow x < \frac{7}{2}$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت $\{x | x \in \mathbb{R}, x < \frac{7}{2}\}$ است.

گزینه ۱۵۷ :: مانند تست قبل ابتدا پرانتزها را ساده می‌کنیم:

$$2x(x-3) - x^2 + 3 < x(x-1) - 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x - x^2 + 3 < x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow \underline{2x^2} - \underline{6x} - \underline{x^2} - \underline{x^2} + \underline{x} < \underline{-2} - \underline{3} \Rightarrow -5x < -5$$

$$\Rightarrow x > 1$$

گزینه ۱۵۸ :: برای حل دستگاه نامعادله‌ها، کافی است هر کدام

از نامعادله‌ها را جداگانه حل کرده، سپس اشتراک مجموعه جواب‌های

$$\begin{cases} x+3 > 2x-5 \\ 5x-3 > x+9 \end{cases} \quad \text{به دست آمده را محاسبه کنیم.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3 > 2x-5 \Rightarrow 3+5 > 2x-x \Rightarrow x < 8 \quad (1) \\ 5x-3 > x+9 \Rightarrow 5x-x > 9+3 \Rightarrow 4x > 12 \\ \Rightarrow x > 3 \quad (2) \end{cases}$$

حال اشتراک (۱) و (۲) را محاسبه می‌کنیم: $(1) \cap (2) = 3 < x < 8$

گزینه ۱۵۰ :: نصف عدد x برابر $\frac{x}{2}$ و سه برابر عدد y برابر $3y$

است. مجموع این دو جمله‌ای را به صورت $\frac{x}{2} + 3y$ نمایش

می‌دهیم و می‌دانیم حداکثر این مجموع برابر -2 است؛ بنابراین:

$$\frac{x}{2} + 3y \leq -2$$

گزینه ۱۵۱ :: از آن جایی که می‌دانیم $x > 1$ جواب نامعادله است،

به حل نامعادله می‌پردازیم و مجموعه جواب به دست آمده را با $x > 1$

مقایسه می‌کنیم:

$$3x + \frac{x-4}{4} > \frac{1}{4}x + a \xrightarrow{\text{طرفین } \times 4} 12x + x - 4 > x + 4a$$

$$\Rightarrow 12x > 4 + 4a \Rightarrow 3x > 1 + a \Rightarrow x > \frac{1+a}{3}$$

از آن جا که جواب نامعادله به صورت $x > 1$ است، داریم:

$$\frac{1+a}{3} = 1 \Rightarrow 1+a=3 \Rightarrow a=2$$

گزینه ۱۵۲ :: ابتدا طرفین نامعادله را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$-1 < \frac{3x-1}{2} < 3 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 2} -2 < 3x-1 < 6$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین } +1} -1 < 3x < 7$$

در انتها کل نامعادله را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$-1 < 3x < 7 \xrightarrow{\text{طرفین } \div 3} -\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$$

گزینه ۱۵۳ :: از نامعادله $3 < x < 6$ استفاده می‌کنیم تا نامعادله

$$a < \frac{1}{x-1} < b \quad \text{را بسازیم:}$$

$$3 < x < 6 \xrightarrow{\text{طرفین } -10} 3-10 < x-10 < 6-10$$

$$\Rightarrow -7 < x-10 < -4$$

حال کافی است عبارت موجود را معکوس کنیم:

$$-7 < x-10 < -4 \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{1}{4} < \frac{1}{x-10} < -\frac{1}{7}$$

$$a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{7} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{7}} = \frac{7}{4} \quad \text{نتیجه می‌گیریم:}$$

گزینه ۱۵۴ :: نامعادله مسئله را به دو نامعادله مجزا تبدیل کرده،

سپس اشتراک جواب‌های دو نامعادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x-1}{3} < \frac{5}{7} \xrightarrow{\text{طرفین } \times 21} 7x-7 < 15 \Rightarrow 7x < 22$$

