فصل هشتم

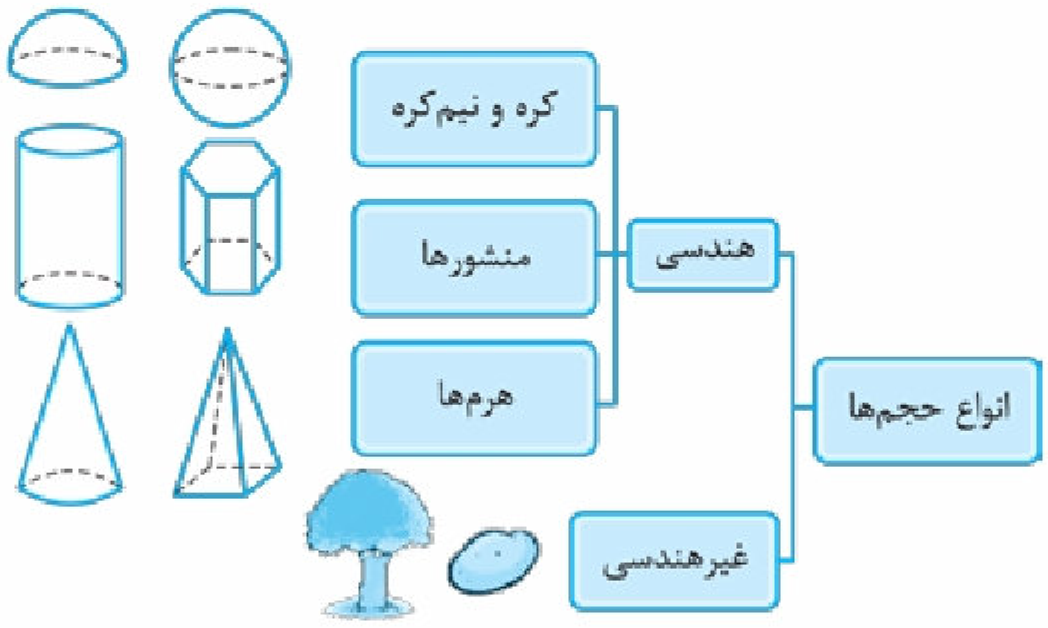
حجم و مساحت

درس اول: حجم و مساحت کره

در سال هفتم یاد گرفتیم که حجم‌ها به دو دستهٔ **هندسی** و **غیرهندسی** تقسیم می‌شوند. حجم‌های هندسی، حجم‌هایی هستند که شکل **مشخص** و **تعریف‌شده** دارند. یعنی این حجم‌ها دارای **نظم خاصی** هستند که می‌توانیم برای آن‌ها تعریف دقیق ارائه دهیم و اندازهٔ حجم آن‌ها را محاسبه کنیم.

کره‌ها، **هرم‌ها** و **منشورها**، همگی حجم‌های هندسی به شمار می‌آیند.

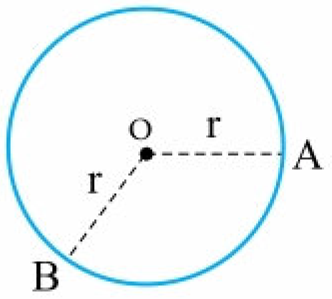
اما دستهٔ دیگر حجم‌ها، حجم‌های غیرهندسی هستند. هر حجمی که در دنیای اطراف خود می‌بینید و نظم مشخصی **ندارد**، حجم غیرهندسی است (مانند حجم یک سیب‌زمینی یا یک درخت).



در این فصل می‌خواهیم با تعریف و یادآوری مطالب مربوط به هر یک از حجم‌های هندسی، به محاسبهٔ اندازهٔ حجم و مساحت آن‌ها بپردازیم.

کره

برای بیان تعریف کره، بهتر است ابتدا به تعریف دقیق دایره بپردازیم. همان‌طور که در دایرهٔ شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید، این دایره از نقطه‌هایی تشکیل شده است که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ مشخص به نام O، ثابت و برابر r است. به عبارت دیگر اگر A و B، دو نقطهٔ دلخواه روی دایره باشند، آن‌گاه داریم: $OA = OB = r$. به نقطهٔ O **مرکز دایره** و به r **شعاع دایره** می‌گوییم.

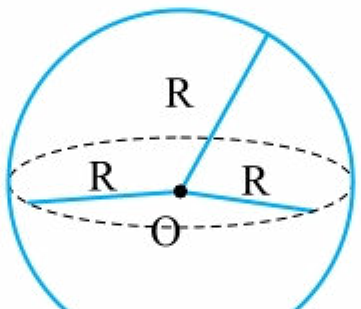


تعریف دایره

به مجموعهٔ همهٔ نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام **مرکز**، **ثابت** و **مشخص** است، **دایره** می‌گوییم. فاصلهٔ هر یک از این نقاط تا مرکز دایره، **شعاع** نام دارد.

$S_{\text{دایره}} = \pi r^2 \quad , \quad P_{\text{دایره}} = 2\pi r$

حالا با توجه به تعریف دایره، می‌توانیم کره را تعریف کنیم. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، کره هم مجموعهٔ نقاطی شبیه دایره است. با این تفاوت که دایره مجموعهٔ همهٔ نقاطی از یک **صفحه** است که فاصلهٔ آن از نقطه‌ای به نام مرکز، ثابت است، اما کره مجموعهٔ همهٔ نقاطی از **فضا** است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای به نام مرکز، ثابت و مشخص است. در شکل روبه‌رو به R، **شعاع کره** می‌گوییم.



تعریف کره:

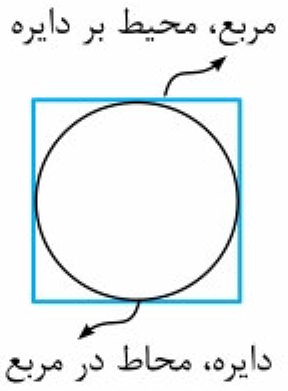
به مجموعهٔ همهٔ نقاطی از فضا که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطه در فضا به نام **مرکز**، **ثابت** و **مشخص** است، **کره** می‌گوییم. فاصلهٔ هر یک از این نقاط تا مرکز کره هم **شعاع** نام دارد.

آقا اجازه! می‌تونیم بگیم تعریف کره، همون تعریف دایره است که ۳ بعدی شده؟

بله، کاملاً درسته. دایره در فضای دوبعدی یا همون صفحه تعریف می‌شه، ولی کره در فضای ۳بعدی یا همون 3D خودمون!

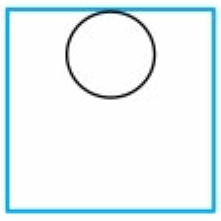
محیط بودن بر و محاط شدن در

به شکل روبه‌رو نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید، دایره درون مربع قرار دارد و به هر چهار ضلع مربع مماس شده است. در این حالت می‌گوییم **دایره، محاط در مربع شده است** و **مربع محیط بر دایره است**. (*یعنی مربع دور تا دور محیط دایره رو پوشونده! پس محیط بر اونه!*)

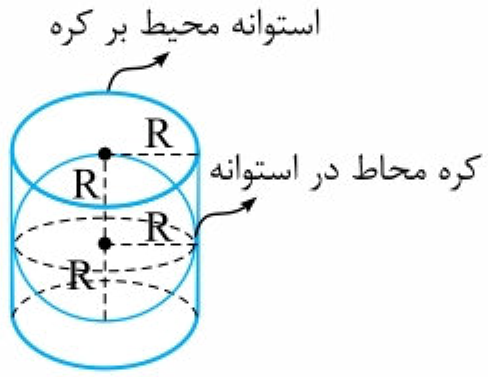


آقا اجازه! شکل محاط‌شده، حتماً باید بر همهٔ اضلاع شکل محیط‌شده، مماس باشه؟!

بله بچه‌ها! این خیلی نکتهٔ مهمیه. مثلاً تو شکل روبه‌رو دایره در مربع محاط نیست. هم‌چنین مربع هم بر دایره محیط نیستش!

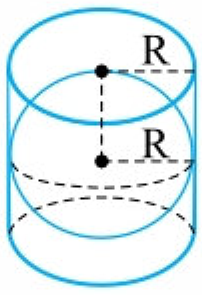


تا این‌جای کار مفهوم محاط و محیط را در فضای صفحه (*همون ۲بعدی خودمون*) یاد گرفتیم. اما به راحتی می‌توانیم این مفاهیم را در قالب فضای ۳بعدی تعریف کنیم. به شکل روبه‌رو دقت کنید. همان‌طور که می‌بینید کره‌ای به شعاع R، به طور کامل درون استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ R و ارتفاع ۲R قرار گرفته است و این کره بر تمام اجزای استوانه مماس است. در این حالت می‌گوییم **کره محاط در استوانه و استوانه محیط بر کره است.**



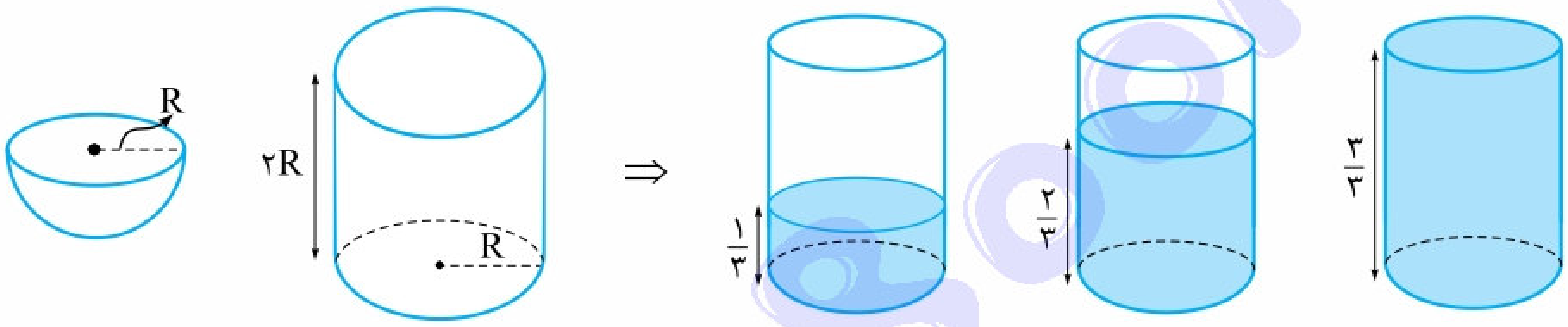
حجم کره

با توجه به مطالب بالا می‌خواهیم به وسیلهٔ انجام یک آزمایش حجم یک کره را محاسبه کنیم. فرض کنید کره‌ای به شعاع R، درون استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ R محاط شده است، بنابراین ارتفاع این استوانه برابر ۲R است و حجم آن از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید: ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه



$$V=S\times h=\pi R^{۲}\times ۲R=۲\pi R^{۳}$$

حالا کرهٔ درون استوانه را به ۲ نیم‌کره تقسیم می‌کنیم و هر بار به اندازهٔ حجم نیم‌کره آب درون استوانه می‌ریزیم.



همان‌طور که می‌بینید با ۳ بار ریختن آب به اندازهٔ حجم نیم‌کره، حجم استوانه پر می‌شود. از یک طرف می‌دانیم حجم نیم‌کره، برابر نصف حجم کره است و از طرف دیگر نیز می‌دانیم حجم استوانه برابر $۲\pi R^{۳}$ است. بنابراین داریم:

$$۳\times\text{حجم نیم‌کره}=۳\times\frac{\text{حجم کره}}{۲}=\text{حجم استوانه}\Rightarrow\frac{۳V_{\text{کره}}}{۲}=V_{\text{استوانه}}\Rightarrow\frac{۳V_{\text{کره}}}{۲}=۲\pi R^{۳}\Rightarrow V_{\text{کره}}=۲\pi R^{۳}\times\frac{۲}{۳}\Rightarrow V_{\text{کره}}=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$$

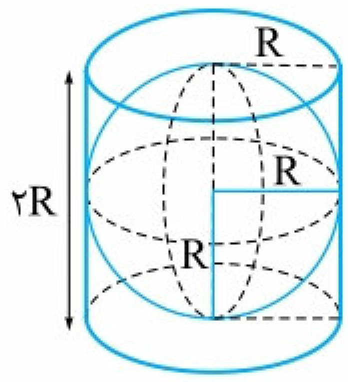
مثال **حجم کره‌ای به شعاع ۳۰ سانتی‌متر را به دست آورید.**

پاسخ با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ حجم کره داریم:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\xrightarrow{R=۳۰}\frac{۴}{۳}\times\pi\times۳۰^{۳}=\frac{۴}{\cancel{۳}_{۱}}\times\pi\times\cancel{۲۷۰۰۰}^{۹۰۰۰}=۳۶۰۰۰\,cm^{۳}$$

مثال **حجم استوانه، چند برابر حجم کره‌ای است که در استوانه محاط شده است؟**

پاسخ شکل روبه‌رو، کره‌ای به شعاع دلخواه R را نشان می‌دهد که در استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع ۲R محاط شده است. با توجه به این اطلاعات، حجم استوانه و کره را محاسبه می‌کنیم:



$$V_{\text{استوانه}}=\pi R^{۲}h\xrightarrow{h=۲R}V_{\text{استوانه}}=\pi R^{۲}\times۲R=۲\pi R^{۳}$$

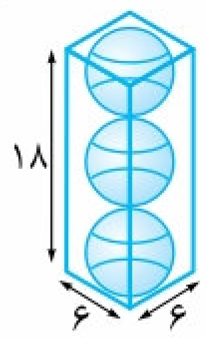
$$V_{\text{کره}}=\frac{۳}{۴}\pi R^{۳}$$

حالا می‌توانیم به راحتی نسبت حجم استوانه به حجم کره را محاسبه کنیم:

$$\frac{V_{\text{استوانه}}}{V_{\text{کره}}}=\frac{\cancel{۲}^{۱}\,\cancel{\pi}^{۱}\,\cancel{R^{۳}}^{۱}}{\frac{\cancel{۴}^{۲}}{۳}\,\cancel{\pi}_{۱}\,\cancel{R^{۳}}_{۱}}=\frac{۳}{۲}$$

از آن‌جایی که این شکل به ازای شعاع دلخواه R رسم شده است، بنابراین همواره این نسبت ثابت و برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

مثال **در شکل روبه‌رو ۳ توپ تنیس به شعاع ۳ سانتی‌متر درون مکعب‌مستطیلی با ابعاد مشخص‌شده روی شکل، قرار گرفته‌اند. حجم فضای خالی مکعب‌مستطیل چه‌قدر است؟ (π را برابر ۳ در نظر بگیرید.)**



پاسخ برای به دست آوردن حجم خالی مکعب‌مستطیل باید حجم سه توپ تنیس را محاسبه و از حجم مکعب‌مستطیل کم کنیم تا حجم فضای خالی آن به دست بیاید، بنابراین داریم:

$$V_{\text{توپ تنیس}}=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\xrightarrow{R=۳\,cm}V_{\text{توپ تنیس}}=\frac{۴}{\cancel{۳}_{۱}}\times\cancel{۳}^{۱}\times ۳^{۳}=۴\times ۲۷=۱۰۸\ cm^{۳}$$

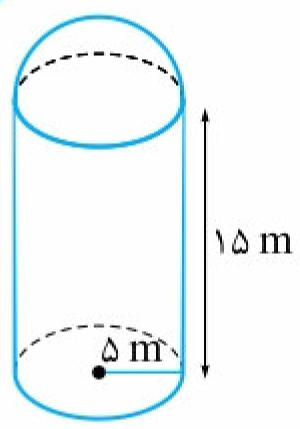
بنابراین حجم ۳ توپ تنیس برابر با $۳\times ۱۰۸=۳۲۴\ cm^{۳}$ است. حالا باید حجم مکعب‌مستطیل را محاسبه کنیم:

$$\text{حجم مکعب‌مستطیل}=\text{طول}\times\text{عرض}\times\text{ارتفاع}=۶\times ۶\times ۱۸=۶۴۸\ cm^{۳}$$

بنابراین حجم فضای خالی مکعب‌مستطیل برابر است با:

$$V_{\text{فضای خالی}}=۶۴۸-۳۲۴=۳۲۴\ cm^{۳}$$

مثال **حجم شکل روبه‌رو را به دست آورید. (π را ۳ در نظر بگیرید.)**



پاسخ این حجم، از اتصال یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۵ متر و یک نیم‌کره با همین شعاع درست شده است، بنابراین برای محاسبهٔ حجم این شکل باید حجم دو قسمت تشکیل‌دهندهٔ آن را به طور جداگانه محاسبه کنیم و سپس آن‌ها را با هم جمع کنیم.

$$V_{\text{نیم‌کره}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۱}{\cancel{۲}}\times\frac{\cancel{۴}^{۲}}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}^{۱}\times ۵^{۳}=۲\times ۱۲۵=۲۵۰\ m^{۳}$$

$$V_{\text{استوانه}}=\pi R^{۲}h=۳\times ۵^{۲}\times ۱۵=۱۱۲۵\ m^{۳}$$

حالا کافیست مجموع دو حجم به دست آمده را محاسبه کنیم:

$$V_{\text{کل}}=V_{\text{استوانه}}+V_{\text{نیم‌کره}}=۱۱۲۵+۲۵۰=۱۳۷۵\ m^{۳}$$

آقا اجازه! تو مثال قبل تونستیم حجم یک شکلی که نه کروی بود، نه هرمی و منشوری رو محاسبه کنیم. این حجم هندسی محسوب می‌شه یا غیرهندسی؟

آفرین! سؤال خیلی خوبیه! بچه‌ها، حجم‌هایی که از ترکیب ۲ یا چند حجم هندسی به دست میان، حجم هندسی محسوب می‌شن!

نکته حجم‌های به دست آمده از ترکیب دو یا چند حجم هندسی، **حجم هندسی به حساب می‌آیند** و می‌توان حجم و مساحت آن‌ها را محاسبه کرد.

مساحت کره

مساحت رویهٔ کره‌ای به شعاع R از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید: $S_{\text{کره}}=۴\pi R^{۲}$

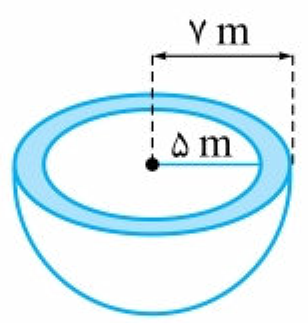
برای بررسی درستی رابطهٔ مساحت کره، کافیست کره‌ای به شعاع R بسازیم و با ۴ دایره به شعاع R روی آن را بپوشانیم.

مثال **مساحت رویهٔ کره‌ای به شعاع ۴ متر را به دست آورید. (π را برابر ۳ در نظر بگیرید.)**

پاسخ با توجه به رابطهٔ بیان‌شده برای محاسبهٔ مساحت رویهٔ کره داریم:

$$S=۴\pi R^{۲}\xrightarrow{R=۴}S=۴\times ۳\times ۴^{۲}=۱۹۲\ m^{۲}$$

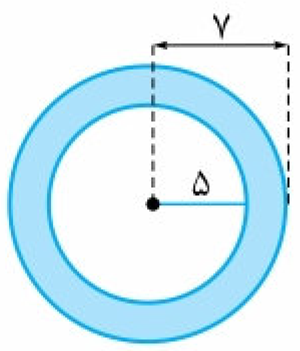
مثال **مطابق شکل روبه‌رو، ظرفی به شکل نیم‌کره داریم که شعاع بیرونی آن ۷ و شعاع درونی آن ۵ متر است. مساحت کل (درون و بیرون) این ظرف چه‌قدر است؟ (π را برابر ۳ در نظر بگیرید.)**



پاسخ مساحت این شکل از سه قسمت، رویهٔ بیرونی نیم‌کره (به شعاع ۷ متر)، رویهٔ درونی نیم‌کره (به شعاع ۵ متر) و لبهٔ ظرف (قسمت رنگی) تشکیل شده است، بنابراین باید اندازهٔ هر یک از این سطح‌ها را به طور جداگانه محاسبه و با هم جمع کنیم:

مساحت نیم‌کرهٔ بیرونی: $S_{\text{نیم‌کرهٔ بیرونی}}=\frac{۱}{۲}\times ۴\pi R^{۲}\xrightarrow{R=۷}\frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}}\times\cancel{۴}^{۲}\times ۳\times ۷^{۲}=۲۹۴\ m^{۲}$

مساحت نیم‌کرهٔ درونی: $S_{\text{نیم‌کرهٔ درونی}}=\frac{۱}{۲}\times ۴\pi R^{۲}\xrightarrow{R=۵}\frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}}\times\cancel{۴}^{۲}\times ۳\times ۵^{۲}=۱۵۰\ m^{۲}$



برای به دست آوردن مساحت لبهٔ ظرف بهتر است به تصویر شکل از بالا توجه کنیم. همان‌طور که می‌بینید، مساحت قسمت رنگی از تفاضل مساحت دو دایره به شعاع‌های ۷ متر و ۵ متر به دست می‌آید.

$$\text{مساحت لبهٔ رنگی}=S_{\text{دایره به شعاع ۷}}-S_{\text{دایره به شعاع ۵}}=\pi\times ۷^{۲}-\pi\times ۵^{۲}=۳\times ۴۹-۳\times ۲۵=۷۲\ m^{۲}$$

بنابراین مساحت کل برابر است با:

$$S_{\text{نیم‌کرهٔ بیرونی}}+S_{\text{نیم‌کرهٔ درونی}}+S_{\text{لبهٔ رنگی}}=۲۹۴+۱۵۰+۷۲=۵۱۶\ m^{۲}$$

پرسش‌های تشریحی

۱ به سؤالات زیر پاسخ دهید. (با راه‌حل)

۱ حجم و مساحت کره‌ای به شعاع ۳ واحد چه‌قدر است؟

۲ حجم کره‌ای به مساحت π چه‌قدر است؟

۳ مساحت کره‌ای به حجم $۴\sqrt{۳}\pi$ چه‌قدر است؟

۲ کره‌ای به شعاع r به طور کامل درون یک استوانه محاط شده است.

۱ با رسم شکل مناسب شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را محاسبه کنید.

۲ اگر $r = ۳$، آن‌گاه حجم فضای محصور بین کره و استوانه چه‌قدر است؟

۳ یک کرهٔ کامل توپر را از وسط بریده و به دو نیم‌کرهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم. اگر قطر این کره برابر ۲R باشد، آن‌گاه:

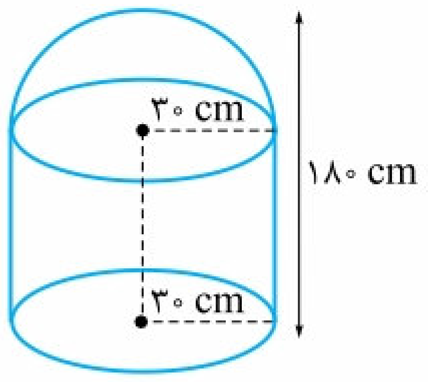
۱ حجم نیم‌کره چه‌قدر است؟ (برحسب R)

۲ مساحت کل سطح نیم‌کره برحسب R چیست؟

۳ نسبت حجم نیم‌کره به حجم استوانه‌ای که کرهٔ اولیه به طور کامل در آن محاط می‌شود، چه‌قدر است؟

۴ نیم‌کره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر را پر از آب کرده و آب داخل آن را درون استوانه‌ای به قطر قاعدهٔ ۶ سانتی‌متر می‌ریزیم، آب تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

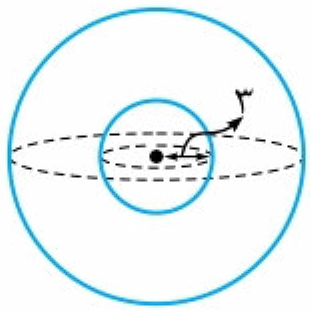
۵ با توجه به شکل مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



۱ حجم شکل چه‌قدر است؟

۲ سطح کل شکل چه‌قدر است؟

۶ در شکل مقابل دو کرهٔ هم‌مرکز داریم. اگر حجم فضای بین دو کره هفت برابر حجم کرهٔ کوچک‌تر باشد، آن‌گاه مساحت سطح کرهٔ بزرگ‌تر چه‌قدر است؟



۷ یک کاسهٔ سفالی به شکل نیم‌کره داریم. اگر شعاع داخلی کاسه برابر ۸ سانتی‌متر و شعاع خارجی آن برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه:

۱ حجم کاسه چه‌قدر است؟

۲ اگر بخواهیم کل کاسه را رنگ بزنیم، چند سانتی‌متر مربع را باید رنگ کنیم؟

۸ برای هر یک از قسمت‌های زیر، پاسخ مناسب ارائه دهید.

۱ شعاع کره‌ای را نصف می‌کنیم، حجم و مساحت آن چند برابر می‌شوند؟

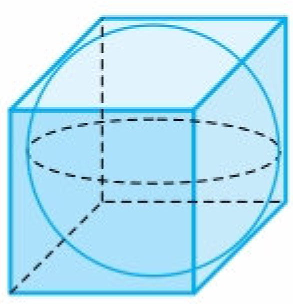
۲ شعاع کره را چند برابر کنیم تا حجم آن ٪۳۰۰ افزایش یابد؟

۹ به هر یک از سؤالات زیر، پاسخ دهید.

۱ مساحت کل سطح نیم‌کره‌ای به شعاع ۳r چند برابر مساحت سطح کره‌ای به شعاع ۲r است؟

۲ مساحت کل سطح نیم‌کره‌ای به شعاع r با سطح کل یک کره به قطر r' برابر است، نسبت $\frac{r}{r'}$ چه‌قدر است؟

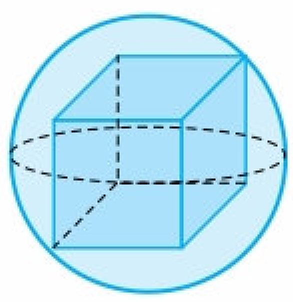
۱۰ مطابق شکل مقابل یک کره درون مکعبی به قطر $۶\sqrt{۳}$ محاط شده است.



۱ نسبت حجم کره به حجم مکعب چه‌قدر است؟

۲ اختلاف مساحت جانبی مکعب و سطح کره چه‌قدر است؟ $(\pi = ۳)$

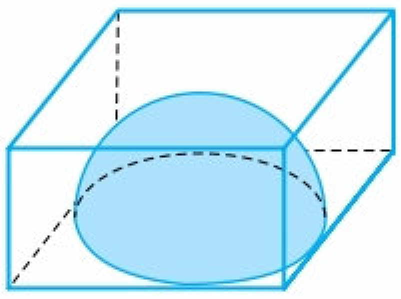
۱۱ مطابق شکل مقابل یک مکعب در کره‌ای به شعاع $۴\sqrt{۳}$ محاط شده است $(\pi = ۳)$. در این صورت:



۱ حجم فضای بین کره و مکعب چه‌قدر است؟

۲ مساحت سطح کره چند برابر مساحت کل مکعب است؟

۱۲ مطابق شکل روبه‌رو یک نیم‌کره درون مکعب‌مستطیل محاط شده است.



۱ نسبت سطح رویهٔ نیم‌کره به سطح جانبی مکعب‌مستطیل را به دست آورید.

۲ اگر حجم نیم‌کره برابر $\frac{\sqrt{۳}\pi}{۴}$ باشد، آن‌گاه حجم مکعب‌مستطیل چه‌قدر است؟

۱۳ حجم کره‌ای به شعاع $۲r$، برابر V است. اگر قطر این کره را $۲/۵$ برابر کنیم، مساحت سطح کرهٔ جدید برحسب V از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱ حجم نیم‌کره‌ای به شعاع R از کدام دستور به دست می‌آید؟ (نمونه‌دولتی ـ خراسان رضوی ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $۲\pi R^{۲}$ ۲) $۴\pi R^{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}$

۲ مساحت کره‌ای ۱۰۰π است، حجم آن .... است. (نمونه‌دولتی ـ زنجان ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $\frac{۵۰۰}{۲}\pi$ ۲) ۵۰۰π ۳) $\frac{۴۰۰}{۳}\pi$ ۴) $\frac{۵۰۰}{۳}\pi$

۳ مساحت کل یک نیم‌کرهٔ توپر ۲۷π است. حجم این نیم‌کره کدام است؟ (نمونه‌دولتی ـ سمنان ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) ۲۷π ۲) ۱۸π ۳) $۳۶\sqrt{۳}\pi$ ۴) ۴۵π

۴ مساحت کل نیم‌کره‌ای توپر به شعاع R چند برابر مساحت کره‌ای به شعاع R است؟ (نمونه‌دولتی ـ اردبیل ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۵ در کدام گزینه نسبت حجم به مساحت کل از بقیه بزرگ‌تر است؟ (نمونه‌دولتی ـ گلستان ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) مکعب به ضلع a ۲) کره به شعاع a

۳) استوانه به ارتفاع a و شعاع قاعدهٔ a ۴) کره به قطر a

۶ نسبت حجم به سطح کره‌ای به قطر قاعدهٔ $۳a$ برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $\frac{a}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{a}$ ۳) $\frac{۳}{a}$ ۴) $۳a$

۷ مساحت سطح کره‌ای با حجم V برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ $(\pi = ۳)$

۱) $۶\sqrt{V^{۳}}$ ۲) $۶\sqrt{\frac{V^{۳}}{۲}}$ ۳) $۶\sqrt[۳]{V^{۲}}$ ۴) $۶\sqrt[۳]{\frac{V^{۲}}{۲}}$

۸ شعاع قاعدهٔ یک استوانه، نصف شعاع یک کره است. ارتفاع استوانه چند برابر قطر کره باشد تا حجم کره چهار برابر حجم استوانه شود؟

۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۹ شعاع قاعدهٔ یک استوانه دو برابر شعاع قاعدهٔ یک کره و ارتفاع آن نیز $۱/۵$ برابر قطر کره است، اختلاف مساحت سطح استوانه و کره چند برابر مساحت قاعدهٔ استوانه است؟

۱) ۱۶ برابر ۲) ۸ برابر ۳) ۴ برابر ۴) ۲ برابر

۱۰ شعاع کره‌ای را a برابر کرده‌ایم و به اندازهٔ ۲۶ برابر حجم اولیه به حجم کره اضافه شده است. a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱ می‌دانیم حجم یک کره برابر $۴/۵\pi$ است، شعاع کره را با چه عددی جمع کنیم تا مساحت سطح کره ۵۵π واحد افزایش یابد؟

۱) $۱/۵$ ۲) ۲ ۳) $۲/۵$ ۴) ۳

۱۲ مساحت کره‌ای ۴ برابر حجم یک مکعب است. اگر شعاع کره با یال مکعب برابر باشد، شعاع کره را چند برابر کنیم تا حجم آن ۱۹۴۰ واحد افزایش یابد؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۸ برابر ۲) $\frac{۸}{۳}$ برابر ۳) $\frac{۳}{۸}$ برابر ۴) $\frac{۳}{۴}$ برابر

۱۳ یک بادکنک کروی در حال حاضر دارای حجم و مساحتی مساوی است. اگر دهانهٔ بادکنک را باز بگذاریم تا $\frac{۷۶}{۳}\pi$ سانتی‌متر مکعب هوا از داخل بادکنک خارج شود، با این عمل مساحت بادکنک چند سانتی‌متر مربع کاهش می‌یابد؟ *(نمونه‌دولتی ـ سیستان و بلوچستان ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

۱) ۲۰π ۲) ۱۶π ۳) ۳۲π ۴) ۶۴π

۱۴ یک کره به شعاع ۶ cm را درون یک ظرف استوانه‌ای که مقداری آب دارد، می‌اندازیم. ارتفاع آب ۸ cm افزایش می‌یابد. شعاع قاعدهٔ استوانه کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰ *(نمونه‌دولتی ـ قم ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

۱۵ کره‌ای در استوانه‌ای به ارتفاع ۶ سانتی‌متر محاط شده است. حجم فضای بین کره و استوانه چند سانتی‌متر مکعب است؟ *(نمونه‌دولتی ـ کرمانشاه ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

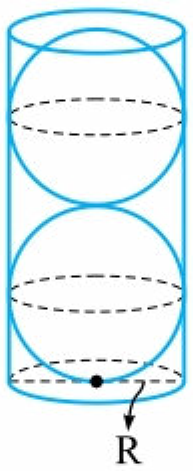
۱) ۵۴π ۲) ۳۶π

۳) ۱۸π ۴) ۲۷π

۱۶ یک کره به طور کامل درون استوانه‌ای محاط شده است. حجم محصور بین کره و استوانه چند برابر حجم کره است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ برابر ۲) $\frac{۲}{۳}$ برابر ۳) $\frac{۱}{۳}$ برابر ۴) $\frac{۳}{۴}$ برابر

۱۷ در شکل زیر درون ظرف استوانه‌ای‌شکل به شعاع R دو کره محاط کرده‌ایم. کدام گزینه درست است؟ *(نمونه‌دولتی ـ قزوین ـ ۹۷ ـ ۹۶)*



۱) حجم فضای خالی بیشتر از حجم هر کره است.

۲) حجم فضای خالی کم‌تر از حجم هر کره است.

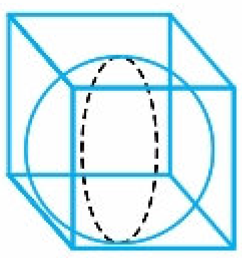
۳) حجم فضای خالی مساوی حجم هر کره است.

۴) حجم هر کره مساوی حجم استوانه است.

۱۸ در یک قوطی استوانه‌ای حاوی ۴ توپ تنیس که ارتفاعی دقیقاً به اندازهٔ ۴ توپ دارد، توپ‌ها به جداره چسبیده‌اند. حجم فضای خالی اطراف توپ‌ها در استوانه چند برابر حجم یک توپ است؟ *(نمونه‌دولتی ـ بوشهر ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

۱) ۴ برابر ۲) ۳ برابر ۳) ۲/۵ برابر ۴) ۲ برابر

۱۹ در شکل زیر حجم کرهٔ محاط‌شده در مکعب برابر ۳۶π است. اندازهٔ ضلع مکعب برابر کدام گزینه است؟ *(نمونه‌دولتی ـ آذربایجان غربی ـ ۹۷ ـ ۹۶)*



۱) ۹ ۲) ۶

۳) ۴/۵ ۴) ۳

۲۰ در داخل یک مکعب، بزرگ‌ترین کرهٔ ممکن قرار دارد. نسبت مساحت کره به مساحت کل مکعب کدام است؟ *(نمونه‌دولتی ـ کردستان ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

۲۱ بزرگ‌ترین کره‌ای که در مکعبی به طول یال a محاط می‌شود را در نظر بگیرید. اگر فضای محصور بین کره و مکعب، چهار برابر مساحت یکی از وجوه مکعب باشد، آن‌گاه سطح کره برابر است با .... $(\pi = ۳)$

۱) ۲۴ ۲) ۱۹۲ ۳) ۱۵۳۶ ۴) ۳۸۴

۲۲ ظرفی آهنی به شکل یک نیم‌کره داریم. می‌دانیم شعاع داخلی ظرف برابر ۶ واحد و شعاع خارجی آن برابر ۸ واحد است. این ظرف را به طور کامل در یک سطل رنگ فرو می‌بریم، پس از خارج‌کردن، چه سطحی از ظرف رنگی شده است؟

۱) ۱۲۸π ۲) ۱۵۶π ۳) ۲۲۴π ۴) ۲۲۸π

۲۳ یک ظرف چوبی توخالی به شکل نیم‌کره داریم که قطر خارجی آن ۱۰ cm و ضخامت آن ۱ cm است. می‌خواهیم کل این ظرف را رنگ بزنیم. اگر برای هر متر مربع، به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز باشد، چند گرم رنگ مصرف می‌شود؟ $(\pi \simeq ۳)$ *(نمونه‌دولتی ـ فارس ـ ۹۶ ـ ۹۵)*

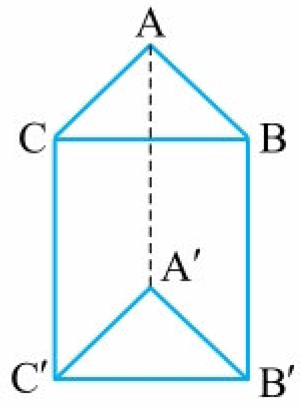
۱) ۷/۲۴ ۲) ۲۲/۲۹ ۳) ۷/۴۳ ۴) ۲۱/۷۲

۲۴ مکعبی به قطر $\sqrt{۱۲}$ را درون استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. حجم استوانه کدام است؟ *(نمونه‌دولتی ـ تهران ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

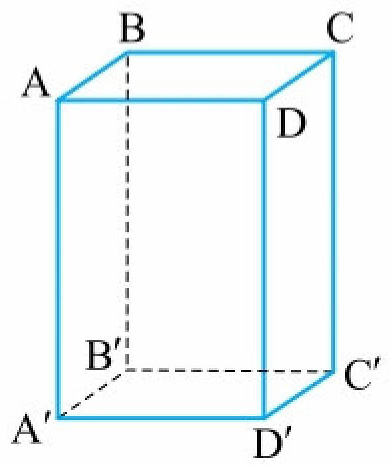
۱) ۱۶π ۲) $\sqrt{۲}\pi$ ۳) $۳\sqrt{۲}\pi$ ۴) ۴π

درس دوم: حجم هرم و مخروط

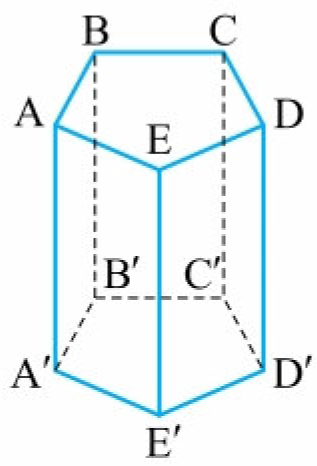
در ابتدای این درس، ابتدا به یادآوری مفاهیم مربوط به منشورها می‌پردازیم و سپس سراغ هرم‌ها و ویژگی‌های آن‌ها می‌رویم. در زیر، شکل چند منشور مختلف را می‌بینید.



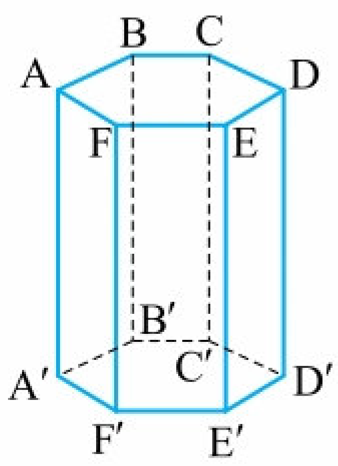
منشور ۳پهلو



منشور ۴پهلو

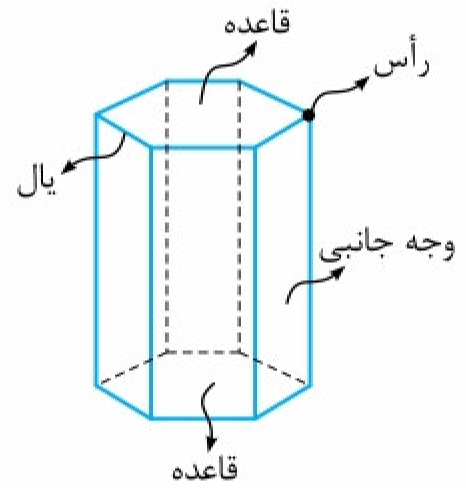


منشور ۵پهلو



منشور ۶پهلو

همان‌طور که در شکل‌های بالا می‌بینید، حجم‌های منشوری **بین دو صفحهٔ موازی** قرار دارند. به این دو صفحهٔ موازی که منشور را قطع می‌کنند، **قاعده** و به سطح‌های اطراف آن **وجه‌های جانبی** می‌گویند. به محل برخورد سطح‌ها، **یال** و به نقطهٔ برخورد هر ۳ سطح، **رأس** می‌گویند.



منشور منتظم

به منشوری که قاعدهٔ آن یک چندضلعی منتظم است، **منشور منتظم** می‌گویند.

حجم منشور

اگر مساحت قاعدهٔ منشور را با S و ارتفاع آن را با h نمایش دهیم، آن‌گاه حجم منشور از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید: $V = S \times h$

مثال **حجم منشور ۴پهلوی منتظم به ضلع ۵ سانتی‌متر و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر را به دست آورید.**

پاسخ منشور ۴پهلوی منتظم، منشوری است که قاعدهٔ آن به شکل مربع است، بنابراین مساحت قاعدهٔ آن برابر است با:

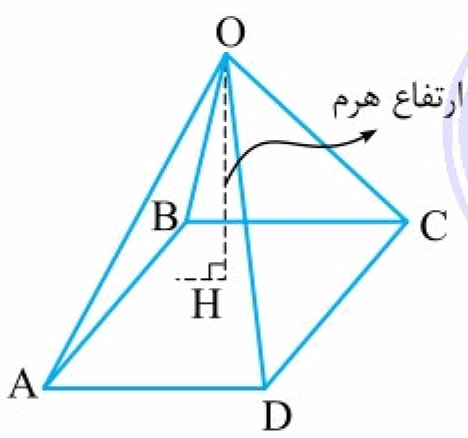
$$S = ۵ \times ۵ = ۲۵ \text{ cm}^۲$$

حالا می‌توانیم حجم منشور را محاسبه کنیم:

$$V = S \times h = ۲۵ \times ۱۰ = ۲۵۰ \text{ cm}^۳$$

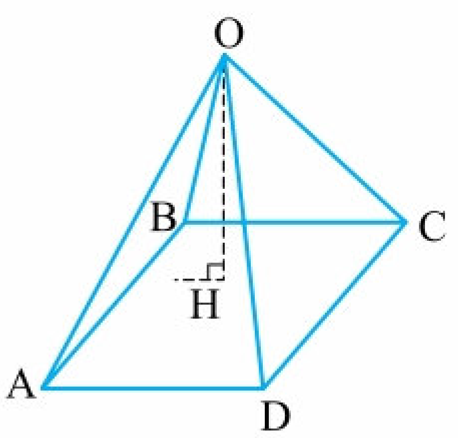
هرم

هرم شکلی فضایی شبیه به منشور است، با این تفاوت که تنها **یک قاعده** دارد و وجه‌های جانبی آن به جای مستطیل، **مثلث** است. همهٔ این وجه‌ها یکدیگر را در نقطه‌ای به نام **رأس** قطع می‌کنند؛ همچنین به فاصلهٔ رأس هرم تا قاعده، **ارتفاع هرم** می‌گویند.



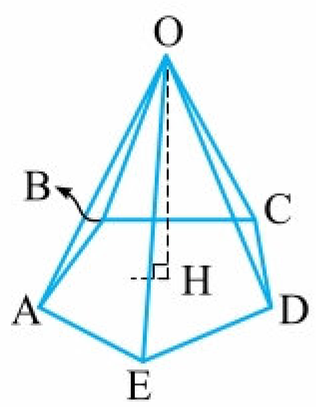
هرم قائم

اگر ارتفاع یک هرم به مرکز قاعدهٔ آن فرود آید، هرم را **قائم** می‌نامیم.



هرم منتظم

اگر قاعدهٔ یک هرم قائم، چندضلعی منتظم باشد، آن‌گاه وجه‌های آن مثلث‌های متساوی‌الساقین همنهشت خواهند بود و به این شکل فضایی **هرم منتظم** می‌گوییم. شکل روبه‌رو یک هرم منتظم با قاعدهٔ پنج‌ضلعی را نشان می‌دهد.

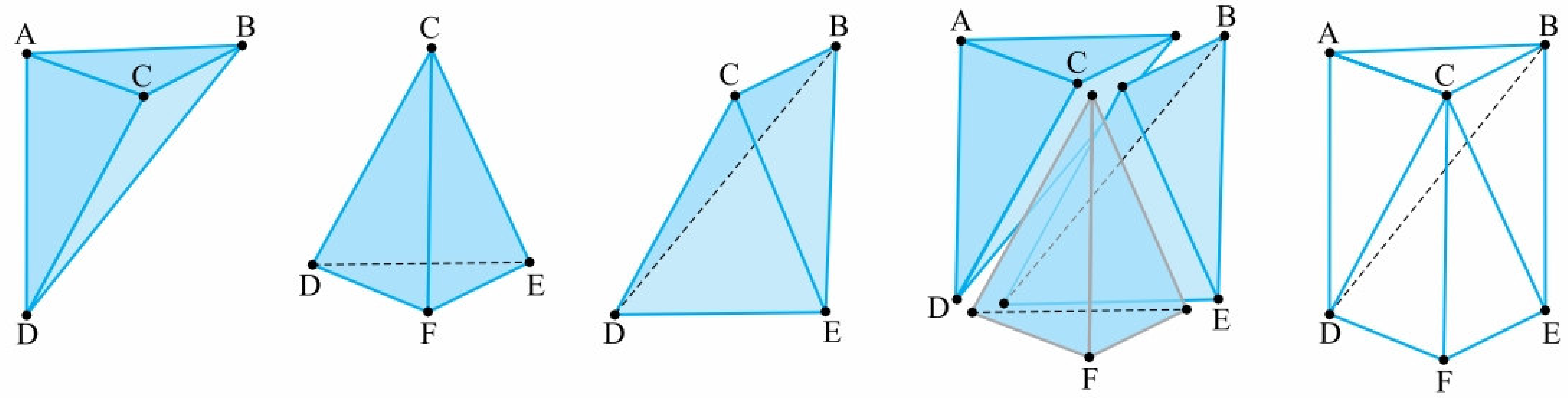


حجم هرم

برای به دست آوردن حجم هرمی به مساحت قاعدهٔ S و ارتفاع h می‌توانیم از رابطهٔ روبه‌رو استفاده کنیم: $V = \frac{1}{3}Sh$

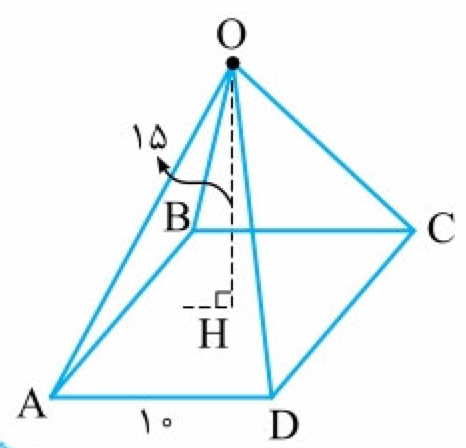
آقا اجازه! این رابطه، خیلی شبیه رابطهٔ محاسبهٔ حجم منشور هستش. فقط عدد $\frac{1}{3}$ رو در اون ضرب کردیم درسته؟

بله! کاملاً درسته. برای این‌که درک بهتری از این موضوع پیدا کنید، به شکل‌های زیر دقت کنید.



همان‌طور که می‌بینید یک منشور به ۳ هرم تقسیم شده است؛ این هرم‌ها همگی هم‌اندازه هستند. (زیرا دوبه‌دو دارای قاعده‌های برابر و ارتفاع مساوی هستند.) بنابراین حجم این ۳ هرم مساوی بوده و حجم هر یک از آن‌ها، $\frac{1}{3}$ حجم منشور است.

مثال **حجم هرم منتظم شکل روبه‌رو را به دست آورید.**



پاسخ با توجه به اطلاعات مسئله، قاعدهٔ این هرم به شکل مربع است، بنابراین برای پاسخ به این سؤال کافیست از رابطهٔ بیان‌شده برای حجم هرم استفاده کنیم:

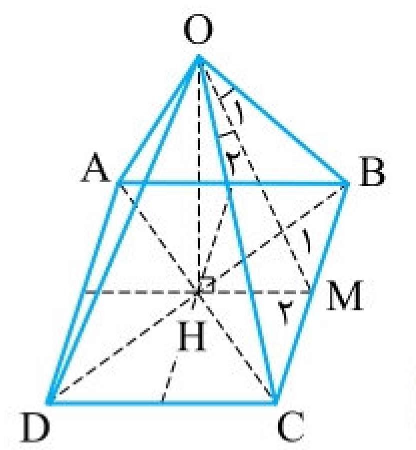
$$V = \frac{1}{3}S \times h = \frac{1}{\cancel{3}_{1}}\underbrace{(10\times 10)}_{S} \times \underbrace{\cancel{15}^{5}}_{h} = 100 \times 5 = 500$$

مثال **در شکل روبه‌رو هرم منتظم با قاعدهٔ مربع رسم شده است که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین هستند. طول ساق‌های این مثلث برابر ۱۰ سانتی‌متر و M وسط BC است.**

الف) ابتدا خواص پاره‌خط OM را به دست آورید و بگویید OBM چه نوع مثلثی است؟

ب) اگر طول ضلع قاعده برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، طول OM را بیابید.

پ) به کمک قضیهٔ فیثاغورس، اندازهٔ OH را بیابید و حجم هرم را محاسبه کنید.



پاسخ **الف** برای به دست آوردن خواص OM بهتر است ابتدا به بررسی همنهشتی دو مثلث OBM و OCM بپردازیم. می‌دانیم مثلث OBC متساوی‌الساقین است. بنابراین داریم:

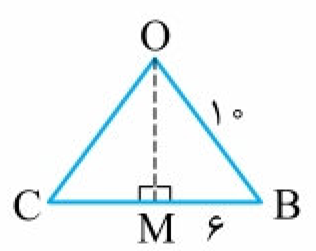
فرض: مثلث OBC متساوی‌الساقین است $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}, OB = OC, MB = MC$

حکم: $\overset{\Delta}{OBM} \cong \overset{\Delta}{OCM}$

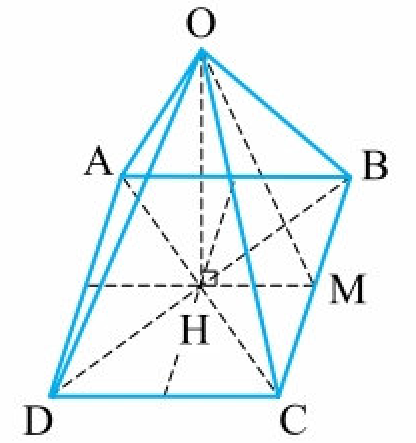
$$\left.\begin{matrix} MB = MC \\ OM \text{ مشترک} \\ OB = OC \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{OBM} \cong \overset{\Delta}{OCM} \xrightarrow{\text{تساوی اجزا}} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ, \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

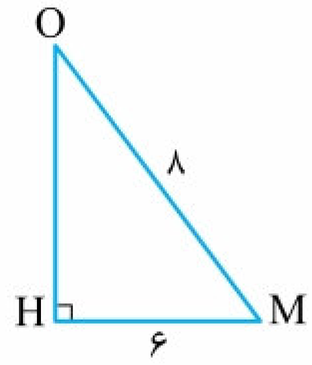
با توجه به تساوی اجزای به دست آمده، OM میانه و عمودمنصف ضلع BC است و علاوه بر این نیمساز زاویهٔ $\hat{O}$ نیز است. همچنین مثلث OBM قائم‌الزاویه است.

ب می‌دانیم $BC = 12\ cm$ است، بنابراین داریم $BM = CM = 6\ cm$. همچنین می‌دانیم $OB = OC = 10\ cm$، پس داریم:



$$OB^2 = OM^2 + MB^2 \Rightarrow 10^2 = OM^2 + 6^2$$
$$\Rightarrow OM^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow OM = \sqrt{64} = 8\ cm$$





پ برای به دست آوردن اندازهٔ OH نیز باید از رابطهٔ فیثاغورس استفاده کنیم. برای این کار از شکل روبه‌رو کمک می‌گیریم. همان‌طور که می‌بینید اندازهٔ ضلع HM برابر نصف هر کدام از اضلاع قاعده است $(HM = \frac{۱۲}{۲} = ۶)$. بنابراین داریم:

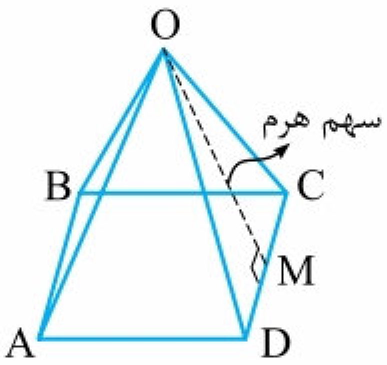
$$OM^{۲} = OH^{۲} + HM^{۲} \Rightarrow ۸^{۲} = OH^{۲} + ۶^{۲} \Rightarrow ۶۴ = OH^{۲} + ۳۶ \Rightarrow OH^{۲} = ۶۴ - ۳۶ = ۲۸ \Rightarrow OH = \sqrt{۲۸}$$

حالا با داشتن مساحت قاعده $(S = ۱۲ \times ۱۲ = ۱۴۴)$ و همچنین اندازهٔ ارتفاع $(OH = \sqrt{۲۸})$ به راحتی می‌توانیم حجم هرم را محاسبه کنیم:

$$V = \frac{۱}{۳} S \times h \Rightarrow V = \frac{۱}{\cancel{۳}_{۱}} \times \cancel{۱۴۴}^{۴۸} \times \sqrt{۲۸} = ۴۸ \times ۲\sqrt{۷} = ۹۶\sqrt{۷}\ cm^{۳}$$

آقا اجازه! تو مثال قبل، پاره‌خط OM اسم خاصی داره؟

بله! به پاره‌خط OM می‌گن سهم هرم.

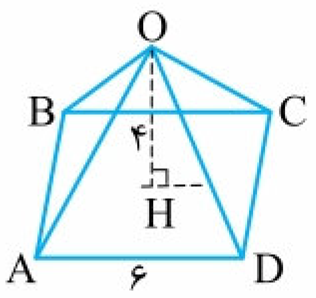


نکته اگر از رأس یک هرم پاره‌خطی بر ضلع قاعدهٔ آن عمود کنیم، به آن، **سهم هرم** می‌گویند.

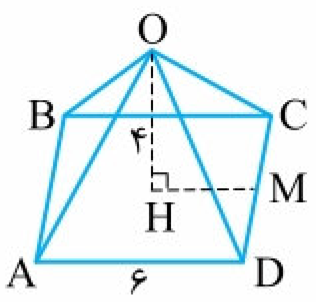
مساحت هرم

برای محاسبهٔ مساحت یک هرم باید گستردهٔ آن را رسم کنیم و سپس با توجه به شکل قاعده، مساحت هر یک از وجه‌های جانبی و قاعده را محاسبه و با هم جمع کنیم.

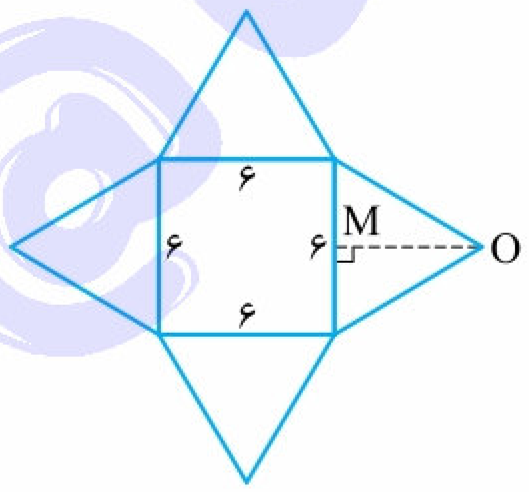
مثال **مساحت هرم منتظم شکل روبه‌رو را محاسبه کنید.**

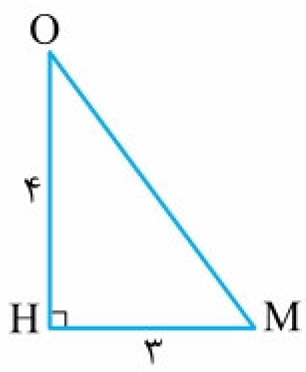


پاسخ برای پاسخ به این سؤال ابتدا گستردهٔ هرم را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$





ارتفاع هر یک از مثلث‌های ایجادشده برابر سهم هرم (یا همان OM) است. بنابراین با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$\Rightarrow OM^{۲} = OH^{۲} + HM^{۲}$$

$$\Rightarrow OM^{۲} = ۴^{۲} + ۳^{۲} = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow OM = \sqrt{۲۵} = ۵$$

حالا از آن‌جایی که ۴ مثلث مربوط به وجه‌های جانبی همنهشت هستند، به راحتی می‌توانیم مساحت آن‌ها را محاسبه کنیم:

$$S_{\triangle} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۵ = ۱۵$$

هم‌چنین مساحت قاعدهٔ مربع‌شکل برابر است با:

$$S_{\square} = ۶ \times ۶ = ۳۶$$

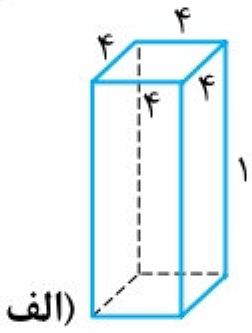
در نتیجه مساحت هرم برابر است با:

$$S_{کل} = S_{\square} + ۴ \times S_{\triangle} = ۳۶ + ۴ \times ۱۵ = ۳۶ + ۶۰ = ۹۶$$

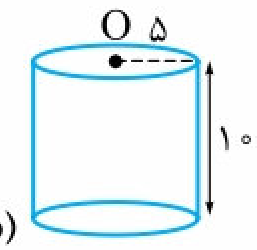
مساحت منشور

برای محاسبهٔ مساحت یک منشور ابتدا باید گستردهٔ آن را رسم کنیم. سپس مساحت دو قاعده را با مساحت وجه‌های جانبی جمع می‌کنیم تا مساحت منشور به دست بیاید.

مثال **مساحت هر یک از منشورهای زیر را به دست آورید.**

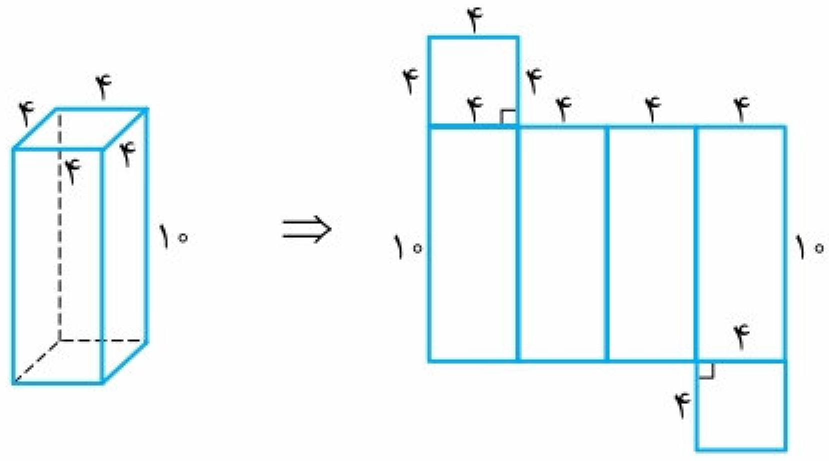


الف)



ب)

پاسخ الف ابتدا گستردهٔ منشور داده‌شده را رسم می‌کنیم:



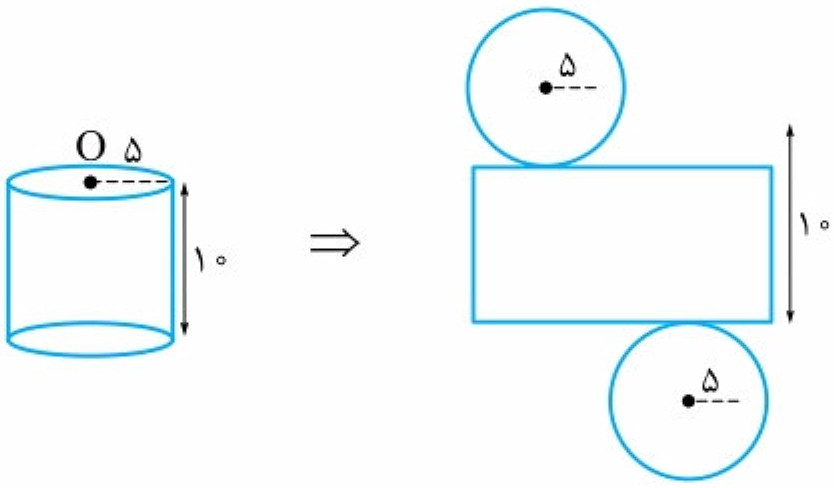
همان‌طور که می‌بینید این منشور از ۲ قاعدهٔ مربع‌شکل به ضلع ۴ و چهار مستطیل به طول ضلع‌های ۴ و ۱۰ تشکیل شده است، بنابراین با محاسبهٔ مساحت هر یک از این دو قسمت، مساحت منشور را محاسبه می‌کنیم:

$S_{\text{وجه جانبی}} = ۴ \times ۱۰ = ۴۰ \qquad S_{\text{قاعده}} = ۴ \times ۴ = ۱۶$

مساحت کل این منشور از مجموع مساحت‌های ۴ مستطیل (وجه‌های جانبی) و ۲ مربع (قاعده‌ها) به دست می‌آید:

$$S_{\text{کل}} = ۴ \times S_{\text{وجه‌های جانبی}} + ۲ \times S_{\text{قاعده}} = ۴ \times ۴۰ + ۲ \times ۱۶ = ۱۶۰ + ۳۲ = ۱۹۲$$

ب مانند قسمت قبل، گستردهٔ استوانهٔ داده‌شده را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، این استوانه از یک مستطیل (وجه جانبی) و دو قاعدهٔ دایره‌ای‌شکل به شعاع ۵ تشکیل شده است. عرض این مستطیل برابر ۱۰ و طول آن برابر محیط دایره‌ای به شعاع ۵ است. (چون *طول مستطیل دور دایره رو می‌پوشونه، پس اندازهٔ طول مستطیل برابر محیط دایره است.*)

بنابراین داریم:

$$\text{طول مستطیل} = \text{محیط دایره} = ۲\pi r \xrightarrow{r=۵} ۲ \times \pi \times ۵ = ۲ \times ۳/۱۴ \times ۵ = ۳۱/۴$$

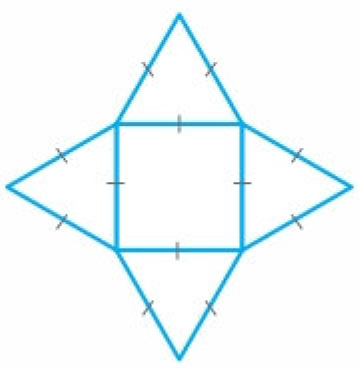
$$S_{\square} = ۳۱/۴ \times ۱۰ = ۳۱۴$$

$$S_{\bigcirc} = \pi r^۲ \xrightarrow{r=۵} S_{\bigcirc} = ۳/۱۴ \times ۵^۲ = ۳/۱۴ \times ۲۵ = ۷۸/۵$$

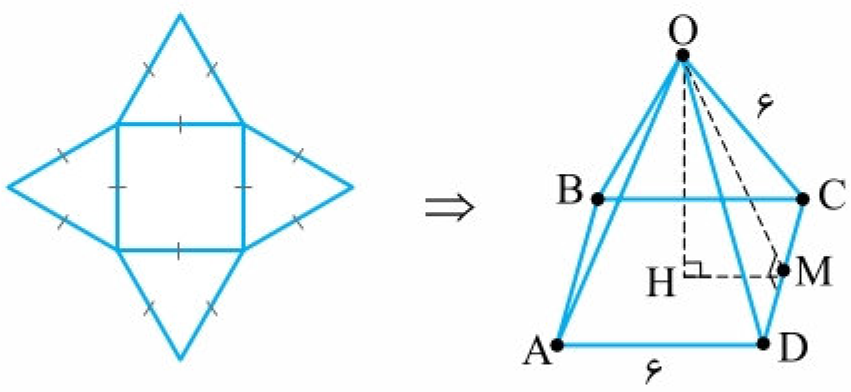
بنابراین مساحت کل برابر مجموع مساحت مستطیل و مساحت ۲ قاعده است:

$$S_{\text{کل}} = S_{\square} + ۲S_{\bigcirc} = ۳۱۴ + ۲ \times ۷۸/۵ = ۳۱۴ + ۱۵۷ = ۴۷۱$$

مثال **گستردهٔ هرمی به طول ضلع قاعدهٔ ۶ cm مطابق شکل روبه‌رو است. حجم این هرم را به دست آورید.**



پاسخ همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، این هرم از ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع و یک قاعدهٔ مربع‌شکل (همگی به ضلع ۶ cm) تشکیل شده است، بنابراین شکل آن به صورت روبه‌رو خواهد بود:



ابتدا طول OM را به دست می‌آوریم و براساس آن ارتفاع OH را محاسبه می‌کنیم:

در مثلث OMC داریم: $OC^۲ = OM^۲ + MC^۲ \Rightarrow ۶^۲ = OM^۲ + ۳^۲ \Rightarrow OM^۲ = ۶^۲ - ۳^۲ = ۳۶ - ۹ = ۲۷ \Rightarrow OM = \sqrt{۲۷}$

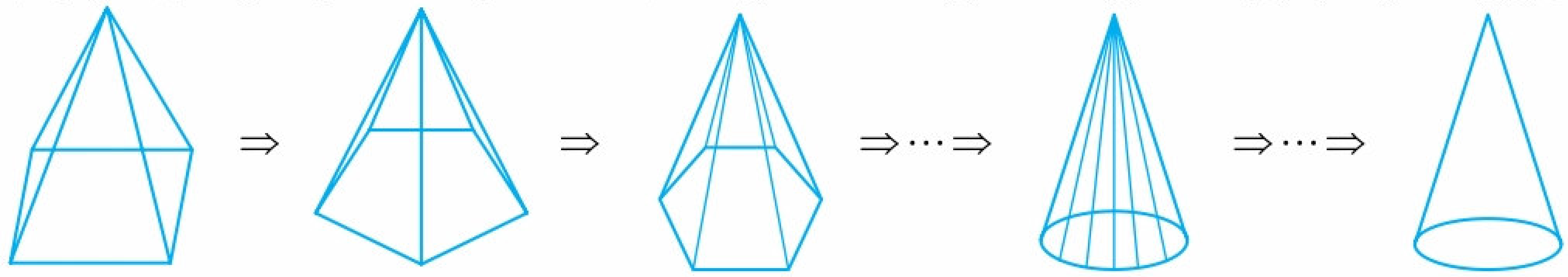
حالا در مثلث OHM داریم: $OM^۲ = HM^۲ + OH^۲ \Rightarrow ۲۷ = ۳^۲ + OH^۲ \Rightarrow OH^۲ = ۲۷ - ۹ = ۱۸ \Rightarrow OH = \sqrt{۱۸}$

حالا با داشتن مساحت قاعده و ارتفاع به راحتی می‌توانیم حجم هرم را محاسبه کنیم:

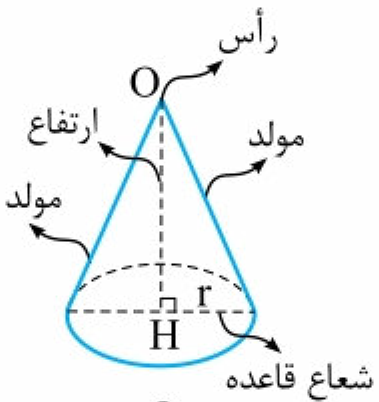
$$S_{\text{قاعده}} = ۶ \times ۶ = ۳۶\ cm^۲ \Rightarrow V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{\cancel{۳}} \times \overset{۱۲}{\cancel{۳۶}} \times \sqrt{۱۸} = ۱۲ \times ۳\sqrt{۲} = ۳۶\sqrt{۲}\ cm^۳$$

مخروط

هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعدهٔ آن یک چندضلعی منتظم است (*مثلاً یک مربع*). حالا تعداد ضلع‌های چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید. شکل‌های زیر پدید می‌آید و در نهایت شکلی به دست می‌آید که شبیه هرم منتظم با قاعدهٔ **دایره** است. به این شکل **مخروط** می‌گوییم.

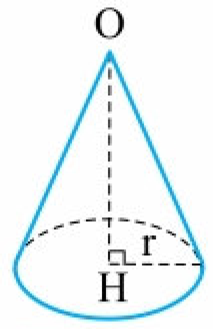


تعریف مخروط، شکلی شبیه هرم منتظم است که قاعدهٔ آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط **مرکز این دایره** است.



هم‌چنین به فاصلهٔ رأس مخروط از لبهٔ مخروط (محیط مخروط)، **مولد مخروط** می‌گویند.

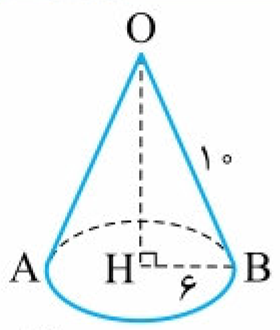
حجم مخروط



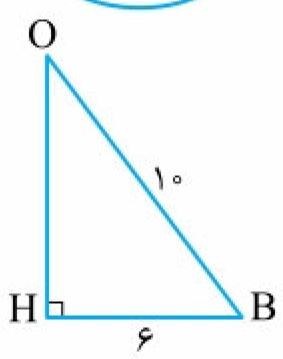
رابطهٔ حجم مخروط شبیه رابطهٔ حجم هرم است، با این تفاوت که به جای مساحت قاعده، مساحت دایرهٔ قاعدهٔ مخروط را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow\ V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$$

مثال **حجم مخروط شکل روبه‌رو را به دست آورید.**



پاسخ با توجه به رابطهٔ حجم مخروط، باید ارتفاع مخروط داده‌شده را محاسبه کنیم.



با توجه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

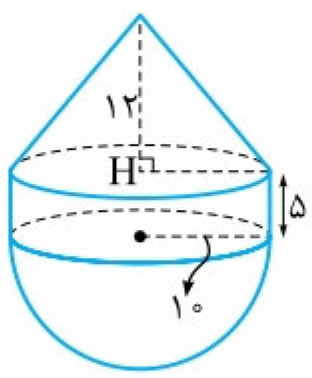
$$OB^{۲}=OH^{۲}+HB^{۲}\ \Rightarrow\ ۱۰^{۲}=OH^{۲}+۶^{۲}$$

$$\Rightarrow\ OH^{۲}=۱۰^{۲}-۶^{۲}=۱۰۰-۳۶=۶۴\ \Rightarrow\ OH=\sqrt{۶۴}=۸$$

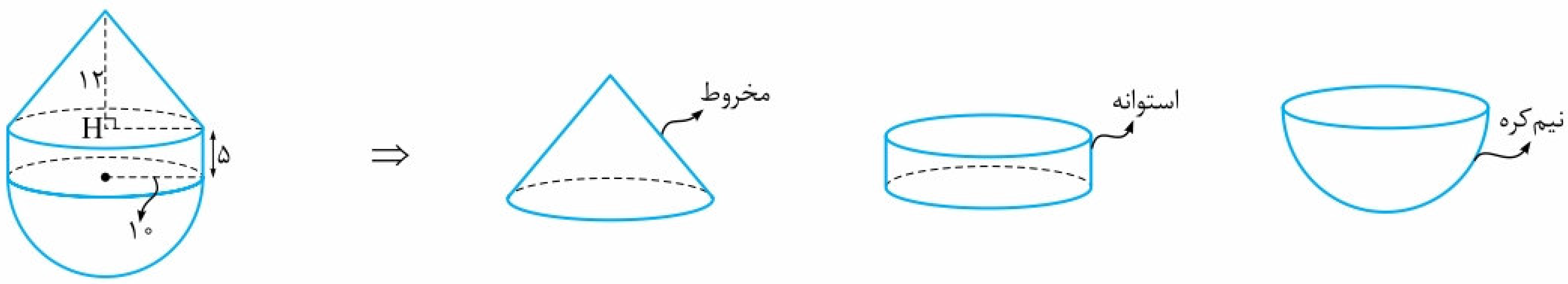
حالا می‌توانیم حجم مخروط را به راحتی محاسبه کنیم:

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{۱}{۳}\times ۳/۱۴\times ۶^{۲}\times ۸=\frac{۱}{\cancel{۳}_{۱}}\times ۳/۱۴\times \overset{۱۲}{\cancel{۳۶}}\times ۸=۳/۱۴\times ۱۲\times ۸=۳۰۱/۴۴$$

مثال **حجم شکل روبه‌رو را به دست آورید.**



پاسخ این حجم از ۳ قسمت متفاوت تشکیل شده است. هر یک از این قسمت‌ها حجم هندسی هستند، بنابراین کل این حجم نیز هندسی است.



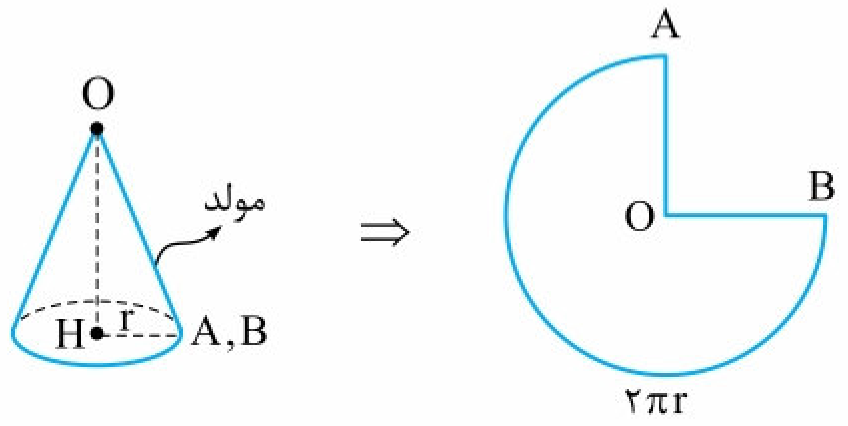
حجم این شکل فضایی از مجموع حجم‌ها به دست می‌آید:

$$V_{\text{کل}}=V_{\text{مخروط}}+V_{\text{استوانه}}+V_{\text{نیم‌کره}}$$

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{۱}{\cancel{۳}_{۱}}\times ۳/۱۴\times ۱۰^{۲}\times \overset{۴}{\cancel{۱۲}}=۱۲۵۶\ ,\ V_{\text{استوانه}}=\pi r^{۲}h=۳/۱۴\times ۱۰^{۲}\times ۵=۱۵۷۰$$

$$V_{\text{نیم‌کره}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}=\frac{۲}{۳}\times ۳/۱۴\times ۱۰^{۳}=۲۰۹۳/۳\ ,\ V_{\text{کل}}=۱۲۵۶+۱۵۷۰+۲۰۹۳/۳=۴۹۱۹/۳$$

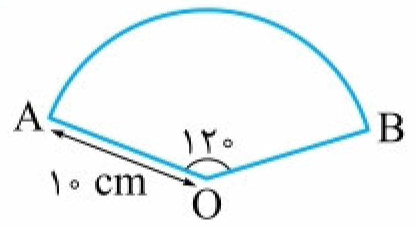
گسترده مخروط



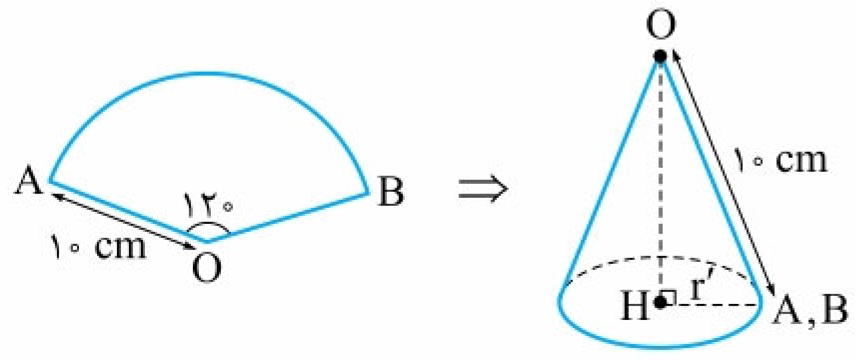
اگر مخروطی را باز کنیم، به شکل روبه‌رو که قطاع دایره است، می‌رسیم. اندازهٔ کمان $\widehat{AB}$ برابر محیط قاعدهٔ مخروط (یعنی $۲\pi r$) است.

هم‌چنین اندازهٔ مولد این مخروط (OA و OB) برابر شعاع قطاع دایره هستند. به عبارت دیگر **مخروط از روی هم قرارگرفتن لبه‌های یک قطاع دایره به وجود می‌آید.**

مثال **به وسیلهٔ قطاع دایرهٔ شکل روبه‌رو، یک مخروط ساخته‌ایم. حجم این مخروط کدام است؟**



پاسخ ابتدا باید اندازهٔ کمان $\widehat{AB}$ را محاسبه کنیم. اندازهٔ این کمان برابر $\frac{۱}{۳}$ $(\frac{۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{۱}{۳})$ محیط یک دایرهٔ کامل به شعاع $۱۰\,cm$ است، بنابراین داریم:



$$\widehat{AB}=\frac{۱}{۳}\times ۲\pi r \xrightarrow{r=۱۰} \widehat{AB}=\frac{۱}{۳}\times ۲\times ۳/۱۴\times ۱۰\simeq ۲۱cm$$

بنابراین محیط مخروط تقریباً برابر ۲۱ سانتی‌متر است. حالا با دانستن این موضوع، شعاع قاعدهٔ مخروط (یا همان r') را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط قاعدهٔ مخروط}=۲\pi r' \Rightarrow ۲۱=۲\pi r' \Rightarrow r'=\frac{۲۱}{۲\pi}\simeq ۳/۳\ cm$$

حالا با داشتن اندازهٔ مولد مخروط و شعاع قاعدهٔ آن می‌توانیم ارتفاع مخروط را محاسبه کنیم:

$$OA^۲=OH^۲+HA^۲ \Rightarrow ۱۰^۲=OH^۲+۳/۳^۲ \Rightarrow OH^۲=۱۰^۲-۳/۳^۲=۱۰۰-۱۰/۸۹=۸۹/۱۱$$
$$\Rightarrow OH=\sqrt{۸۹/۱۱}\simeq ۹/۴\ cm$$

اکنون به راحتی می‌توانیم حجم مخروط را به دست بیاوریم:

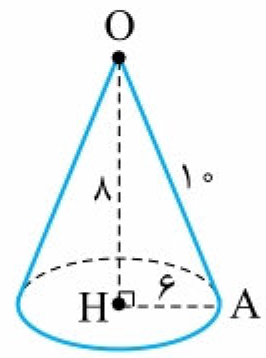
$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi r'^۲ h \xrightarrow[h=۹/۴]{r'=۳/۳} V=\frac{۱}{۳}\times\pi\times(۳/۳)^۲\times ۹/۴\simeq ۱۰۷\ cm^۳$$

بیشتر بدانید

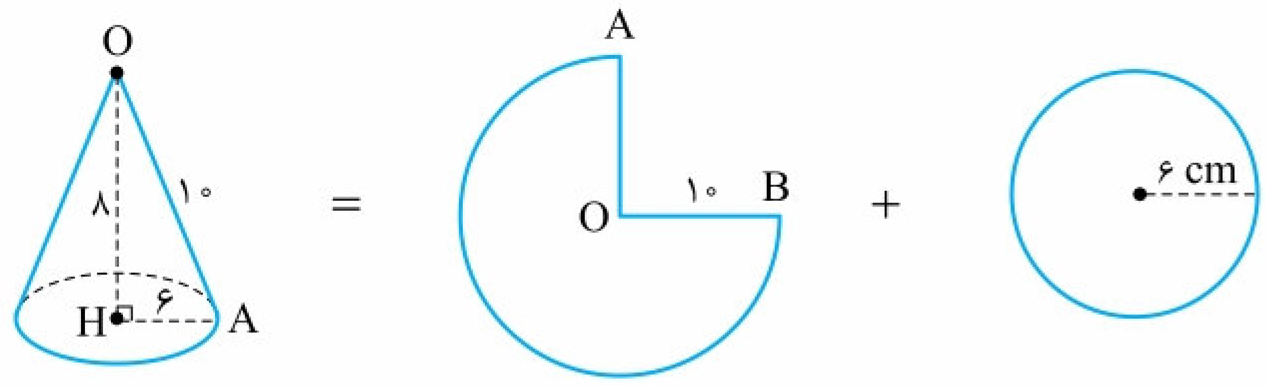
محاسبهٔ مساحت رویهٔ مخروط

برای محاسبهٔ مساحت رویهٔ مخروط، ابتدا باید گستردهٔ آن را رسم کنیم و سپس با توجه به تساوی بین مولد مخروط و شعاع قطاع دایره‌ای که به دست می‌آید و هم‌چنین تساوی محیط قاعدهٔ مخروط با محیط قطاع دایره، مساحت قطاع دایره *(که برابر مساحت رویهٔ مخروط است)* را محاسبه می‌کنیم.

مثال **مساحت مخروط روبه‌رو را به دست آورید.**



پاسخ گستردهٔ مخروط نمایش داده‌شده به صورت زیر است. ابتدا محیط قاعدهٔ مخروط را محاسبه می‌کنیم و نسبت آن را به محیط دایره‌ای به شعاع مولد مخروط به دست می‌آوریم. با دانستن این نسبت می‌توانیم مساحت قطاع دایرهٔ سازندهٔ مخروط را به دست آوریم.



$$\text{محیط دایره (قاعده)}=۲\pi r' \xrightarrow{r'=۶\ cm} ۲\times ۳/۱۴\times ۶=۳۷/۶۸\ cm \Rightarrow \widehat{AB}=۳۷/۶۸$$

حالا با دانستن محیط دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر (اندازهٔ مولد مخروط) می‌توانیم نسبت محیط قطاع دایرهٔ AOB به دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر (مولد مخروط) را به دست آوریم.

$$P=۲\pi r \xrightarrow{r=۱۰} ۲\times ۳/۱۴\times ۱۰=۶۲/۸\ cm$$

حالا نسبت اندازهٔ کمان به محیط دایرهٔ کامل را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{P_{\widehat{AB}}}{P_{\bigcirc}}=\frac{۳۷/۶۸}{۶۲/۸}=\frac{\cancel{۲}\times\cancel{۳/۱۴}\times ۶}{\cancel{۲}\times\cancel{۳/۱۴}\times ۱۰}=۰/۶$$

بنابراین مساحت قطاع دایرهٔ AOB برابر ۰/۶ مساحت کل دایره است.

$$\Rightarrow S=\pi r^{۲}=۳/۱۴\times ۱۰^{۲}=۳۱۴\,cm^{۲} \Rightarrow S_{AOB}=۰/۶\times ۳۱۴=۱۸۸/۴\,cm^{۲}$$

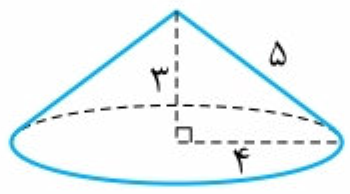
از طرفی مساحت قاعدهٔ مخروط برابر است با:

$$S_{\text{قاعده}}=\pi r'^{۲}=۳/۱۴\times ۶^{۲}=۱۱۳/۰۴\,cm^{۲} \Rightarrow S_{\text{کل}}=S_{AOB}+S_{\text{قاعده}}=۱۸۸/۴+۱۱۳/۰۴=۳۰۱/۴۴\,cm^{۲}$$

نتیجه در مثال قبل برای به دست آوردن نسبت مساحت قطاع دایرهٔ سازندهٔ مخروط به دایرهٔ کامل به شعاع مولد مخروط، می‌توانستیم نسبت $\frac{\text{شعاع قاعدهٔ مخروط}}{\text{مولد مخروط}}$ را به دست آوریم و بدون انجام محاسبات اضافه مسئله را حل کنیم. یعنی اگر r'، شعاع قاعدهٔ مخروط و r مولد مخروط باشد، مساحت مخروط از رابطهٔ روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$S_{\text{رویهٔ مخروط}}=\frac{r'}{r}\times \pi r^{۲}=\pi r r'$$

مثال مساحت مخروط روبه‌رو کدام است؟



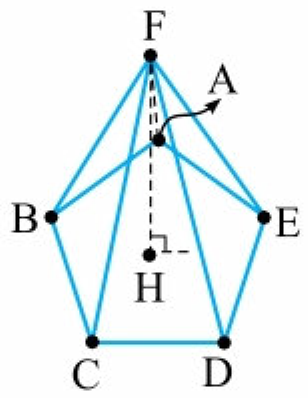
پاسخ با توجه به نتیجهٔ قبل و رابطهٔ $S=\pi r r'$ داریم:

$$S=\pi r r' \xrightarrow[r'=۴]{r=۵} S=۳/۱۴\times ۵\times ۴=۶۲/۸\,cm^{۲}$$

$$S_{\text{قاعده}}=\pi r'^{۲}=۳/۱۴\times ۴^{۲}=۵۰/۲۴\,cm^{۲} \Rightarrow S_{\text{کل}}=۶۲/۸+۵۰/۲۴=۱۱۳/۰۴\,cm^{۲}$$

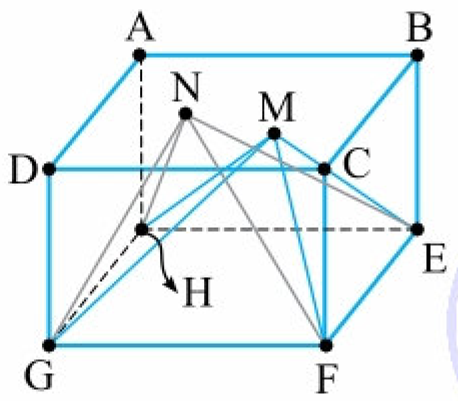
پرسش‌های تشریحی

۱۴ با توجه به شکل روبه‌رو، جاهای خالی را پر کنید.



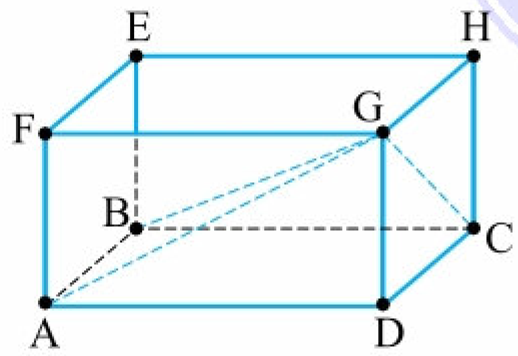
۱ تعداد رأس‌ها: ....
۲ تعداد وجوه: ....
۳ شکل قاعده: ....
۴ نام قاعده: ....
۵ نام رأس: ....
۶ شکل وجه‌های جانبی: ....
۷ ارتفاع: ....

۱۵ با توجه به شکل مقابل دو نقطهٔ M و N روی وجه ABCD را به نقاط G، F، E و H از وجه روبه‌رو وصل کرده‌ایم. در این صورت اختلاف حجم هرم‌های MEFGF و NEFGH چه‌قدر است؟



نتیجه: اگر دو هرم دارای قاعده‌های .... و ارتفاع‌های .... باشند، حجم آن‌ها با هم برابر است.

۱۶ با توجه به شکل مقابل حجم هرم GABCD چه کسری از حجم مکعب‌مستطیل داده شده است؟



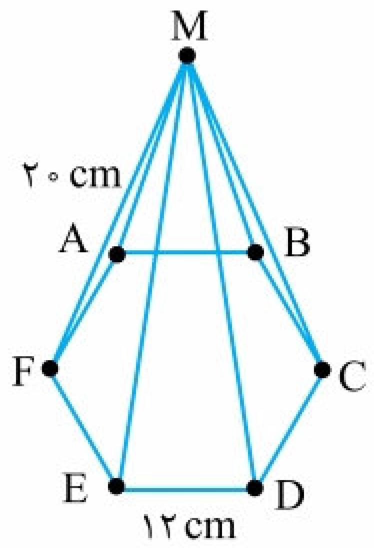
۱۷ حجم هر یک از هرم‌های زیر را به دست آورید.

۱ هرمی مربع‌القاعده به ارتفاع ۴ که قطر قاعدهٔ آن برابر $۶\sqrt{۲}$ است.
۲ هرمی با قاعدهٔ مثلث به طول ضلع‌های ۷، ۲۴ و ۲۵ و ارتفاع ۹
۳ هرمی با قاعدهٔ ۶ ضلعی منتظم به طول ضلع ۳ و ارتفاع ۸

۱۸ هرمی مربع‌القاعده که وجه‌های آن مثلث‌های متساوی‌الساقین هستند را در نظر بگیرید. اگر طول ضلع‌های قاعده برابر ۶ و طول ساق‌های مثلث‌ها ۵ باشد، حجم هرم چه‌قدر است؟

۱۹ هرمی با قاعدهٔ مستطیل به ابعاد ۸ و ۱۲ داریم. اگر وجوه جانبی این هرم، مثلث‌های متساوی‌الساقین و حجم آن برابر ۲۵۶ واحد باشد، آن‌گاه طول یال‌هایی که رأس هرم را به رئوس قاعده وصل می‌کنند، چه‌قدر است؟

۲۰ هرمی با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع در نظر بگیرید. اگر طول اضلاع قاعده و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ این هرم به ترتیب برابر ۳۰، ۲۴ و ۱۰ سانتی‌متر باشند و ضمناً وجوه جانبی هرم مثلث‌های متساوی‌الساقین به طول ساق ۲۰ cm باشند، آن‌گاه حجم هرم چه‌قدر است؟



۲۱ در شکل مقابل هرمی منتظم با قاعدهٔ شش‌ضلعی نمایش داده شده است. با توجه به شکل:

۱ مساحت قاعدهٔ هرم چه‌قدر است؟

۲ طول ارتفاع وارد از نقطهٔ M بر ضلع CD در مثلث MCD چه‌قدر است؟

۳ اگر محل برخورد قطرهای شش‌ضلعی را O در نظر بگیریم، آن‌گاه طول ارتفاع وارد بر CD در مثلث OCD چه‌قدر است؟

۴ حجم هرم چه‌قدر است؟

۲۲ به هر کدام از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱ حجم مخروط به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۳ سانتی‌متر چه‌قدر است؟

۲ حجم مخروطی که شعاع قاعدهٔ آن برابر ۵ سانتی‌متر است، مساوی ۵۰π واحد شده است. ارتفاع مخروط چند سانتی‌متر است؟

۳ حجم مخروطی با ارتفاع ۱۲ واحد برابر ۱۲π شده است، محیط قاعدهٔ مخروط چه‌قدر است؟

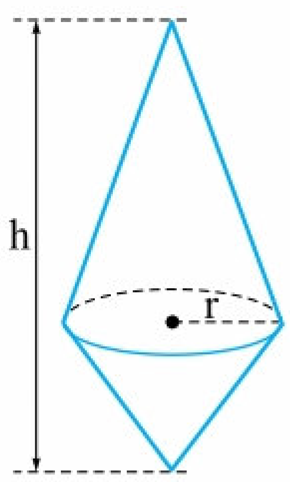
۲۳ یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۶ cm و ارتفاع ۲۰ cm را پر از آب کرده و سپس آب درون آن را داخل یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۴ cm خالی می‌کنیم تا استوانه سرریز شود. ارتفاع استوانه چه‌قدر است؟

۲۴ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

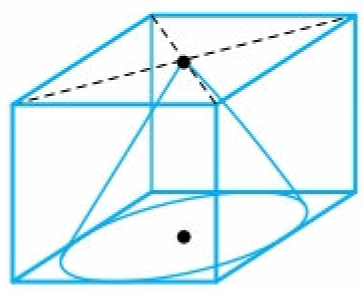
۱ اگر شعاع قاعدهٔ مخروط را ۳ برابر و ارتفاع آن را نصف کنیم، حجم مخروط چند برابر می‌شود؟

۲ اگر شعاع قاعدهٔ مخروط را ۲ برابر و ارتفاع آن را ۴ برابر کنیم، چند درصد به حجم مخروط اضافه می‌شود؟

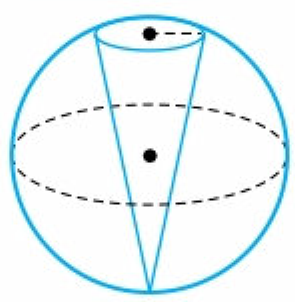
۲۵ شعاع قاعدهٔ مخروطی را $\frac{m}{۲}$ برابر می‌کنیم، ارتفاع آن را چند برابر کنیم تا حجم مخروط $m\sqrt{m}$ برابر شود؟



۲۶ اگر حجم شکل مقابل با حجم کره‌ای به شعاع r برابر باشد، آن‌گاه نسبت مجذور h به مساحت قاعدهٔ یکی از مخروط‌ها چه‌قدر است؟



۲۷ مطابق شکل روبه‌رو یک مخروط درون مکعبی به طول ضلع ۸ واحد محاط شده است. اگر مخروط را از مکعب خارج کنیم، چند واحد از حجم مکعب کم می‌شود؟



۲۸ با توجه به شکل مقابل اگر قطر کره برابر ۲۶ و شعاع قاعدهٔ مخروط محاط در آن ۵ واحد باشد، آن‌گاه حجم مخروط چه‌قدر از حجم کره کم‌تر است؟ $(\pi = ۳)$

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۲۵ اتاقی به شکل منشور، با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم داریم. اگر از نقطه‌ای روی سقف اتاق، شش نخ به رأس‌های کف اتاق وصل کنیم، حجم هرم به وجود آمده، چند برابر حجم اتاق خواهد بود؟ (نمونه‌دولتی ـ کردستان ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

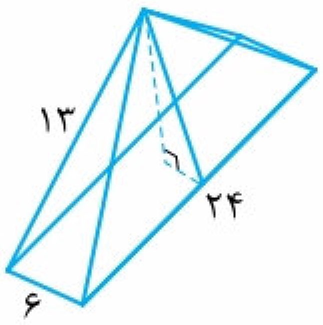
۲۶ حجم یک هرم به ارتفاع ۳۰ برابر ۳۶۰ واحد است. اگر سطح قاعدهٔ این هرم مستطیلی باشد که طول آن دو برابر عرضش است، آن‌گاه محیط این مستطیل چه‌قدر است؟

۱) $۹\sqrt{۲}$ ۲) $۱۲\sqrt{۲}$ ۳) $۱۵\sqrt{۲}$ ۴) $۱۸\sqrt{۲}$

۲۷ قاعدهٔ یک هرم، شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ می‌باشد. اگر ارتفاع آن $۱۰\sqrt{۳}$ باشد، حجم هرم کدام است؟ (نمونه‌دولتی ـ سمنان ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) ۷۲۰ ۳) $۷۲۰\sqrt{۳}$ ۴) ۲۴۰

۲۸ حجم شکل زیر برابر کدام گزینه است؟ *(نمونه‌دولتی ـ گیلان ـ ۹۷ ـ ۹۶)*



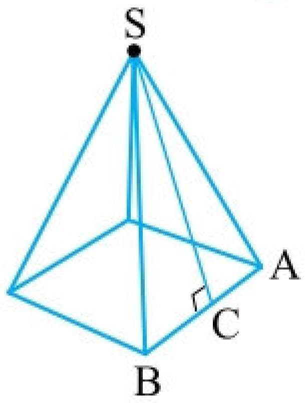
۱) ۱۹۲

۲) ۱۲۹

۳) ۲۲۹

۴) ۱۹۶

۲۹ در هرم مربعی منتظم زیر $SA = \sqrt{۳۴}$ و $SC = ۵$. حجم هرم کدام است؟ *(نمونه‌دولتی ـ ایلام ـ ۹۷ ـ ۹۶)*



۱) ۵۶

۲) ۵۲

۳) ۵۴

۴) ۴۸

۳۰ هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای، دارای ضلع قاعدهٔ ۶ cm و یال هرم ۱۰ cm می‌باشد. حجم هرم کدام است؟ *(نمونه‌دولتی ـ آذربایجان شرقی ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

۱) $\frac{۷۲\sqrt{۸۲}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۸۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۳۶\sqrt{۸۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۱۸\sqrt{۸۲}}{۳}$

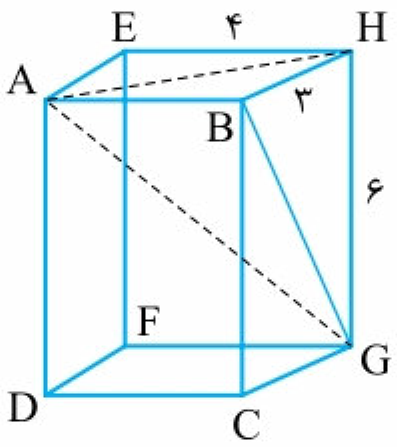
۳۱ قاعدهٔ یک هرم منتظم، مربعی به ضلع ۶ است. اگر وجه‌های این هرم مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، حجم هرم کدام است؟

۱) $۱۸\sqrt{۲}$ ۲) $۲۴\sqrt{۲}$ ۳) $۳۶\sqrt{۲}$ ۴) $۷۲\sqrt{۲}$ *(نمونه‌دولتی ـ قم ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

۳۲ یک هرم منتظم با قاعدهٔ چهارضلعی و مساحت قاعدهٔ ۳۶ سانتی‌متر مربع داریم. اگر ارتفاع هرم ۴ سانتی‌متر باشد، مساحت جانبی هرم چند سانتی‌متر مربع است؟ *(نمونه‌دولتی ـ خراسان رضوی ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

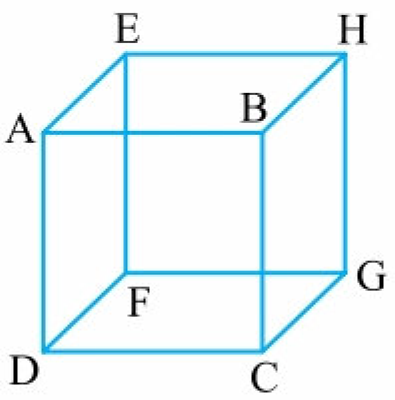
۳۳ با توجه به شکل مقابل حجم هرم ABGH چند برابر حجم کل مکعب‌مستطیل است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ برابر ۲) $\frac{۱}{۴}$ برابر

۳) $\frac{۱}{۶}$ برابر ۴) $\frac{۱}{۱۲}$ برابر

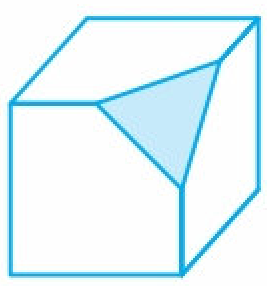
۳۴ محل برخورد قطرهای CE و DH از مکعب شکل مقابل را به رئوس وجه زیرین مکعب وصل می‌کنیم. اگر حجم هرم ایجادشده برابر ۳۶ واحد باشد، آن‌گاه مساحت کل مکعب چند واحد است؟



۱) ۲۷ واحد ۲) ۱۴۴ واحد

۳) ۲۱۶ واحد ۴) ۲۵۶ واحد

۳۵ حجم مکعب در شکل زیر برابر V است. طبق شکل از این مکعب ۸ هرم جدا گشته که رأس‌های هر یک از هرم‌ها بر یک رأس مکعب واقع شده و رئوس دیگر هرم بر وسط یال‌های مکعب قرار گرفته است. حجم چندوجهی باقی‌مانده چه‌قدر است؟ *(نمونه‌دولتی ـ آذربایجان شرقی ـ ۹۷ ـ ۹۶)*



۱) $\frac{۱}{V}$ ۲) $\frac{۲}{۳}V$

۳) $\frac{۳}{۴}V$ ۴) $\frac{۵}{۶}V$

۳۶ کدام گزینهٔ زیر درست است؟ *(نمونه‌دولتی ـ مازندران ـ ۹۶ ـ ۹۵)*

۱) حجم یک مخروط می‌تواند یک عدد گویا باشد. ۲) حجم یک کره همواره عددی گنگ است.

۳) حجم یک هرم همواره عددی گویاست. ۴) حجم یک مکعب همواره عددی گویاست.

۳۷ ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعدهٔ آن است. اگر حجم مخروط ۲۱۶π باشد، ارتفاع آن برابر است با: *(نمونه‌دولتی ـ فارس ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳۸ حجم کره‌ای به شعاع R، چند برابر حجم مخروطی به شعاع R و ارتفاع ۳R است؟ (نمونه‌دولتی ـ مرکزی ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}\pi$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}\pi$

۳۹ شعاع قاعدهٔ یک مخروط با شعاع قاعدهٔ یک استوانه برابر است. اگر ارتفاع استوانه نصف ارتفاع مخروط باشد، نسبت حجم استوانه به حجم مخروط برابر است با: (نمونه‌دولتی ـ زنجان ـ ۹۶ ـ ۹۵)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

۴۰ حجم کره‌ای به شعاع ۲a با حجم مخروطی به قطر قاعدهٔ ۸a برابر است. نسبت ارتفاع مخروط به شعاع قاعدهٔ آن چیست؟ (نمونه‌دولتی ـ یزد ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

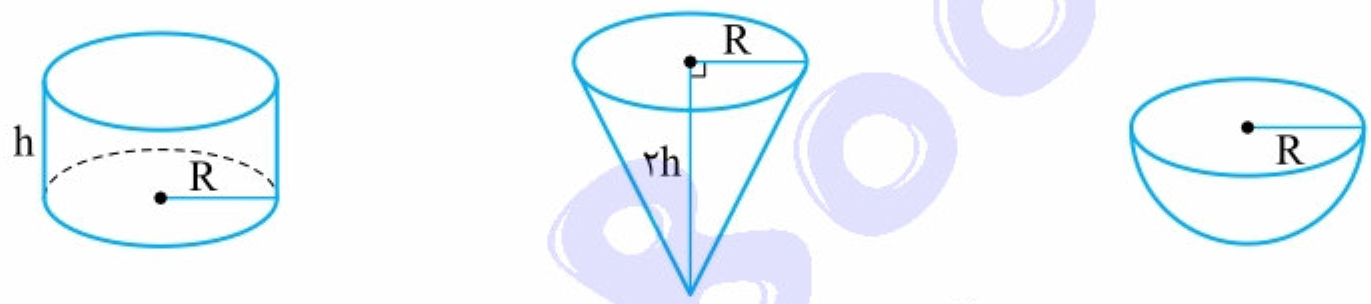
۴۱ شعاع قاعدهٔ مخروطی را ۳ برابر و ارتفاع آن را k برابر می‌کنیم، در این صورت حجم مخروط ۴۰۰٪ افزایش می‌یابد. مقدار عددی k کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$

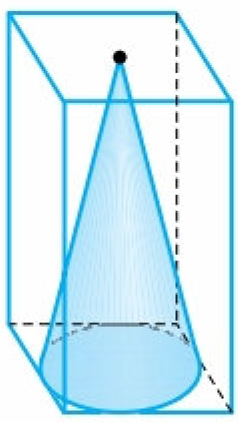
۴۲ یک استوانه و یک مخروط داریم. قطر قاعدهٔ استوانه برابر ۸ cm و ارتفاع مخروط برابر ۱۲ cm است. اگر مخروط را پر از آب کرده و آب داخل آن را در استوانه بریزیم، آب تا ارتفاع ۶ cm بالا می‌آید. قطر قاعدهٔ مخروط چه‌قدر است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۶}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $۶\sqrt{۶}$

۴۳ با توجه به شکل‌های زیر، اگر ظرف استوانه‌ای‌شکل را پر از آب کرده و در دو ظرف دیگر خالی کنیم، دو ظرف پر شده و هیچ آبی باقی نمی‌ماند. کدام رابطهٔ زیر درست است؟ (شعاع‌ها با هم مساوی و ارتفاع مخروط دو برابر ارتفاع استوانه است). (نمونه‌دولتی ـ مازندران ـ ۹۷ ـ ۹۶)

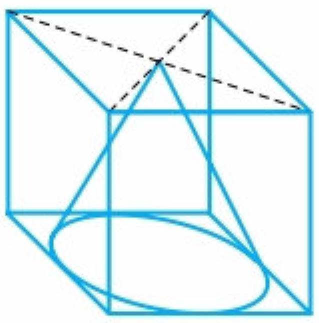


۱) $h = \frac{۲}{۳}R$ ۲) $h = \frac{۳}{۲}R$ ۳) $h = ۳R$ ۴) $h = ۲R$



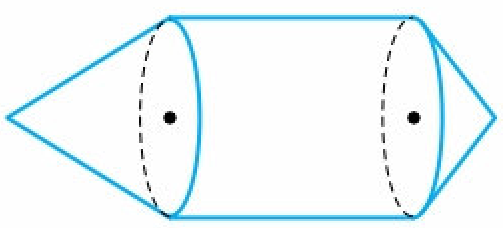
۴۴ مخروطی داخل یک مکعب‌مستطیل طوری قرار گرفته که قاعدهٔ آن محاط در قاعدهٔ مکعب‌مستطیل و رأس آن در محل برخورد قطرهای قاعدهٔ مکعب‌مستطیل قرار دارد. اگر شعاع قاعدهٔ مخروط r و ارتفاع آن h باشد، حجم فضای بین دو جسم چه‌قدر است؟ $(\pi \simeq ۳)$ (نمونه‌دولتی ـ زنجان ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $r^۲h$ ۲) $۲r^۲h$ ۳) $۳r^۲h$ ۴) $۴r^۲h$



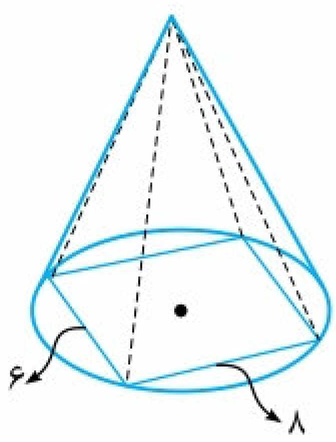
۴۵ مطابق شکل مقابل مخروطی درون یک مکعب طوری قرار گرفته که قاعدهٔ آن در قاعدهٔ مکعب محاط شده و رأس آن نیز محل تقاطع قطرهای قاعدهٔ دیگر مکعب است. اگر حجم فضای بین مکعب و مخروط برابر ۱۶ واحد باشد، آن‌گاه اختلاف مساحت قاعدهٔ مخروط و سطح جانبی مکعب چه‌قدر است؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰



۴۶ شکل مقابل از یک استوانه و دو مخروط تشکیل شده است و می‌دانیم ارتفاع مخروط سمت چپ دو برابر ارتفاع مخروط سمت راست و ارتفاع مخروط سمت چپ $\frac{۱}{۳}$ فاصلهٔ بین مرکز دو قاعدهٔ استوانه است. اگر استوانه و مخروط‌ها را از هم جدا کرده، سپس دو مخروط را پر آب کنیم و نهایتاً آب داخل مخروط‌ها را درون استوانه بریزیم، چه کسری از حجم استوانه خیس نمی‌شود؟

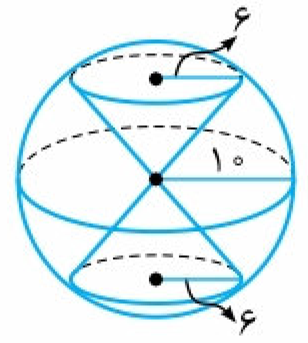
۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$



۴۷ هرمی با قاعدهٔ مستطیل و ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر درون یک مخروط محاط شده است. حجم فضای بین مخروط و هرم چه‌قدر است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۱۹۲ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۶۴ ۴) ۳۰۰

۴۸ **مطابق شکل مقابل دو مخروط به شعاع قاعدهٔ ۶ واحد درون کره‌ای به شعاع ۱۰ واحد محاط شده‌اند. حجم فضای بین مخروط‌ها و کره چه‌قدر است؟ $(\pi = ۳)$**



۱) ۱۴۴۰ ۲) ۲۰۴۸

۳) ۳۴۲۴ ۴) ۳۸۹۶

۴۹ **هرمی منتظم در نظر بگیرید که قاعدهٔ آن شش‌ضلعی و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقین هستند. اگر طول ضلع‌های قاعده برابر ۲ واحد و طول یال‌های وجه‌های جانبی برابر ۸ واحد باشند، آن‌گاه حجم هرم چه‌قدر است؟**

۱) $۶\sqrt{۲۰}$ ۲) $۴\sqrt{۲۰}$ ۳) $۳\sqrt{۲۰}$ ۴) $۲\sqrt{۲۰}$

۵۰ **هرمی با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم در نظر بگیرید که وجه‌های آن مثلث‌های متساوی‌الساقین‌اند. اگر طول ساق‌های این مثلث‌ها $\frac{۳}{۲}$ برابر طول ضلع‌های قاعده باشد، در این صورت ارتفاع هرم چند برابر قطر بزرگ قاعده است؟**

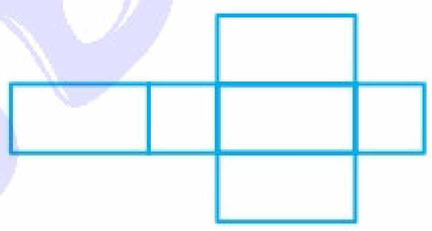
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ۴) $\sqrt{۲}$

درس سوم: سطح و حجم

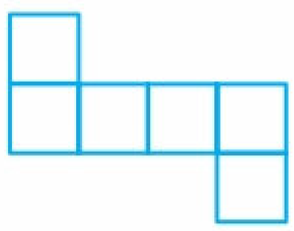
در دو درس قبل با کره‌ها، منشورها و هرم‌ها آشنا شدیم و ویژگی‌های هر یک از آن‌ها را به طور جداگانه مورد بررسی قرار دادیم. در این درس ابتدا می‌خواهیم با یادآوری مطالب مربوط به مکعب‌مربع و مکعب‌مستطیل به بررسی بعضی از ویژگی‌های آن‌ها بپردازیم و سپس با حجم‌های حاصل از دوران اشکال هندسی حول یک ضلعشان آشنا شویم.

مکعب مربع و مکعب مستطیل

مکعب‌مربع و مکعب‌مستطیل اولین حجم‌هایی هستند که ما در دنیای ریاضیات با آن‌ها آشنا شدیم. *(فکر کنم سال سوم دبستان بود! یادش بخیر)* گستردهٔ یک مکعب‌مربع و یک مکعب‌مستطیل در زیر رسم شده است.



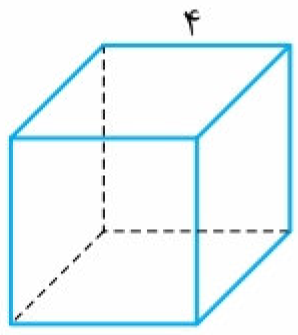
گستردهٔ مستطیل



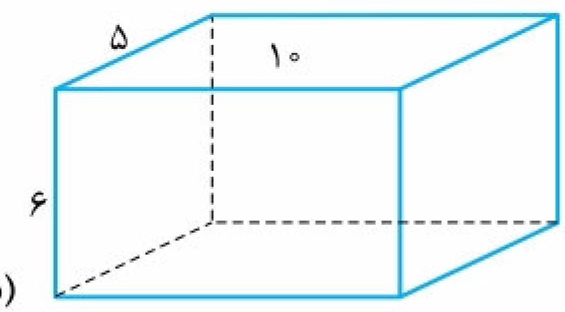
گستردهٔ مکعب

برای محاسبهٔ مساحت مکعب‌مربع و مکعب‌مستطیل می‌توانیم از گستردهٔ آن‌ها استفاده کنیم.

مثال **با توجه به اندازه‌های مکعب و مکعب‌مستطیل، اندازهٔ ضلع‌ها را در گستردهٔ آن‌ها مشخص کرده و سپس مساحت و حجم هر یک را محاسبه کنید.**

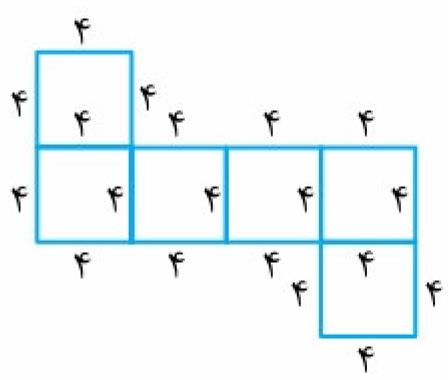


الف)



ب)

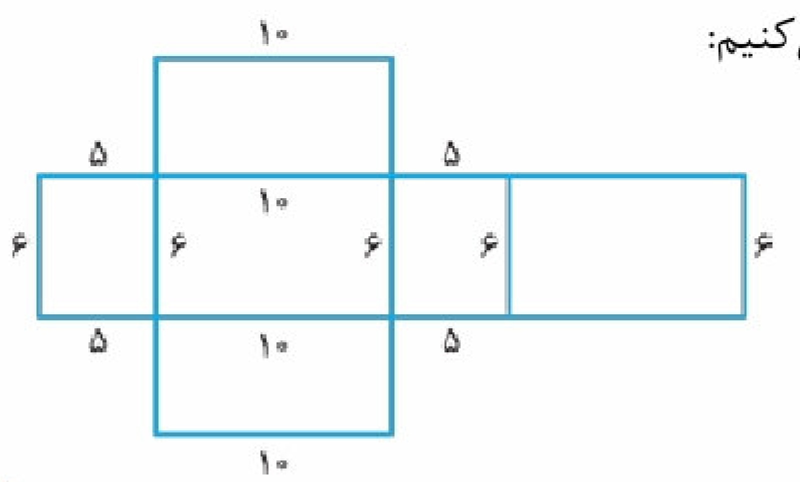
پاسخ الف ابتدا گستردهٔ مکعب‌مربع را رسم می‌کنیم و اندازهٔ هر ضلع را مشخص می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینید این گسترده از ۶ مربع به ضلع ۴ تشکیل شده است، بنابراین داریم:



$$S = ۶ \times \underbrace{(۴ \times ۴)}_{\text{مساحت هر مربع}} = ۶ \times ۱۶ = ۹۶$$

حجم مکعب‌مربع هم برابر با $۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$ است.

ب گستردهٔ مکعب‌مستطیل را رسم کرده و اندازهٔ هر یک از ضلع‌ها را مشخص می‌کنیم:



با توجه به گستردهٔ شکل می‌توانیم مساحت مکعب‌مستطیل را محاسبه کنیم.

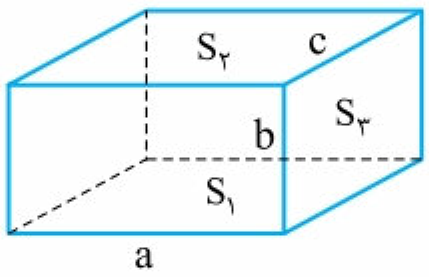
$$S_{\text{مکعب‌مستطیل}} = ۲ \times ((۶ \times ۵) + (۵ \times ۱۰) + (۶ \times ۱۰))$$

$$= ۲ \times (۳۰ + ۵۰ + ۶۰) = ۲ \times (۱۴۰) = ۲۸۰$$

$$V_{\text{مکعب‌مستطیل}} = ۱۰ \times ۶ \times ۵ = ۳۰۰$$

مثال **مکعب‌مستطیلی داریم که مساحت وجه‌های آن به ترتیب ۵۰، ۷۰ و ۳۵ است. حجم این مکعب‌مستطیل را بیابید.**

پاسخ فرض کنید طول، عرض و ارتفاع این مکعب‌مستطیل به ترتیب a، b و c باشد.



با توجه به شکل داریم:

$S_۱ = ab = ۵۰$

$S_۲ = ac = ۷۰$

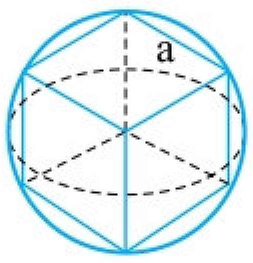
$S_۳ = bc = ۳۵$

از طرف دیگر می‌دانیم حجم مکعب‌مستطیل برابر است با: $V_{\text{مکعب‌مستطیل}} = a \times b \times c$

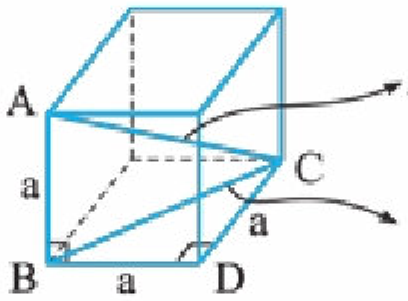
حال داریم: $S_۱ \times S_۲ \times S_۳ = ab \times ac \times bc = a^۲b^۲c^۲ \Rightarrow V^۲ = ۵۰ \times ۷۰ \times ۳۵ \Rightarrow V = \sqrt{۵۰ \times ۷۰ \times ۳۵} = ۳۵۰$

نتیجه اگر مساحت سه وجه مکعب‌مستطیلی به ترتیب A، B و C باشد، آن‌گاه حجم آن برابر است با: $V = \sqrt{A \times B \times C}$

مثال **مکعب‌مربعی به ضلع a در داخل کره‌ای محاط شده است. نسبت حجم کره به مکعب را به دست آورید.**



پاسخ شکل روبه‌رو، مکعبی به ضلع a را نشان می‌دهد که درون کره‌ای محاط است. برای پاسخ به این سؤال باید قطر مکعب (یعنی AC) که برابر قطر کره است را به دست آوریم. به شکل زیر دقت کنید:



$AC^۲ = BC^۲ + AB^۲ = (\sqrt{۲}a)^۲ + a^۲ = ۲a^۲ + a^۲ = ۳a^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۳}a$

$BC^۲ = a^۲ + a^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۲a^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۲}a$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید هر دو مثلث $\overset{\Delta}{BCD}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه هستند، پس برای به دست آوردن طول وتر آن‌ها از رابطهٔ فیثاغورس استفاده کردیم. حالا با داشتن اندازهٔ قطر کره $(AC = \sqrt{۳}a)$، حجم کره را به دست می‌آوریم:

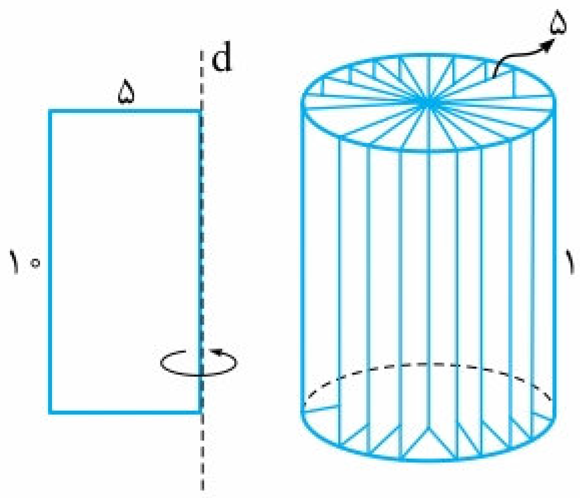
$$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳} \times \pi \times (\sqrt{۳}a)^۳ = \frac{۴}{\cancel{۳}} \times \pi \times \cancel{۳}\sqrt{۳}a^۳ = ۴\sqrt{۳}\pi a^۳$$

$$V_{\text{مکعب}} = a \times a \times a = a^۳ \Rightarrow \frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{۴\sqrt{۳}\pi \cancel{a^۳}^{\,۱}}{\cancel{a^۳}_{\,۱}} = ۴\sqrt{۳}\pi$$

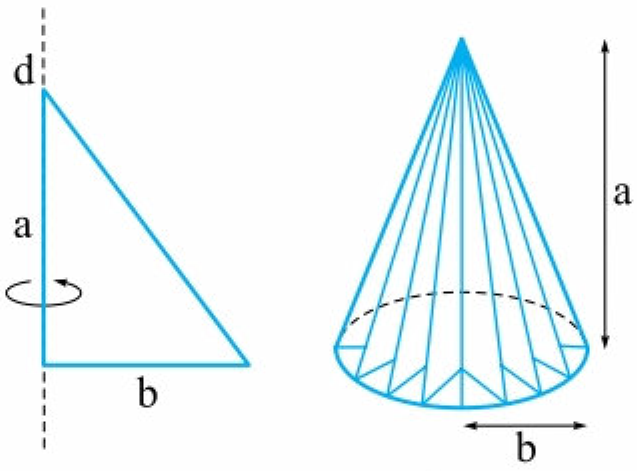
نتیجه اندازهٔ قطر مکعبی به ضلع a برابر $\sqrt{۳}a$ و اندازهٔ قطر هر وجه آن برابر $\sqrt{۲}a$ است.

حجم‌های حاصل از دوران

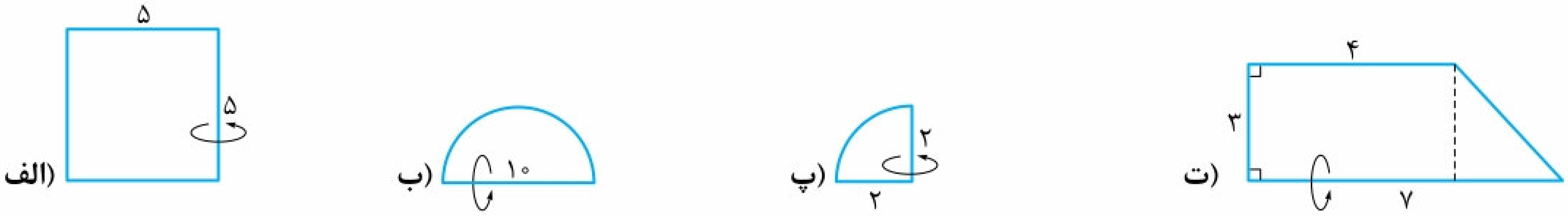
به وسیلهٔ دوران اشکال هندسی حول اضلاعشان، حجم‌های متفاوتی به دست می‌آیند. به شکل روبه‌رو نگاه کنید:



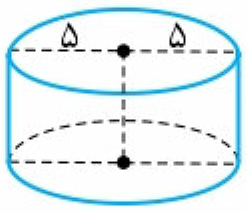
همان‌طور که می‌بینید از این دوران استوانه‌ای به شعاع ۵ و ارتفاع ۱۰ به دست می‌آید. هم‌چنین از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول هر یک از اضلاع قائمه آن، مخروطی به ارتفاع طول آن ضلع و شعاع ضلع قائمهٔ دیگر به دست می‌آید.



مثال اگر هر یک از شکل‌های زیر را حول ضلع مشخص‌شده دوران دهیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ اندازهٔ حجم آن را محاسبه کنید.

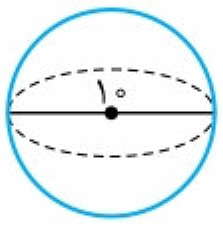


پاسخ **الف** شکل حاصل از دوران مربعی به ضلع ۵ مطابق شکل زیر استوانه‌ای به شعاع ۵ و ارتفاع ۵ است، بنابراین حجم این استوانه برابر است با:



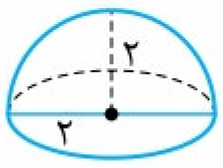
$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h \xrightarrow[h=5]{r=5} V_{\text{استوانه}} = \pi(5)^2 \times 5 = 125\pi$$

ب از دوران نیم‌دایره‌ای به قطر ۱۰، کره‌ای به قطر ۱۰ پدید می‌آید.



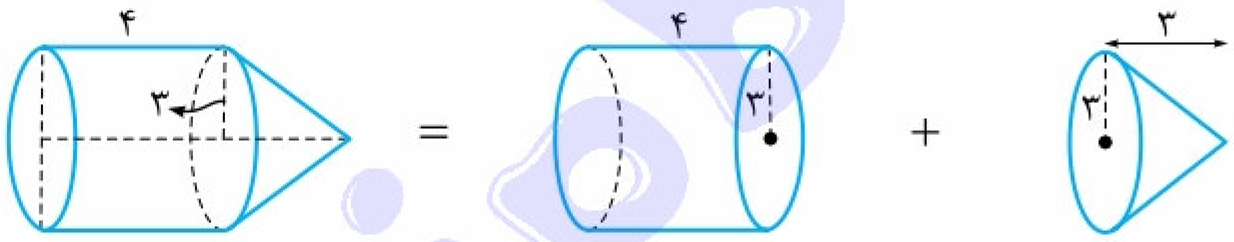
$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \xrightarrow{R=\frac{10}{2}=5} V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi \times (5)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 125 = \frac{500}{3}\pi$$

پ حاصل دوران ربع دایره‌ای به شعاع ۲، نیم‌کره‌ای به شعاع ۲ است.



$$V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{V_{\text{کره}}}{2} = \frac{\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3}\pi R^3}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \xrightarrow{R=2} V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{2}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{16}{3}\pi$$

ت همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، حجم حاصل از دوران ذوزنقهٔ داده‌شده در سؤال، حجمی هندسی حاصل از تجمیع یک استوانه و یک مخروط است. حجم آن‌ها را به طور جداگانه محاسبه و با هم جمع می‌کنیم.



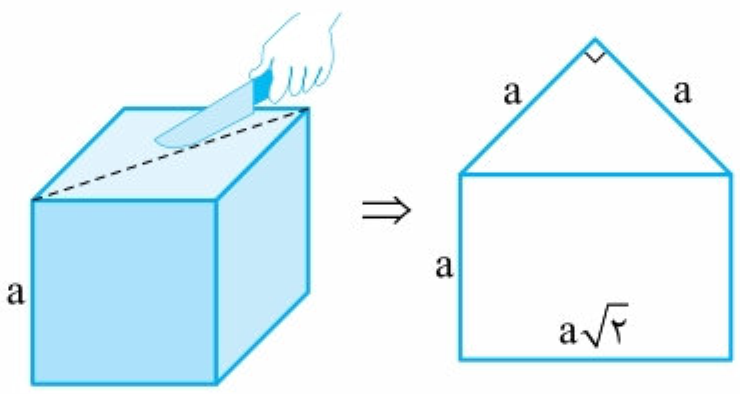
$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h \xrightarrow[h=4]{r=3} V_{\text{استوانه}} = \pi \times (3)^2 \times 4 = \pi \times 9 \times 4 = 36\pi$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}Sh' = \frac{1}{3}(\pi r^2)h' \xrightarrow[r=3]{h'=3} \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}(\pi \times 3^2) \times \overset{1}{\cancel{3}} = 9\pi$$

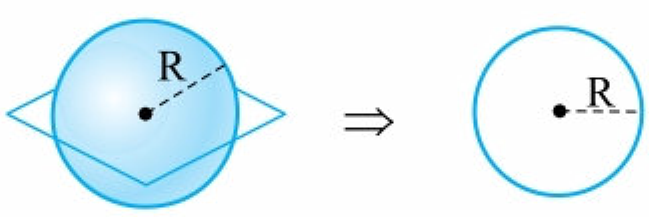
$$V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} + V_{\text{مخروط}} = 36\pi + 9\pi = 45\pi$$

سطح حاصل از برش احجام هندسی

به مکعب‌مربع شکل زیر نگاه کنید. فرض کنید می‌خواهیم این مکعب را مطابق خط‌چین‌های کشیده‌شده روی وجه بالای آن ببریم. (*یا اصطلاحاً برش بزنیم.*) آن‌گاه سطحی از شکل که بعد از برش دیده می‌شود، مطابق شکل سمت راست است که مستطیل است.

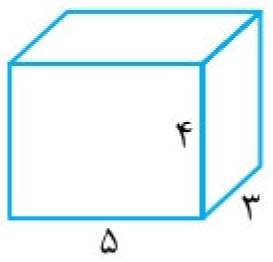


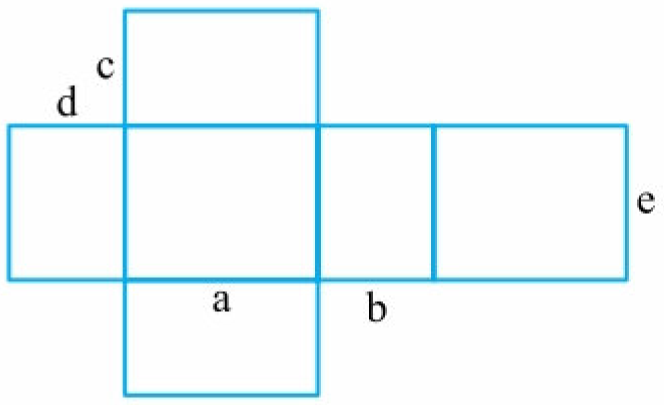
هم‌چنین اگر بخواهیم کره‌ای به شعاع r را مطابق شکل زیر برش بزنیم، دایره‌ای به شعاع r به دست خواهد آمد.



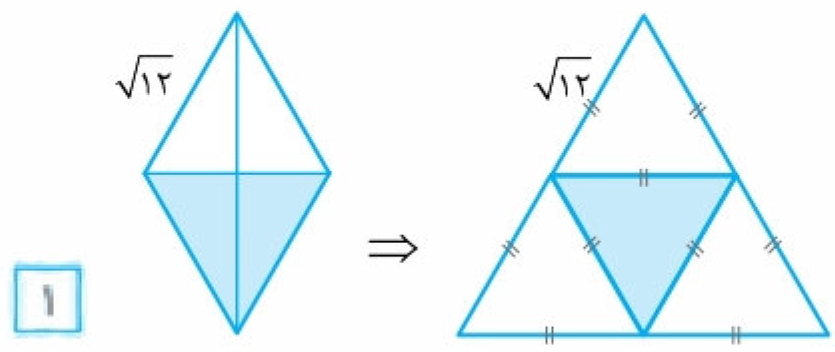
پرسش‌های تشریحی

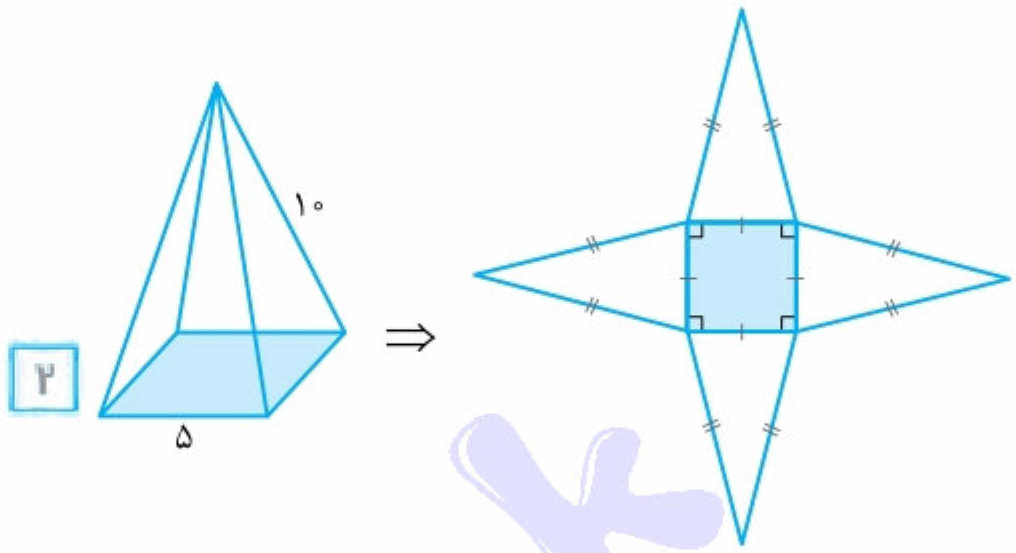
۲۹ در شکل مقابل گستردهٔ مکعب‌مستطیل داده‌شده به ابعاد ۵، ۴ و ۳ را مشاهده می‌کنیم. ابتدا مقادیر a، b، c، d و e را تعیین کرده و سپس مساحت گستردهٔ مکعب‌مستطیل را به دست آورید.





۳۰ مساحت گستردهٔ هر یک از هرم‌های زیر را با توجه به اندازه‌های داده‌شده حساب کنید.





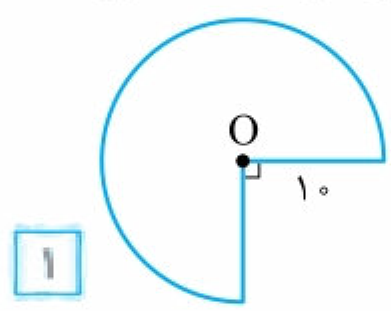
۳۱ گستردهٔ هرمی منتظم با قاعدهٔ شش‌ضلعی به طول ۱۲ سانتی‌متر را که قاعده‌های آن مثلث‌های متساوی‌الساقین به طول ضلع ۱۸ سانتی‌متر هستند، رسم کرده و سپس مساحت گسترده را به دست آورید.

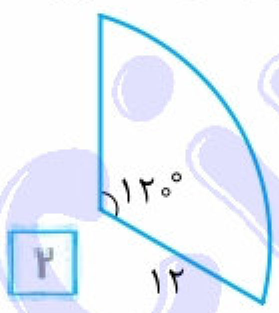
۳۲ مساحت کل هر یک از شکل‌های زیر را به دست آورید.

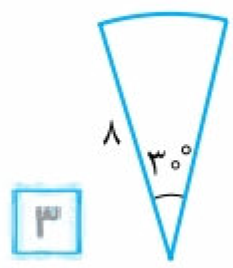
۱ هرمی منتظم با قاعدهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۶ و طول یال جانبی ۵

۲ هرمی منتظم با قاعدهٔ مربع به طول ضلع ۱۸ و ارتفاع ۱۲

۳۳ در هر یک از حالت‌های زیر با قسمتی از دایره، بزرگ‌ترین مخروط ممکن را درست می‌کنیم. شعاع قاعدهٔ هر مخروط را به دست آورید.



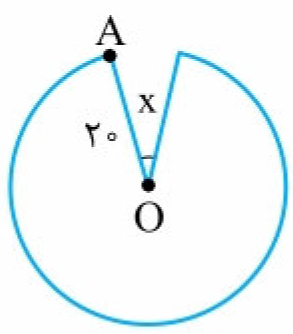




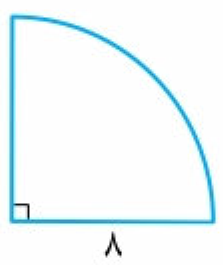
۳۴ با $\frac{۳}{۸}$ یک دایرهٔ کامل، مخروطی درست کرده‌ایم که مساحت قاعدهٔ آن 16π واحد است. مساحت دایرهٔ اولیه چه‌قدر است؟

۳۵ با قسمتی از یک دایره به مرکز O و شعاع ۲۰ بزرگ‌ترین مخروط ممکن را درست کرده‌ایم.

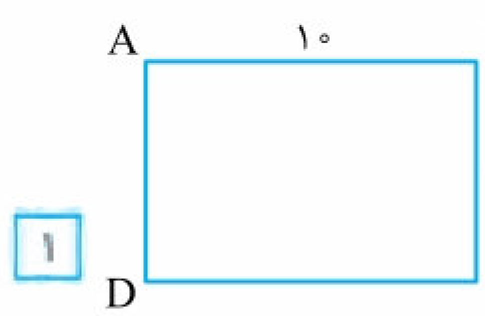
اگر شعاع قاعدهٔ این مخروط $\frac{۵۵}{۳}$ باشد، آن‌گاه زاویهٔ x چند درجه است؟



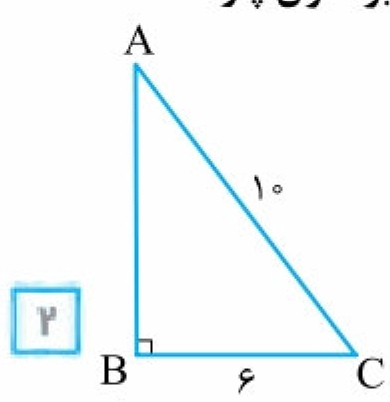
۳۶ با ربع دایرهٔ مقابل بزرگ‌ترین مخروط ممکن را می‌سازیم. حجم این مخروط چه‌قدر است؟



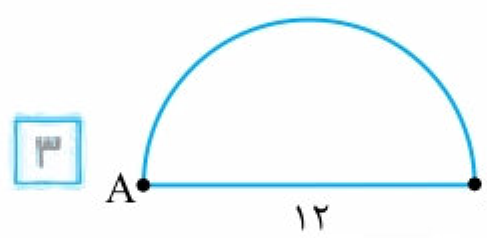
۳۷ حجم شکل حاصل از دوران شکل‌های زیر حول پاره‌خط داده‌شده را به دست آورید.



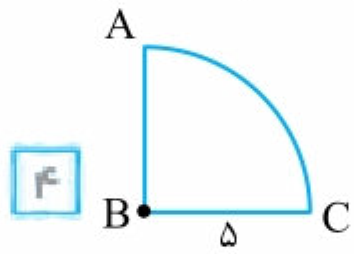
(حول BC)



(حول AB)



(حول AB)

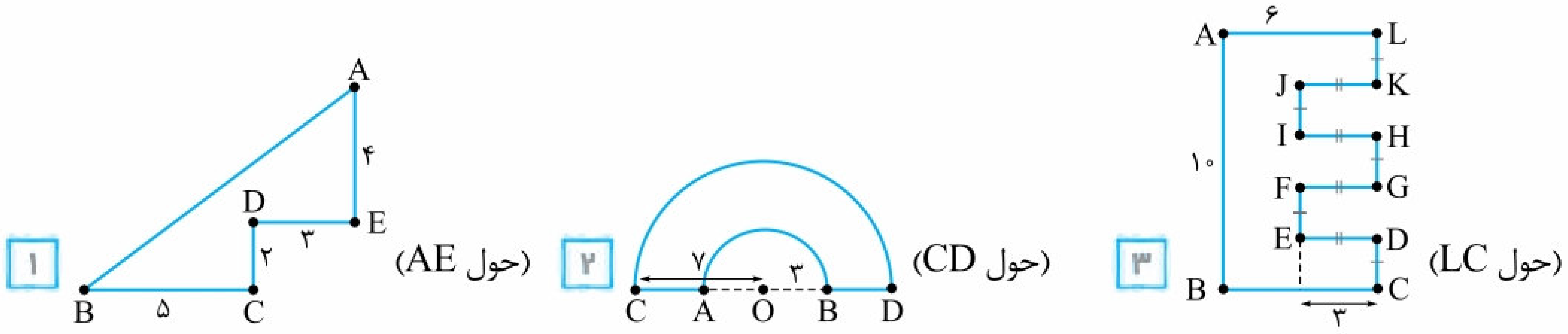


(حول AB)

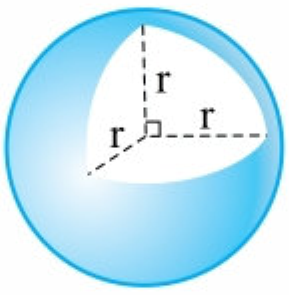
۳۸ مثلثی به طول اضلاع ۲۶، ۲۴ و ۱۰ را حول بزرگ‌ترین ضلع دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چه‌قدر می‌شود؟

۳۹ مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ را حول یکی از اضلاعش دوران می‌دهیم. حجم شکل ایجادشده چه‌قدر است؟

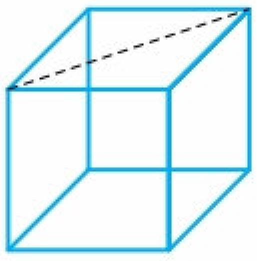
۴۰ حجم هر یک از شکل‌های زیر پس از دوران را به دست آورید.



۴۱ مطابق شکل مقابل قسمتی از یک کره را برداشته‌ایم. اگر سطح کل باقی‌مانده برابر ۷۰π باشد، آن‌گاه چه حجمی از کره را برداشته‌ایم؟

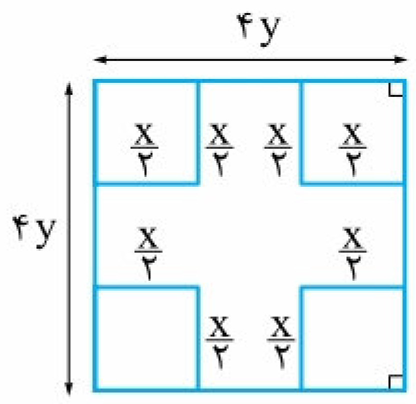


۴۲ مطابق شکل مقابل یک مکعب را از قسمت خط‌چین از بالا تا پایین می‌بریم. اگر حجم شکل باقی‌مانده برابر ۱۰۸ واحد باشد، آن‌گاه سطح این شکل چه‌قدر می‌شود؟



۴۳ نسبت حجم به سطح یک کره به شعاع $۳r$ با نسبت سطح به حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r برابر است. اگر ارتفاع استوانه $\frac{۲}{۳}$ قطر کره باشد، آن‌گاه اختلاف حجم کره و استوانه چه‌قدر است؟

۴۴ از گوشه‌های یک مقوا به شکل روبه‌رو، چهار مربع به ضلع $\frac{x}{۲}$ بریده و با شکل باقی‌مانده یک جعبه می‌سازیم. اگر کف این جعبه، ۸۱ کره به شعاع قاعدهٔ $\frac{۲x}{۳}$ جای بگیرد، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟



پرسش‌های چندگزینه‌ای

۵۱ با سطح مثلث‌شکلی به ضلع $۲۰\ cm$، یک چهاروجهی منتظم ساخته‌ایم. مساحت جانبی آن چه‌قدر است؟

(نمونه‌دولتی ـ زنجان ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $۱۰۰\sqrt{۳}$
۲) $۲۵\sqrt{۳}$
۳) $۵۰\sqrt{۳}$
۴) $۷۵\sqrt{۳}$

۵۲ مساحت کل هرم منتظمی که قاعدهٔ آن مثلث و طول هر یال آن ۴ سانتی‌متر باشد، چند سانتی‌متر مربع است؟

(نمونه‌دولتی ـ چهارمحال و بختیاری ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $۱۶\sqrt{۳}$
۴) $۱۶\sqrt{۲}$

۵۳ حجم کره‌ای به قطر $۲\sqrt{۳}a$ چند برابر سطح کل چهاروجهی منتظم به طول یال $۳a$ است؟ (برحسب a)

۱) $\frac{۹\pi a}{۴}$
۲) $\frac{۴\pi a}{۹}$
۳) $\frac{۲\pi a}{۳}$
۴) $\frac{۳\pi a}{۲}$

۵۴ مساحت کل یک هرم منتظم $۹۶\ cm^۲$ است. اگر قاعدهٔ این هرم، مربعی به ضلع $۶\ cm$ باشد، اندازهٔ ارتفاع هرم چند سانتی‌متر است؟ (نمونه‌دولتی ـ مازندران ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $۳\ cm$
۲) $۴\ cm$
۳) $۵\ cm$
۴) $۶\ cm$

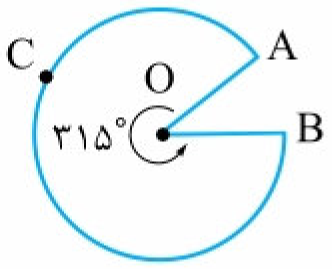
۵۵ هرم منتظمی داریم که قاعدهٔ آن مربعی به ضلع $۶\ cm$ است. اگر مساحت جانبی این هرم $۶۰\ cm^۲$ باشد، حجم هرم چه‌قدر است؟ (نمونه‌دولتی ـ تهران ـ ۹۶ ـ ۹۵)

۱) ۳۶
۲) ۱۲
۳) ۴۸
۴) ۲۴

۵۶ مساحت جانبی هرم منتظمی با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۱۰ سانتی‌متر و اندازهٔ یال ۱۳ سانتی‌متر کدام است؟ (نمونه‌دولتی ـ ۹۶ ـ ۹۵)

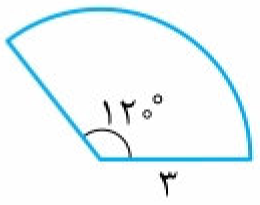
۱) $۱۸۰\ cm^۲$
۲) $۲۴۰\ cm^۲$
۳) $۳۶۰\ cm^۲$
۴) $۳۹۰\ cm^۲$

۵۷ فرض کنید مساحت دایرهٔ زیر برابر با ۴۰۰π باشد. در این صورت با توجه به شکل، طول کمان ACB کدام است؟ (O مرکز دایره است) (نمونه‌دولتی ـ آذربایجان غربی ـ ۹۶ ـ ۹۵)



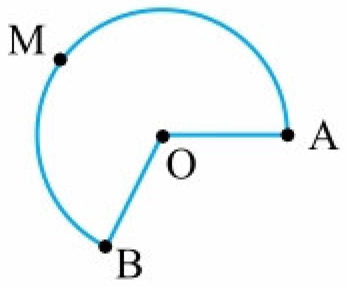
۱) ۱۵π
۲) ۲۵π
۳) ۳۵π
۴) ۴۵π

۵۸ با قطاعی از دایره، مانند شکل زیر، مخروطی ساخته‌ایم. مساحت کل مخروط برابر است با: (نمونه‌دولتی ـ آذربایجان شرقی ـ ۹۷ ـ ۹۶)



۱) π
۲) ۲π
۳) ۳π
۴) ۴π

۵۹ با برشی از دایره مطابق شکل، مخروطی ساخته‌ایم. اگر حجم مخروط ۲۸۸ و ارتفاع آن ۸ باشد، اندازهٔ کمان AMB چند درجه است؟ $(\pi = ۳)$ (نمونه‌دولتی ـ تهران ـ ۹۷ ـ ۹۶)



۱) ۲۱۶ درجه
۲) ۲۰۰ درجه
۳) ۱۹۷ درجه
۴) ۲۳۰ درجه

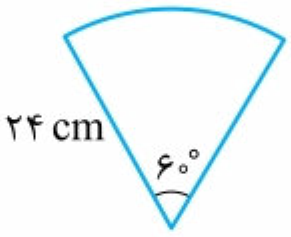
۶۰ نیم‌کره‌ای به شعاع ۶ سانتی‌متر در نظر بگیرید. با چه کسری از یک دایره به شعاع ۱۲ سانتی‌متر می‌توان یک مخروط درست کرد که سطح جانبی آن برابر سطح کل نیم‌کره باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۶۱ با $\frac{۳}{۵}$ یک دایرهٔ کامل، مخروطی درست کرده‌ایم که ارتفاع آن دو برابر شعاع قاعدهٔ آن است. اگر طول یال این مخروط ۳ واحد باشد، آن‌گاه مساحت دایرهٔ اولیه چه‌قدر بوده است؟

۱) ۳π
۲) ۴π
۳) ۵π
۴) ۶π

۶۲ به کمک قسمتی از یک دایره (مطابق شکل زیر) یک مخروط درست کرده‌ایم. حجم این مخروط چه‌قدر است؟ $(\pi \simeq ۳)$

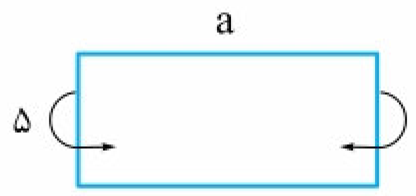


۱) $۱۰۸\sqrt{۱۵}$
۲) $۱۲۸\sqrt{۳۵}$
۳) $۶۴\sqrt{۳۵}$
۴) $۵۴\sqrt{۱۵}$

۶۳ یک نیم‌دایره را به شکل یک قیف مخروطی‌شکل درمی‌آوریم. (برای این کار، دو شعاع نیم‌دایره را که در امتداد هم هستند، بر هم منطبق می‌کنیم.) زاویهٔ رأس این مخروط چند درجه است؟ (نمونه‌دولتی ـ مرکزی ـ ۹۷ ـ ۹۶)

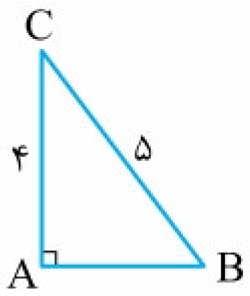
۱) ۴۵°
۲) ۶۰°
۳) ۳۰°
۴) به شعاع نیم‌دایره بستگی دارد.

۶۴ با گردکردن مستطیل زیر، بزرگ‌ترین استوانهٔ ممکن را ساخته‌ایم، اگر حجم این استوانه برابر ۳۲۰π باشد، آن‌گاه مساحت جانبی آن چه‌قدر است؟



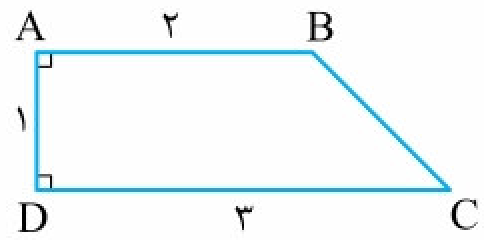
۱) ۱۰۰π ۲) ۸۰π
۳) ۶۰π ۴) ۴۰π

۶۵ حجم حاصل از دوران مثلث زیر حول ضلع AB کدام است؟ *(نمونه‌دولتی ـ شهرستان‌های تهران ـ ۹۷ ـ ۹۶)*



۱) ۱۰π
۲) ۱۲π
۳) ۱۶π
۴) ۲۰π

۶۶ حجم حاصل از دوران ذوزنقهٔ زیر، حول ضلع DC چند سانتی‌متر مکعب است؟ *(نمونه‌دولتی ـ کردستان ـ ۹۷ ـ ۹۶)*

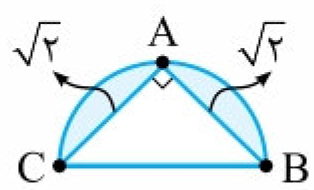


۱) ۳π ۲) $\frac{۷}{۳}\pi$
۳) $\frac{۱۳}{۳}\pi$ ۴) $\frac{۴}{۳}\pi$

۶۷ اگر یک متوازی‌الاضلاع به ضلع‌های ۹ و ۶ سانتی‌متر و ارتفاع ۴ سانتی‌متر را حول ضلع بزرگ‌تر دوران دهیم، حجم حاصل از دوران چند سانتی‌متر مکعب است؟ *(نمونه‌دولتی ـ خراسان رضوی ـ ۹۷ـ ۹۶)*

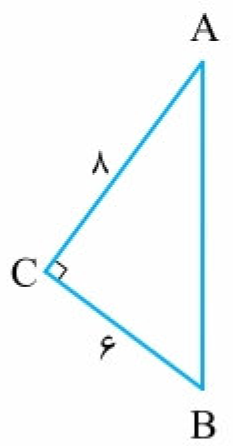
۱) ۷۲π ۲) ۱۰۸π
۳) ۱۴۴π ۴) ۳۲۴π

۶۸ حجم حاصل از دوران قسمت رنگی حول BC کدام است؟ *(نمونه‌دولتی ـ تهران ـ ۹۷ ـ ۹۶)*



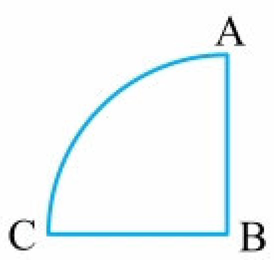
۱) $\frac{۴}{۳}\pi$ ۲) π
۳) $\frac{۲}{۳}\pi$ ۴) ۸π

۶۹ از دوران شکل مقابل حول ضلع AB چه شکلی ایجاد می‌شود و حجم آن چه‌قدر است؟



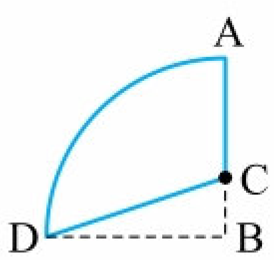
۱) دو مخروط هم‌رأس ـ $\frac{۴۸\pi}{۵}$ ۲) دو مخروط هم‌رأس ـ $\frac{۳۸۴\pi}{۵}$
۳) دو مخروط هم‌قاعده ـ $\frac{۴۸\pi}{۵}$ ۴) دو مخروط هم‌قاعده ـ $\frac{۳۸۴\pi}{۵}$

۷۰ ربع دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر را به اندازهٔ ۲۷۰° حول شعاع AB دوران می‌دهیم، حجم حاصل چه‌قدر می‌شود؟



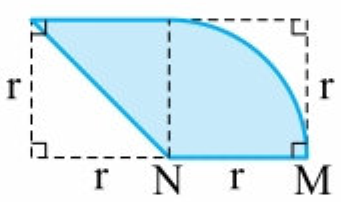
۱) ۱۶π ۲) ۳۲π
۳) ۶۴π ۴) ۱۲۸π

۷۱ در شکل زیر داریم $\frac{AC}{AB} = \frac{۲}{۳}$. اگر شکل را حول AB دوران دهیم، حجم ایجادشده برابر V می‌شود. با فرض این‌که شعاع ربع دایرهٔ زیر برابر $۶r$ است، کدام گزینه صحیح است؟



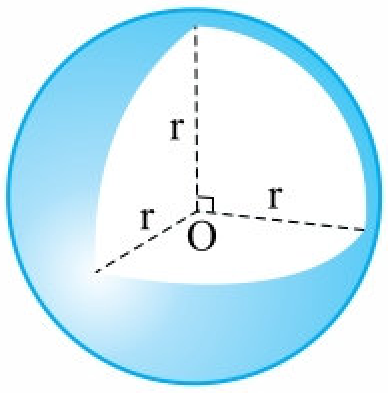
۱) $r = \sqrt[۳]{\frac{V}{۱۲۰\pi}}$ ۲) $r = \sqrt[۳]{\frac{V}{۲۴۰\pi}}$
۳) $r = \sqrt[۳]{\frac{V}{۶۰\pi}}$ ۴) $r = \sqrt[۳]{\frac{V}{۳۰\pi}}$

۷۲ اگر شکل رنگی را حول خط NM دوران دهیم، آن‌گاه حجم به وجود آمده با حجم کره‌ای به قطر .... برابر است.



۱) $\frac{r}{۴}$ ۲) $\frac{r}{۲}$ ۳) r ۴) ۲r

۷۳ مطابق شکل زیر قسمتی از یک کره را برداشته‌ایم، اگر حجم این قسمت ۳۶π واحد باشد، آن‌گاه سطح کل شکل باقی‌مانده چه‌قدر است؟



۱) ۱۲۵π

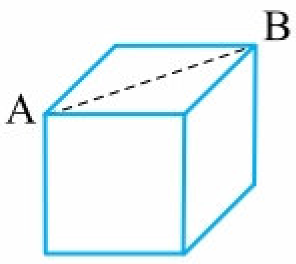
۲) ۱۲۶π

۳) ۱۵۳π

۴) ۱۵۲π

۷۴ یک اسفنج مکعب‌شکل به ضلع ۵ را در راستای پاره‌خط AB بریده‌ایم. مساحت کل یکی از قسمت‌های بریده‌شده، چه قدر است؟

(نمونه‌دولتی ـ خوزستان ـ ۹۷ ـ ۹۶)



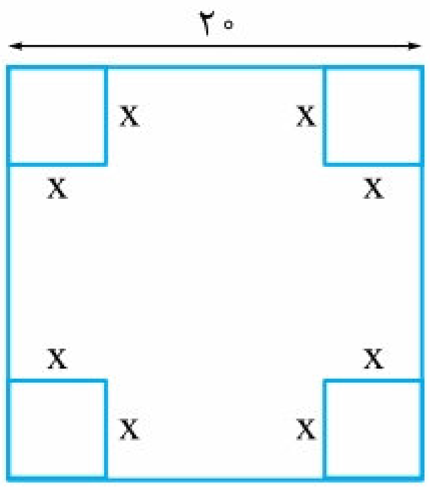
۱) ۳۷۵

۲) ۷۵۰

۳) $۲۵(۳+\sqrt{۲})$

۴) $۲۵(۳+۲\sqrt{۲})$

۷۵ از چهار گوشهٔ مربع زیر، چهار مربع به طول ضلع x بریده و از باقی‌ماندهٔ شکل یک مکعب‌مستطیل درست کرده‌ایم. اگر بدانیم در کف این جعبه ۹ کره به شعاع $\frac{x}{۲}$ جای می‌گیرند، آن‌گاه، نسبت حجم به سطح هر کره چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۳}$

۴) $\frac{۷}{۳}$

پاسخ پرسش‌های تشریحی

پاسخ ۱

۱ با توجه به فرمول‌های حجم و مساحت کره داریم:

$$\text{حجم} = V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳}\times\pi\times ۳^۳ = \frac{۴}{\cancel{۳}}\times\pi\times \cancelto{۹}{۲۷} = ۳۶\pi$$

$$\text{مساحت} = ۴\pi r^۲ = ۴\times\pi\times ۳^۲ = ۳۶\pi$$

۲ چون مساحت برابر π است، اگر فرض کنیم شعاع کره برابر r باشد، آن‌گاه داریم:

$$۴\cancel{\pi} r^۲ = \cancel{\pi} \Rightarrow ۴r^۲ = ۱ \Rightarrow r^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{\cancelto{۱}{۴}}{۳}\times\pi\times\frac{۱}{\cancelto{۲}{۸}} = \frac{\pi}{۶}$$

۳ فرض کنید شعاع کره برابر r است، در این صورت داریم:

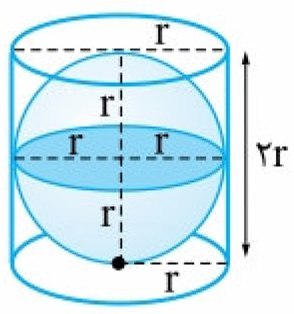
$$V = ۴\sqrt{۳}\pi \Rightarrow \frac{\cancel{۴}}{۳}\cancel{\pi} r^۳ = \cancel{۴}\sqrt{۳}\cancel{\pi} \Rightarrow \frac{r^۳}{۳} = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow r^۳ = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow r^۳ = \sqrt{۲۷}$$

$$\Rightarrow r^۳ = \sqrt{۳^۳} \Rightarrow r^۳ = (\sqrt{۳})^۳ \Rightarrow r = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S = ۴\pi r^۲ = ۴\pi(\sqrt{۳})^۲ = ۴\pi\times ۳ = ۱۲\pi$$

پاسخ ۲



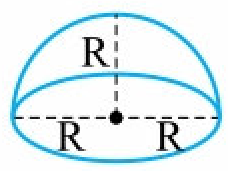
۱ با توجه به شکل مقابل واضح است که شعاع قاعدهٔ استوانه برابر r و ارتفاع آن نیز برابر ۲r است.

۲ با توجه به شکل قسمت (۱) داریم:

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{استوانه}} &= \pi r^۲ h = \pi(۳)^۲(۶) = ۵۴\pi \\ V_{\text{کره}} &= \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{\cancel{۳}}\pi\times \cancel{۳}^۳ = ۴\pi\times ۹ = ۳۶\pi \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{حجم فضای محصور} = ۵۴\pi - ۳۶\pi = ۱۸\pi$$

پاسخ ۳



چون قطر نیم‌کره برابر ۲R است، پس شعاع آن برابر R است، بنابراین:

۱ حجم نیم‌کره، $\frac{۱}{۲}$ حجم کل کره است، پس داریم:

$$V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{۱}{\cancel{۲}}\times\frac{\cancelto{۲}{۴}}{۳}\pi R^۳ = \frac{۲}{۳}\pi R^۳$$

۲ مساحت کل سطح نیم‌کره به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\text{کل نیم‌کره}} = S_{\text{رویهٔ نیم‌کره}} + S_{\text{دایره به شعاع R}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{کل نیم‌کره}} = \frac{۱}{\cancel{۲}}\times\cancelto{۲}{۴}\pi R^۲ + \pi R^۲ = ۲\pi R^۲ + \pi R^۲ = ۳\pi R^۲$$

۳ شعاع قاعدهٔ استوانه برابر R و ارتفاع آن برابر ۲R است، پس داریم:

$$\frac{V_{\text{نیم‌کره}}}{V_{\text{استوانه}}} = \frac{\frac{۲}{۳}\pi R^۳}{\pi R^۲\times ۲R} = \frac{\frac{\cancel{۲}}{۳}\cancel{\pi}\cancel{R^۳}}{\cancel{۲}\cancel{\pi}\cancel{R^۳}} = \frac{۱}{۳}$$

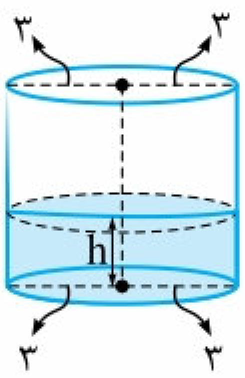
پاسخ ۴

ابتدا دقت کنید که حجم آب داخل نیم‌کره باید با حجم آب داخل استوانه برابر باشد، پس داریم:

$$V_{\text{آب داخل استوانه}} = V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi\times ۴^۳$$

$$= \frac{۱۲۸\pi}{۳}$$

حالا اگر فرض کنیم که آب تا ارتفاع h درون ظرف استوانه‌ای بالا می‌آید، آن‌گاه باید داشته باشیم:

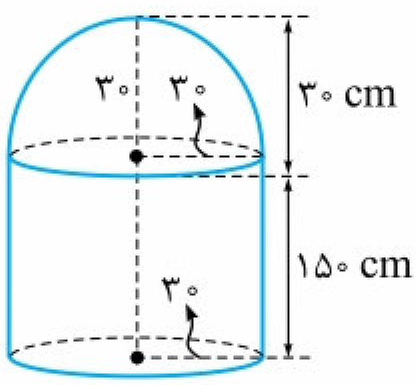


$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \frac{۱۲۸\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \cancel{\pi}\times ۳^۲\times h = \frac{۱۲۸\cancel{\pi}}{۳}$$

$$\Rightarrow ۹h = \frac{۱۲۸}{۳} \Rightarrow h = \frac{۱۲۸}{۲۷}$$

پاسخ ۵



مطابق شکل روبه‌رو چون شعاع نیم‌کره برابر ۳۰ سانتی‌متر است، پس ارتفاع استوانه برابر ۱۵۰=۳۰−۱۸۰ سانتی‌متر می‌شود، بنابراین داریم:

۱

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{نیم‌کره}} + V_{\text{استوانه}} \Rightarrow V_{\text{کل}} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi r^۳ + \pi r^۲ h$$

$$\Rightarrow V_{\text{کل}} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi\times(۳۰)^۳ + \pi(۳۰)^۲(۱۵۰)$$

$$\Rightarrow V_{\text{کل}} = \frac{۱}{\cancel{۲}}\times\frac{\cancelto{۲}{۴}}{\cancel{۳}}\pi\times\cancelto{۹۰۰۰}{۲۷۰۰۰} + \pi\times ۹۰۰\times ۱۵۰$$

$$\Rightarrow V_{\text{کل}} = ۱۸۰۰۰\pi + ۱۳۵۰۰۰\pi \Rightarrow V_{\text{کل}} = ۱۵۳۰۰۰\pi$$

۲ با توجه به شکل داریم:

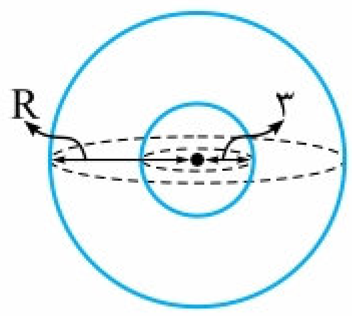
$$S_{\text{کل}} = S_{\text{دایره به شعاع ۳۰}} + S_{\text{جانبی استوانه}} + S_{\text{رویهٔ نیم‌کره}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = \pi(۳۰)^۲ + ۲\pi(۳۰)\times(۱۵۰) + \frac{۱}{\cancel{۲}}\times\cancelto{۲}{۴}\pi(۳۰)^۲$$

$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = ۹۰۰\pi + ۹۰۰۰\pi + ۱۸۰۰\pi \Rightarrow S_{\text{کل}} = ۱۱۷۰۰\pi$$

پاسخ ۶

فرض کنید شعاع کرهٔ بزرگ‌تر برابر R باشد، در این صورت باید داشته باشیم:



حجم کرهٔ کوچک − حجم کرهٔ بزرگ = حجم فضای محصور

= ۷ × حجم کرهٔ کوچک ⇒ حجم کرهٔ بزرگ = ۸ × حجم کرهٔ کوچک

$$\Rightarrow \frac{4}{\cancel{3}}\pi R^3 = \frac{4}{\cancel{3}}\pi \times 3^3 \times 8 \Rightarrow R^3 = 3^3 \times 2^3$$

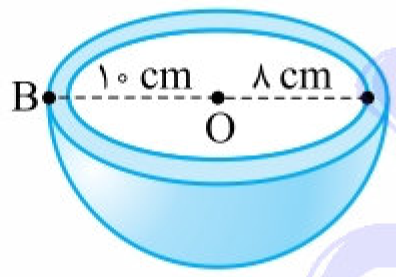
$$\Rightarrow R^3 = (3\times 2)^3 \Rightarrow R = 6$$

پس مساحت سطح کرهٔ بزرگ‌تر برابر است با:

$$4\pi R^2 = 4\pi(6)^2 = 4\pi \times 36 = 144\pi$$

پاسخ ۷

با توجه به شکل مقابل داریم:



۱ حجم کاسه برابر حجم نیم‌کرهٔ داخلی، یعنی نیم‌کره‌ای به شعاع ۸ سانتی‌متر است، پس داریم

$$V_{\text{کاسه}} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}^{\,2}}{3}\pi(8)^3$$

$$\Rightarrow V_{\text{کاسه}} = \frac{1024\pi}{3} \Rightarrow V_{\text{کاسه}} = \frac{2}{3}\pi \times 512$$

۲ سطح کل نیم‌کره نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{رویهٔ نیم‌کره به شعاع ۱۰}} + S_{\text{رویهٔ نیم‌کره به شعاع ۸}} + S_{\text{ناحیهٔ رنگی}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = \frac{1}{2}\times 4\pi(10)^2 + \frac{1}{2}\times 4\pi \times 8^2 + \pi(10^2 - 8^2)$$

$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = \frac{1}{2}\times 400\pi + 2\pi \times 64 + 100\pi - 64\pi$$

$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = 200\pi + 128\pi + 100\pi - 64\pi$$

$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = 364\pi\ cm^2$$

پاسخ ۸

۱ فرض کنید در ابتدا شعاع کره برابر $2r$ باشد، پس در حالت جدید شعاع کره برابر $\frac{2r}{2} = r$ خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$\frac{V_{\text{کرهٔ جدید}}}{V_{\text{کرهٔ اولیه}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi(2r)^3} = \frac{\frac{4}{\cancel{3}}\cancel{\pi r^3}}{\frac{4}{\cancel{3}}\cancel{\pi} \times 8\cancel{r^3}} = \frac{1}{8}$$

⇒ حجم $\frac{1}{8}$ برابر می‌شود

$$\frac{S_{\text{کرهٔ جدید}}}{S_{\text{کرهٔ اولیه}}} = \frac{4\pi r^2}{4\pi(2r)^2} = \frac{\cancel{4\pi r^2}}{\cancel{4\pi} \times 4\cancel{r^2}} = \frac{1}{4}$$

⇒ مساحت $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود

۲ ٪۳۰۰ حجم اولیه معادل $\frac{300}{100} = 3$ برابر حجم اولیه است. پس اگر فرض کنیم شعاع کرهٔ اولیه برابر r و شعاع کرهٔ جدید برابر r' است، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$V_{\text{کرهٔ جدید}} - V_{\text{کرهٔ اولیه}} = 3V_{\text{کرهٔ اولیه}} \Rightarrow V_{\text{کرهٔ جدید}} = 4V_{\text{کرهٔ اولیه}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\cancel{3}}\pi(r')^3 = 4\times\frac{4}{\cancel{3}}\pi r^3 \Rightarrow (r')^3 = 4r^3$$

$$\Rightarrow r' = \sqrt[3]{4r^3} \Rightarrow r' = \sqrt[3]{4}r$$

پس شعاع کره باید $\sqrt[3]{4}$ برابر شود.

پاسخ ۹

۱ سطح کل نیم‌کره به شعاع R برابر است با $3\pi R^2$، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{\text{کل نیم‌کره}}}{S_{\text{کره}}} = \frac{3\pi(3r)^2}{4\pi(2r)^2} = \frac{3\pi \times 9r^2}{4\pi \times 4r^2} = \frac{27\cancel{\pi r^2}}{16\cancel{\pi r^2}} = \frac{27}{16}$$

۲ چون قطر کره برابر r' است، پس شعاع آن برابر $\frac{r'}{2}$ خواهد بود و بنابراین داریم:

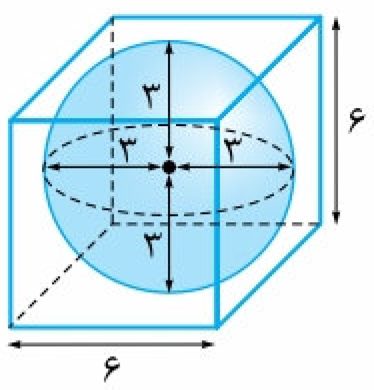
$$S_{\text{کل نیم‌کره}} = S_{\text{کره}} \Rightarrow 3\pi r^2 = 4\pi(\frac{r'}{2})^2$$

$$\Rightarrow 3r^2 = 4(\frac{r'}{2}) \Rightarrow 3r^2 = r'^2$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{(r')^2} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \frac{r}{r'} = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{r}{r'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{r}{r'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

پاسخ ۱۰

قطر مکعب به طول ضلع a برابر $a\sqrt{3}$ است، پس چون طول قطر در این مکعب برابر $6\sqrt{3}$ است، بنابراین طول هر یال مکعب برابر ۶ واحد است و در نتیجه مطابق شکل شعاع کره برابر ۳ واحد می‌شود، بنابراین داریم:



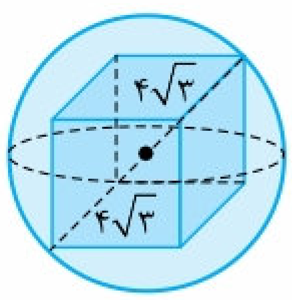
۱ $$\frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3)^3}{6^3} = \frac{\frac{4}{\cancel{3}}\pi \times \cancel{27}^{\,9}}{216} = \frac{\cancel{36}^{\,1}\pi}{\cancel{216}_{\,6}} = \frac{\pi}{6}$$

۲ $$\left.\begin{array}{l} S_{\text{جانبی مکعب}} = 4\times(6\times 6) = 4\times 36 = 144 \\ S_{\text{کره}} = 4\pi(3)^2 = 4\pi\times 9 = 36\pi = 36\times 3 = 108 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف} = 144 - 108 = 36$$

پاسخ ۱۱

مطابق شکل واضح است که قطر مکعب برابر با قطر کره است، پس چون قطر کره برابر $4\sqrt{3}\times 2 = 8\sqrt{3}$ است، بنابراین قطر مکعب هم برابر $8\sqrt{3}$ و در نتیجه طول هر یال مکعب برابر ۸ واحد می‌شود، پس داریم:

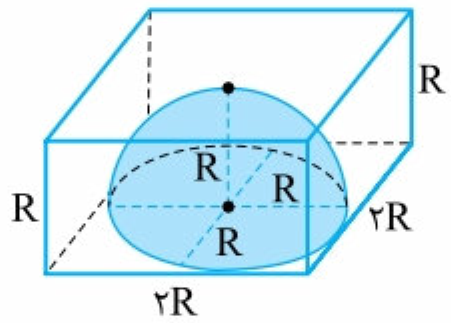


۱ $$V_{\text{فضای محصور}} = V_{\text{کره}} - V_{\text{مکعب}} = \frac{4}{3}\times\pi(4\sqrt{3})^3 - 8^3$$

$$= \frac{4}{\cancel{3}}\times\cancel{3}\times 192\sqrt{3} - 512 = 768\sqrt{3} - 512$$

۲ $$\frac{S_{\text{کل کره}}}{S_{\text{کل مکعب}}} = \frac{4\pi(4\sqrt{3})^2}{6\times 8^2} = \frac{\cancel{4}\times 3\times\cancel{16}\times\cancel{3}}{\cancel{6}\times\cancel{8}\times\cancel{8}} = \frac{3}{2}$$

پاسخ ۱۲



همان‌طور که در شکل می‌بینید، اگر فرض کنیم شعاع نیم‌کره برابر R است، آن‌گاه قاعدهٔ مکعب‌مستطیل یک مربع به ضلع ۲R و ارتفاع آن نیز برابر R می‌شود، پس با توجه به این اطلاعات داریم:

$\boxed{1}$ $$\frac{S_{\text{رویهٔ نیم‌کره}}}{S_{\text{جانبی مکعب مستطیل}}}=\frac{\frac{1}{2}\times 4\pi R^2}{4\times(R\times 2R)}=\frac{\cancel{2}\pi \cancel{R^2}}{\cancel{8}\cancel{R^2}}=\frac{\pi}{4}$$

$\boxed{2}$ چون حجم نیم‌کره برابر $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ است، پس داریم:

$$\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{4}}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\Rightarrow \frac{2R^3}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow R^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\Rightarrow R^3=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\Rightarrow R=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین با توجه به مقدار R حجم مکعب‌مستطیل برابر می‌شود با:

$$V_{\text{مکعب مستطیل}}=2R\times 2R\times R=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

پاسخ ۱۳

در ابتدا دقت کنید که داریم: $V=\frac{4}{3}\pi(2r)^3\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi\times 8r^3$

$$\Rightarrow V=\frac{32\pi}{3}r^3\Rightarrow \frac{3V}{32\pi}=r^3\xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} r=\sqrt[3]{\frac{3V}{32\pi}}$$

حالا اگر قطر کره را ۲/۵ برابر کنیم، شعاع آن هم ۲/۵ برابر می‌شود، یعنی شعاع کرهٔ جدید برابر می‌شود با $2/5\times 2r=5r$، پس سطح آن نیز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{سطح کرهٔ جدید}=4\pi(5r)^2=4\pi\times 25r^2=100\pi r^2$$

$$=100\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{32\pi}}\right)^2=100\pi\times\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)^2$$

$$=\cancel{100}\pi\times\frac{1}{\cancel{4}}\times\sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi^2}}=25\pi\times\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{کره}}=\frac{25\pi}{2}\times\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$$

پاسخ ۱۴

$\boxed{1}$ ۶ $\boxed{2}$ ۶

$\boxed{3}$ پنج‌ضلعی منتظم $\boxed{4}$ ABCDE

$\boxed{5}$ F $\boxed{6}$ مثلث

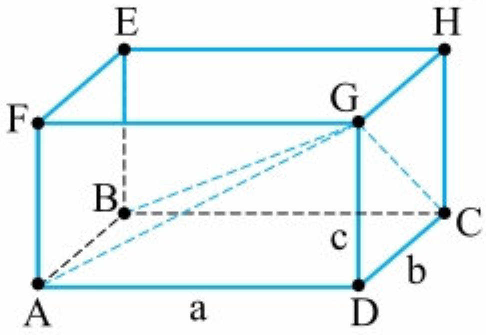
$\boxed{7}$ FH

پاسخ ۱۵

دقت کنید که فاصلهٔ دو نقطهٔ M و N از قاعدهٔ EFGH با هم برابر است، پس ارتفاع هر دو هرم با هم برابر و قاعدهٔ آن‌ها نیز با هم مشترک است، در نتیجه حجم هر دو هرم با هم برابر و اختلاف حجم آن‌ها برابر صفر است.

نتیجه هم‌مساحت ـ برابر

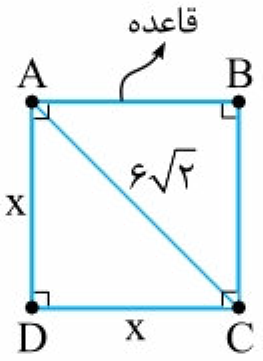
پاسخ ۱۶



در هرم GABCD، GD ارتفاع قاعدهٔ هرم است. پس اگر فرض کنیم ابعاد مکعب‌مستطیل a، b و c هستند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{V_{\text{هرم}}}{V_{\text{مکعب}}}=\frac{\frac{1}{3}(ab)(c)}{abc}=\frac{\frac{1}{3}\cancel{abc}}{\cancel{abc}}=\frac{1}{3}$$

پاسخ ۱۷



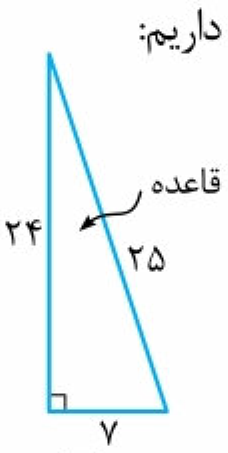
$\boxed{1}$ چون قطر قاعده برابر $6\sqrt{2}$ است، پس طول ضلع‌های قاعده مطابق شکل برابر می‌شود با:

$$x^2+x^2=(6\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2x^2=36\times 2\Rightarrow x^2=36$$

$$x=6\Rightarrow V_{\text{هرم}}=\frac{1}{3}S_{\text{قاعده}}\times\text{ارتفاع}=\frac{1}{\cancel{3}}\times\cancel{6}^{\,2}\times 6\times 4=48$$

$\boxed{2}$ دقت کنید که مثلث قاعده، قائم‌الزاویه است، چون رابطهٔ فیثاغورس $(25^2=24^2+7^2)$ برای اضلاع آن برقرار است، پس داریم:



$$V_{\text{هرم}}=\frac{1}{3}\times S_{\text{قاعده}}\times\text{ارتفاع}$$

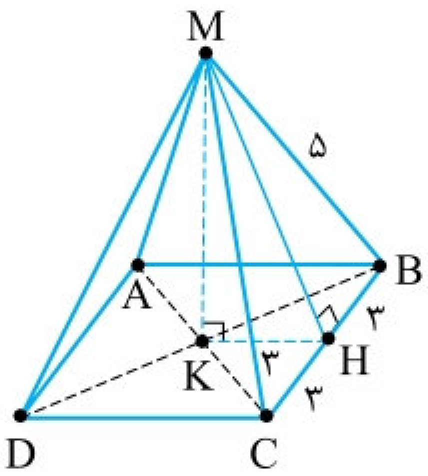
$$=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{24}^{\,12}\times 7}{\cancel{2}}\times\cancel{9}^{\,3}=12\times 7\times 3=252$$

$\boxed{3}$ مساحت شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع a از رابطهٔ $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$V_{\text{هرم}}=\frac{1}{3}\times S_{\text{قاعده}}\times\text{ارتفاع}\Rightarrow V_{\text{هرم}}=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{2}}\times 3^2\times\cancel{8}^{\,4}$$

$$=36\sqrt{3}$$

پاسخ ۱۸



با توجه به شکل مقابل، ابتدا طول MH را محاسبه کرده و سپس به کمک آن اندازهٔ ارتفاع هرم را به دست می‌آوریم:

$$\overset{\triangle}{MHB}:MH^2+HB^2=MB^2\Rightarrow MH^2+3^2=5^2$$

$$\Rightarrow MH^2=25-9\Rightarrow MH^2=16\Rightarrow MH=4$$

حالا با توجه به این‌که مثلث MKH هم قائم‌الزاویه است، داریم:

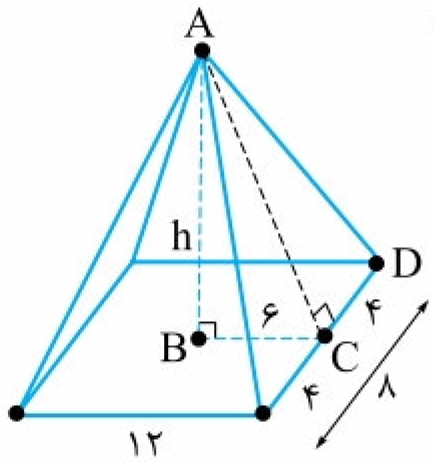
$$MK^2+KH^2=MH^2\Rightarrow MK^2+3^2=4^2$$

$$\Rightarrow MK^2+9=16\Rightarrow MK^2=7\Rightarrow MK=\sqrt{7}$$

پس طول ارتفاع هرم برابر $\sqrt{7}$ و در نتیجه حجم آن برابر است با:

$$V_{\text{هرم}}=\frac{1}{\cancel{3}}\times(\cancel{6}^{\,2}\times 6)\times\sqrt{7}=12\sqrt{7}$$

پاسخ ۱۹



ابتدا توجه کنید که مساحت قاعده برابر $۹۶ = ۸ \times ۱۲$ واحد است. بنابراین چون حجم هرم برابر ۲۵۶ واحد است، پس داریم:

$$\frac{۱}{\cancel{۳}}\times \overset{۳۲}{\cancel{۹۶}}\times h=۲۵۶ \Rightarrow ۳۲h=۲۵۶ \Rightarrow h=\frac{۲۵۶}{۳۲} \Rightarrow h=۸$$

حالا با توجه به شکل و به کمک رابطهٔ فیثاغورس طول AC را به دست می‌آوریم: $\overset{\Delta}{ABC}: AC^۲ = AB^۲ + BC^۲$

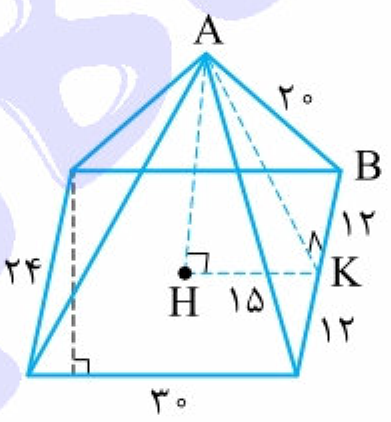
$$\Rightarrow AC^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow AC = ۱۰$$

نهایتاً برای محاسبهٔ طول یال‌هایی که رأس هرم را به رئوس قاعده وصل می‌کنند، کافی است طول AD در مثلث ACD را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به دست آوریم، پس داریم:

$$AD^۲ = AC^۲ + CD^۲ \Rightarrow AD^۲ = ۱۰^۲ + ۴^۲$$

$$\Rightarrow AD^۲ = ۱۰۰ + ۱۶ \Rightarrow AD^۲ = ۱۱۶ \Rightarrow AD = \sqrt{۱۱۶} = ۲\sqrt{۲۹}$$

پاسخ ۲۰



با توجه به شکل ابتدا به کمک رابطهٔ فیثاغورس طول ارتفاع AK در مثلث AKB را به دست می‌آوریم:

$$AK^۲ + KB^۲ = AB^۲ \Rightarrow AK^۲ + ۱۲^۲ = ۲۰^۲$$

$$\Rightarrow AK^۲ + ۱۴۴ = ۴۰۰ \Rightarrow AK^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow AK = ۱۶$$

حالا با توجه به طول AK در مثلث AKH، اندازهٔ ارتفاع هرم را به دست می‌آوریم:

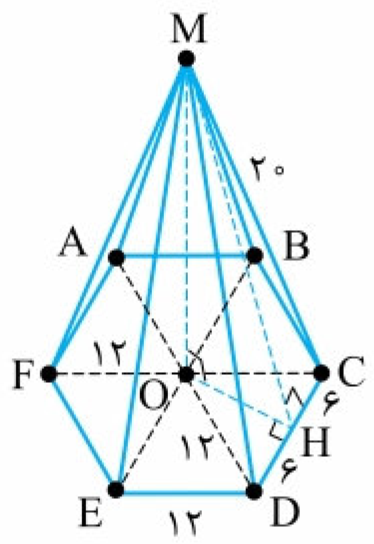
$$AH^۲ + HK^۲ = AK^۲ \Rightarrow AH^۲ + ۱۵^۲ = ۱۶^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲ + ۲۲۵ = ۲۵۶ \Rightarrow AH^۲ = ۳۱ \Rightarrow AH = \sqrt{۳۱}$$

بنابراین حجم هرم برابر است با:

$$V_{هرم} = \frac{۱}{۳}\times S_{قاعده}\times ارتفاع \Rightarrow V_{هرم} = \frac{۱}{\cancel{۳}}\times(\overset{۱۰}{\cancel{۳۰}}\times ۱۰)\times\sqrt{۳۱} = ۱۰۰\sqrt{۳۱}$$

پاسخ ۲۱



با توجه به شکل به سؤالات هر بخش پاسخ می‌دهیم:

۱ چون اندازهٔ ضلع شش‌ضلعی برابر ۱۲است، پس مساحت قاعده برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۲^۲ = ۲۱۶\sqrt{۳}$ واحد می‌شود.

۲ با توجه به اندازهٔ اضلاع در مثلث MCD داریم:

$$MH^۲ + CH^۲ = MC^۲ \Rightarrow MH^۲ + ۶^۲ = ۲۰^۲$$

$$\Rightarrow MH^۲ + ۳۶ = ۴۰۰ \Rightarrow MH^۲ = ۳۶۴ \Rightarrow MH = \sqrt{۳۶۴}$$

۳ برای پیداکردن OH از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث OHC کمک می‌گیریم، پس داریم:

$$OH^۲ + CH^۲ = OC^۲ \Rightarrow OH^۲ + ۶^۲ = ۱۲^۲$$

$$\Rightarrow OH^۲ = ۱۴۴ - ۳۶ \Rightarrow OH^۲ = ۱۰۸ \Rightarrow OH = \sqrt{۱۰۸}$$

۴ برای محاسبهٔ حجم هرم باید طول ارتفاع هرم را محاسبه کنیم، برای این کار نیز کافی است در مثلث MOH رابطهٔ فیثاغورس را بنویسیم، در این صورت داریم:

$$MO^۲ + OH^۲ = MH^۲ \Rightarrow MO^۲ + (\sqrt{۱۰۸})^۲ = (\sqrt{۳۶۴})^۲$$

$$\Rightarrow MO^۲ + ۱۰۸ = ۳۶۴ \Rightarrow MO^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow MO^۲ = ۱۶^۲$$

$$\Rightarrow MO = ۱۶ \Rightarrow V_{هرم} = \frac{۱}{۳}\times S_{قاعده}\times MO$$

$$V_{هرم} = \frac{۱}{\underset{۱}{\cancel{۳}}}\times \overset{۷۲}{\cancel{۲۱۶}}\sqrt{۳}\times ۱۶ = ۷۲\sqrt{۳}\times ۱۶ = ۱۱۵۲\sqrt{۳}$$

پاسخ ۲۲

۱ حجم مخروط از رابطهٔ $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$V = \frac{۱}{\cancel{۳}}\times\pi\times ۲^۲\times\cancel{۳} \Rightarrow V = ۴\pi$$

۲ فرض کنید ارتفاع مخروط برابر h باشد، در این صورت داریم:

$$V = ۵۰\pi \Rightarrow \frac{۱}{۳}\cancel{\pi}\times(۵)^۲\times h = ۵۰\cancel{\pi} \Rightarrow \frac{۲۵h}{۳} = ۵۰$$

$$\Rightarrow h = \frac{\overset{۲}{\cancel{۵۰}}\times ۳}{\cancel{۲۵}} \Rightarrow h = ۶$$

۳ فرض کنید شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r باشد. در این صورت داریم:

$$V = ۱۲\pi \Rightarrow \cancel{۱۲}\cancel{\pi} = \frac{۱}{۳}\cancel{\pi}\times r^۲\times\cancel{۱۲} \Rightarrow r^۲ = ۳$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{۳} \Rightarrow محیط\ قاعده = ۲\pi r = ۲\pi\times\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}\pi$$

پاسخ ۲۳

ابتدا حجم آب درون مخروط را به دست می‌آوریم (همان حجم مخروط).

$$V_{مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi\times(۶)^۲\times ۲۰$$

$$\Rightarrow V_{مخروط} = \pi\times ۱۲\times ۲۰ = ۲۴۰\pi$$

حالا چون وقتی آب را درون استوانه می‌ریزیم، استوانه به طور کامل پر از آب می‌شود، پس حجم استوانه هم با حجم مخروط یعنی ۲۴۰π برابر است و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$V_{استوانه} = ۲۴۰\pi \Rightarrow \pi\times(۴)^۲\times h' = ۲۴۰\pi$$

$$\Rightarrow ۱۶\cancel{\pi}h' = ۲۴۰\cancel{\pi} \Rightarrow ۱۶h' = ۲۴۰ \Rightarrow h' = \frac{۲۴۰}{۱۶}$$

$$\Rightarrow h' = ۱۵\ cm$$

پاسخ ۲۴

$\boxed{1}$

$$\frac{V_{\text{مخروط جدید}}}{V_{\text{مخروط اولیه}}}=\frac{\frac{1}{3}\pi(3r)^2(\frac{h}{2})}{\frac{1}{3}\pi r^2h}=\frac{\cancel{\frac{1}{3}}\pi\times\cancel{9}^{3}r^2\times\frac{h}{2}}{\frac{1}{3}\pi r^2h}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\cancel{\pi r^2h}}{\frac{1}{3}\cancel{\pi r^2h}}=\frac{9}{2}$$

$\boxed{2}$ ابتدا حجم مخروط جدید را محاسبه می‌کنیم.

$$V_{\text{مخروط جدید}}=\frac{1}{3}\pi(2r)^2(4h)$$

$$\Rightarrow V_{\text{مخروط جدید}}=\frac{1}{3}\pi\times4r^2\times4h=\frac{16}{3}\pi r^2h$$

حالا توجه کنید که در ابتدا حجم مخروط برابر $\frac{1}{3}\pi r^2h$ بوده، پس اختلاف حجم مخروط‌ها برابر می‌شود با:

$$\frac{16}{3}\pi r^2h-\frac{1}{3}\pi r^2h=15(\frac{1}{3}\pi r^2h)$$

که این اختلاف ۱۵ برابر حجم اولیه و معادل $\%1500=\frac{1500}{100}$ حجم اولیه است. پس $\%1500$ به حجم مخروط اضافه می‌شود.

پاسخ ۲۵

فرض کنید در ابتدا شعاع مخروط برابر r و ارتفاع آن برابر h و ضمناً حجم آن برابر V باشد، یعنی داشته باشیم $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$. حالا با توجه به شرایط جدید، شعاع قاعدهٔ مخروط جدید برابر $\frac{mr}{2}$ و حجم آن نیز برابر $m\sqrt{m}V$ است، بنابراین اگر فرض کنیم، ارتفاع این مخروط برابر h' است، باید داشته باشیم:

$$m\sqrt{m}V=\frac{1}{3}\pi(\frac{mr}{2})^2\times h' \Rightarrow m\sqrt{m}\times\frac{1}{3}\pi r^2h$$

$$=\frac{1}{3}\pi\times\frac{m^2r^2}{4}\times h' \Rightarrow m\sqrt{m}\times\cancel{\frac{1}{3}\pi r^2}h$$

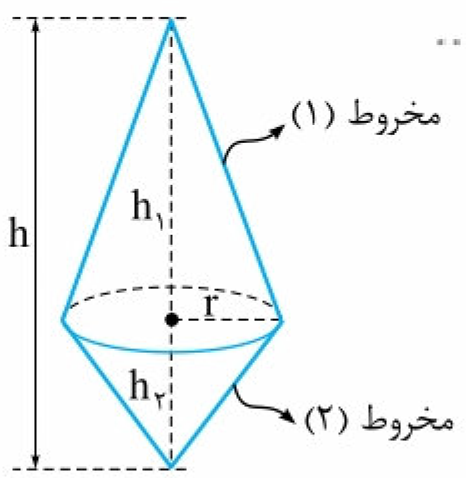
$$=\cancel{\frac{1}{3}\pi r^2}\times\frac{m^2}{4}\times h' \Rightarrow m\sqrt{m}h=h'\times\frac{m^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{m\sqrt{m}\times4}{\cancel{m^2}_{m}}\times h=h' \Rightarrow \frac{4\sqrt{m}}{m}\times h=h'$$

پس ارتفاع مخروط باید $\frac{4\sqrt{m}}{m}$ یا $\frac{4}{\sqrt{m}}$ برابر شود.

پاسخ ۲۶

ابتدا توجه کنید که حجم کره‌ای به شعاع r برابر $\frac{4}{3}\pi r^3$ است، پس با توجه به شکل باید داشته باشیم:



$$\frac{4}{3}\pi r^3=V_{\text{مخروط}(1)}+V_{\text{مخروط}(2)}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{3}\pi r^2h_1+\frac{1}{3}\pi r^2h_2 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3$$

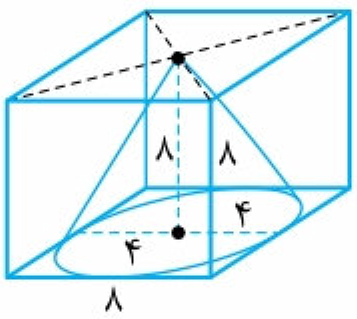
$$=\frac{1}{3}\pi r^2\underbrace{(h_1+h_2)}_{h}\Rightarrow\frac{4}{\cancel{3}}\pi\, \cancel{r^3}_{r}=\frac{1}{\cancel{3}}\pi\,\cancel{r^2}h \Rightarrow 4r=h$$

حالا با توجه به رابطهٔ بین r و h داریم:

$$\frac{\text{مجذور } h}{\text{مساحت قاعدهٔ یکی از مخروط}}=\frac{h^2}{\pi r^2}=\frac{(4r)^2}{\pi r^2}=\frac{16\cancel{r^2}}{\pi\cancel{r^2}}=\frac{16}{\pi}$$

پاسخ ۲۷

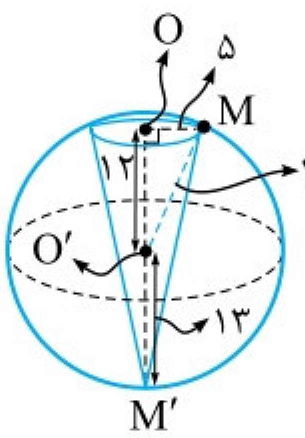
با توجه به شکل، ارتفاع مخروط برابر ۸ و شعاع قاعدهٔ آن برابر ۴ واحد است، حالا دقت کنید که اگر مخروط را از مکعب خارج کنیم، به اندازهٔ حجم مخروط از حجم مکعب کاسته می‌شود، پس پاسخ مسئله برابر همان حجم مخروط است. در نتیجه داریم:



$$V_{\text{مخروط}}=\frac{1}{3}\pi(4)^2\times8 \Rightarrow V_{\text{مخروط}}=\frac{128\pi}{3}$$

پاسخ ۲۸

چون قطر کره برابر ۲۶ واحد است، پس شعاع آن برابر $\frac{26}{2}=13$ واحد می‌شود و در نتیجه با توجه به شکل و به کمک رابطهٔ فیثاغورس نتیجه می‌گیریم:



$$(OO')^2+OM^2=(O'M)^2 \Rightarrow (OO')^2+5^2=13^2$$

$$(OO')^2+25=169 \Rightarrow (OO')^2=144 \Rightarrow OO'=12$$

حالا توجه کنید که چون ارتفاع مخروط برابر OM' است، پس داریم: $OM'=OO'+O'M'=12+13=25$

در نتیجه حجم مخروط و کره به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(5)^2\times25=\frac{625\pi}{3}$$

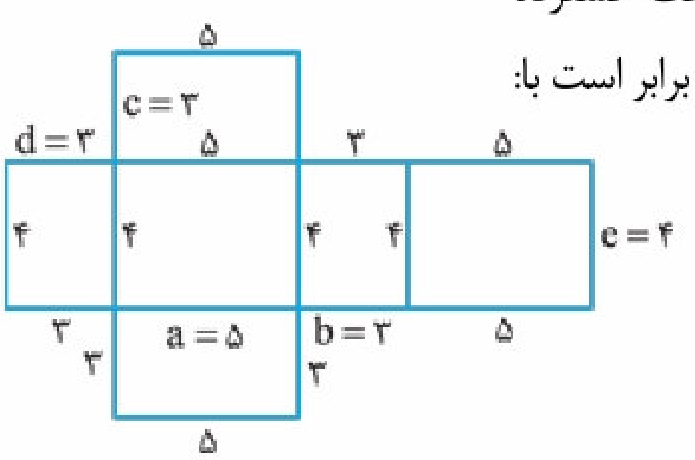
$$V_{\text{کره}}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(13)^3=\frac{4}{3}\pi\times2197=\frac{8788\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف حجم کره و مخروط}=\frac{8788\pi}{3}-\frac{625\pi}{3}=\frac{8163\pi}{3}$$

$$=2721\pi$$

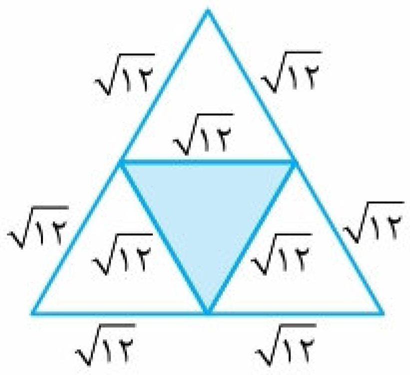
پاسخ ۲۹

با توجه به شکل مساحت گستردهٔ مکعب‌مستطیل داده‌شده برابر است با:



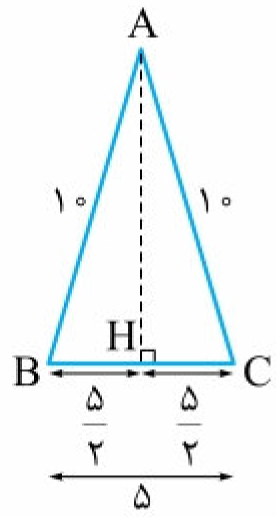
$$2(3\times5+4\times5+3\times4)=2(15+20+12)=2(47)=94$$

پاسخ ۳۰



۱ شکل گسترده از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{12}$ تشکیل شده است، پس:

$$S=\cancel{4}\times(\sqrt{12})^2\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}=\sqrt{3}\times 12=12\sqrt{3}$$



۲ شکل گسترده از یک مربع به طول ضلع ۵ و چهار مثلث متساوی‌الساقین به طول قاعدهٔ ۵ و طول ساق‌های ۱۰ تشکیل شده است. مساحت هر مثلث نیز به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$AH^2+HC^2=AC^2 \Rightarrow AH^2+(\frac{5}{2})^2=10^2$$

$$\Rightarrow AH^2=100-\frac{25}{4} \Rightarrow AH^2=\frac{400-25}{4}$$

$$\Rightarrow AH^2=\frac{375}{4} \Rightarrow AH=\frac{5\sqrt{15}}{2}$$

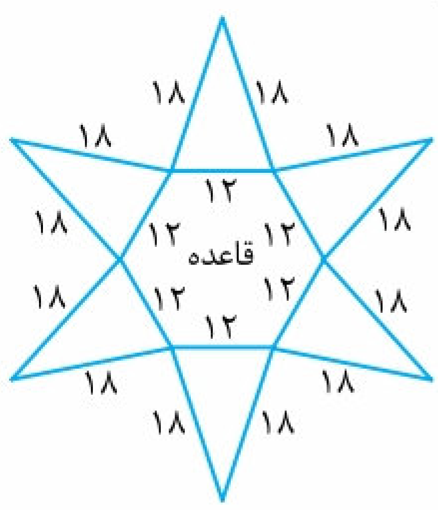
$$\Rightarrow S=\frac{AH\times BC}{2}=\frac{\frac{5\sqrt{15}}{2}\times 5}{2}=\frac{25\sqrt{15}}{4}$$

در نتیجه مساحت گسترده برابر می‌شود با:

$$S_{\text{گسترده}}=S_{\text{مربع}}+4\times S_{\text{مثلث}}=5\times 5+\frac{25\sqrt{15}}{\cancel{4}}\times\cancel{4}$$

$$=25+25\sqrt{15}=25(1+\sqrt{15})$$

پاسخ ۳۱



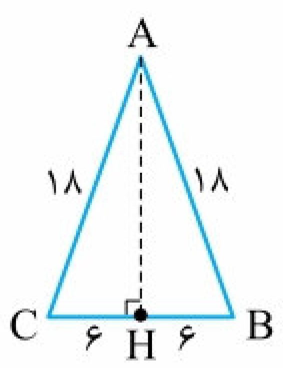
مطابق شکل گستردهٔ این هرم، مساحت گسترده برابر مجموع مساحت‌های یک شش‌ضلعی منتظم و شش مثلث متساوی‌الساقین است. از طرفی مساحت مثلث‌های متساوی‌الساقین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$AH^2+BH^2=AB^2 \Rightarrow AH^2+6^2=18^2$$

$$\Rightarrow AH^2+36=324 \Rightarrow AH^2=288 \Rightarrow AH=12\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{AH\times BC}{2}=\frac{12\sqrt{2}\times \overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{2}}=72\sqrt{2}$$

پس مساحت گسترده برابر است با:

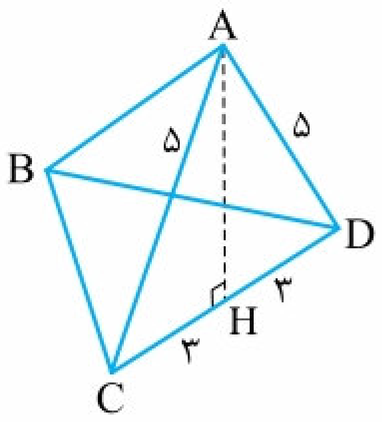


$$S_{\text{کل}}=S_{\text{شش‌ضلعی}}+6\times S_{\text{مثلث}}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}(12)^2+6\times 72\sqrt{2}$$

$$=216\sqrt{3}\times 432\sqrt{2}=216(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$$

پاسخ ۳۲



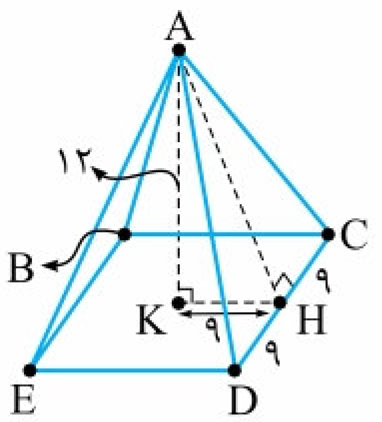
۱ ابتدا مساحت هر وجه جانبی را به دست می‌آوریم. در این صورت با توجه به شکل داریم:

$$AD^2=AH^2+HD^2 \Rightarrow 5^2=AH^2+3^2 \Rightarrow AH^2=16$$

$$\Rightarrow AH=4 \Rightarrow S_{\text{هر وجه جانبی}}=\frac{AH\times CD}{2}=\frac{4\times 6}{2}=12$$

حالا توجه کنید که: $S_{\text{کل}}=S_{\text{قاعده}}+3\times S_{\text{مثلث‌های جانبی}}$

$$=6^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}+3\times 12=9\sqrt{3}+36$$



۲ ابتدا دقت کنید که با توجه به شکل داریم: $AK^2+KH^2=AH^2$

$$\Rightarrow 12^2+9^2=AH^2$$

$$\Rightarrow 144+81=AH^2$$

$$\Rightarrow 225=AH^2 \Rightarrow AH=15$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{AH\times CD}{2}=\frac{15\times 18}{2}=135$$

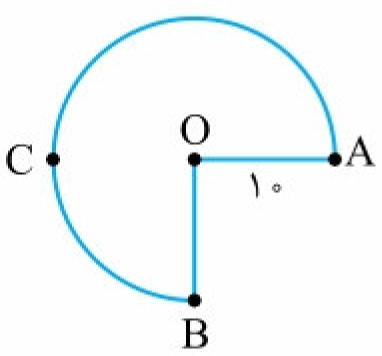
$$\Rightarrow S_{\text{کل}}=S_{\text{مربع}}+4\times S_{\text{مثلث جانبی}}=18\times 18+4\times 135$$

$$=324+540=864$$

پاسخ ۳۳

می‌دانیم طول هر کمان برابر محیط قاعدهٔ مخروطی است که آن کمان تولید می‌کند، پس داریم:

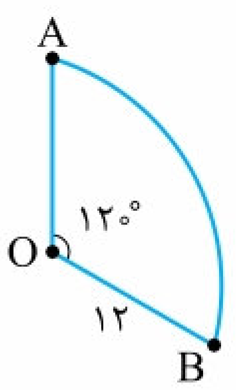
۱ $\text{طول کمان } ACB=\frac{3}{4}\times\underbrace{(2\times\pi\times 10)}_{\text{محیط دایره}}=\frac{3}{4}\times 20\pi=15\pi$



حالا اگر فرض کنیم شعاع قاعدهٔ مخروط تولیدی برابر r است، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$2\cancel{\pi}r=15\cancel{\pi} \Rightarrow 2r=15$$

$$\Rightarrow r=\frac{15}{2} \Rightarrow r=7/5$$

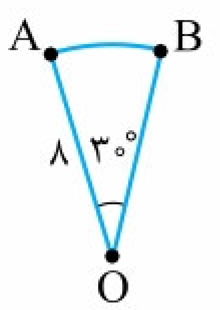


۲ $\text{طول کمان } AB=\frac{120}{360}\times\overbrace{2\pi\times 12}^{\text{محیط دایره}}$

$$=\frac{1}{3}\times 24\pi=8\pi$$

$$\Rightarrow \text{محیط قاعدهٔ مخروط با شعاع } r=2\pi r=8\pi$$

$$\Rightarrow 2r=8 \xrightarrow{(\div 2)} r=4$$



۳ $\text{طول کمان } AB=\frac{30}{360}\times\overbrace{2\pi\times 8}^{\text{محیط دایره}}$

$$=\frac{1}{12}\times 16\pi=\frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \text{محیط قاعدهٔ مخروط به شعاع } r=\overset{1}{\cancel{2}}\cancel{\pi}r=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cancel{\pi}}{3} \Rightarrow r=\frac{2}{3}$$

پاسخ ۳۴

فرض کنید شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r و شعاع دایرهٔ اولیه برابر r′ باشد. ابتدا با توجه به این‌که مساحت قاعدهٔ مخروط برابر 16π و شعاع آن برابر r است، سپس محیط قاعدهٔ مخروط را محاسبه می‌کنیم.

$$S_{\text{قاعده}}=16\pi \Rightarrow \pi r^2=16\pi \Rightarrow r^2=16 \Rightarrow r=4$$

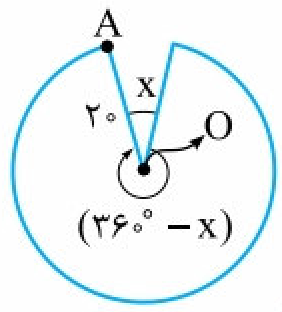
$$\Rightarrow \text{محیط قاعده}=2\pi r=2\pi\times 4=8\pi$$

حالا دقت کنید که با توجه به فرض مسئله 8π برابر با $\frac{3}{8}$ محیط دایره‌ای به شعاع r' است، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{3}{\cancel{8}_{4}}\times \cancel{2}^{1}\cancel{\pi} r'=8\cancel{\pi} \Rightarrow \frac{3}{4}r'=8 \Rightarrow r'=\frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\text{دایرهٔ اولیه}}=\pi\left(\frac{32}{3}\right)^2=\frac{1024\pi}{9}$$

پاسخ ۳۵



محیط قاعدهٔ مخروط برابر با طول کمان موردنظر است، پس با توجه به شکل داریم:

$$\text{طول کمان}=\frac{360-x}{360}\times 2\pi\times 20=\frac{360-x}{360}\times 40\pi$$

$$\text{محیط قاعدهٔ مخروط}=2\pi\times\frac{55}{3}=\frac{110\pi}{3}$$

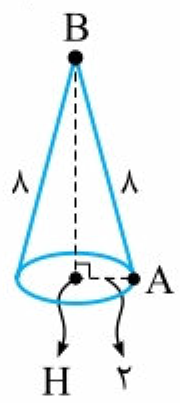
$$\Rightarrow \frac{360-x}{\cancel{360}_{9}}\times \cancel{40}\cancel{\pi}=\frac{110\cancel{\pi}}{3} \Rightarrow \frac{360-x}{\cancel{9}_{3}}=\frac{110}{\cancel{3}_{1}}$$

$$\Rightarrow \frac{360-x}{3}=110 \Rightarrow 360-x=330 \Rightarrow x=30^\circ$$

پاسخ ۳۶

فرض کنید شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r باشد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{4}\times \cancel{2\pi}\times 8=\cancel{2\pi} r \Rightarrow r=2$$



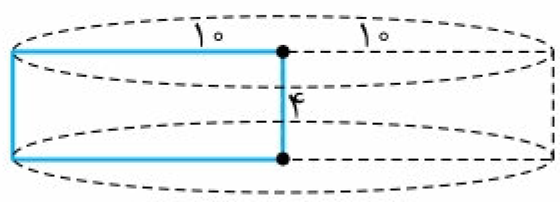
حالا با توجه به شکل، ارتفاع مخروط و سپس حجم آن را محاسبه می‌کنیم:

$$AH^2+HB^2=AB^2 \Rightarrow 2^2+HB^2=8^2$$

$$\Rightarrow HB^2=60 \Rightarrow HB=2\sqrt{15}$$

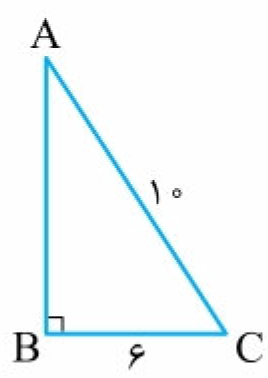
$$\Rightarrow V_{\text{مخروط}}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(2)^2\times 2\sqrt{15}=\frac{8\sqrt{15}}{3}\pi$$

پاسخ ۳۷



۱ از دوران شکل حول BC، استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۱۰ و ارتفاع ۴ تولید می‌شود، پس داریم:

$$V=\pi r^2h=\pi(10)^2\times 4=400\pi$$

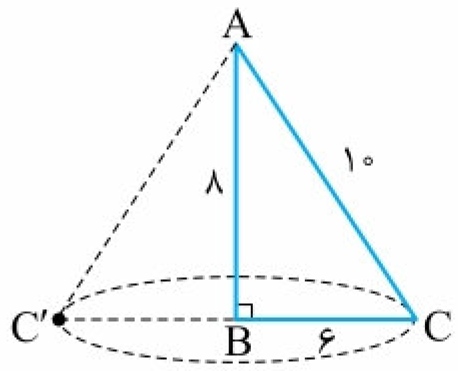


۲ ابتدا توجه کنید که طول AB به کمک رابطهٔ فیثاغورس برابر است با:

$$AB^2+BC^2=AC^2$$

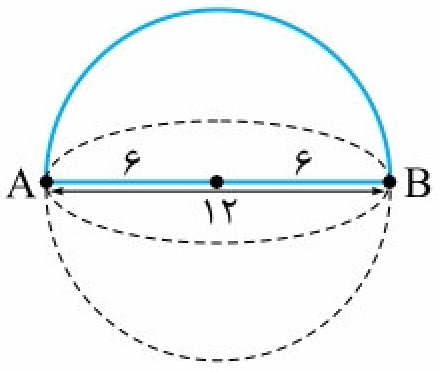
$$\Rightarrow AB^2+6^2=10^2 \Rightarrow AB^2=64$$

$$\Rightarrow AB=8$$



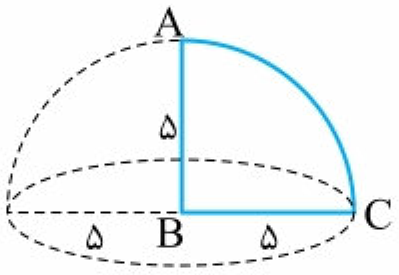
حالا با توجه به این‌که $AB=8$، می‌فهمیم با دوران $\overset{\Delta}{ABC}$ حول AB مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۸ تولید می‌شود، پس داریم:

$$V_{\text{شکل}}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(6)^2\times 8=12\pi\times 8=96\pi$$



۳ از دوران شکل حول AB، یک کره به قطر ۱۲ تولید می‌شود، پس داریم:

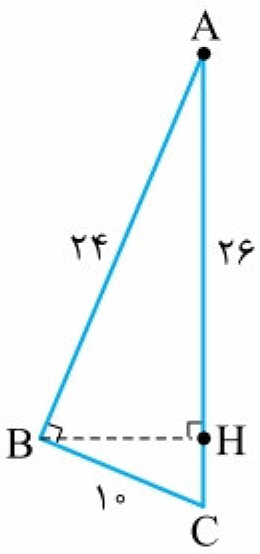
$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6)^3=\frac{4}{3}\pi\times 216=288\pi$$



۴ از دوران شکل حول AB یک نیم‌کره به شعاع ۵ تولید می‌شود، پس داریم:

$$V=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{4}^{2}}{3}\pi(5)^3=\frac{2}{3}\pi\times 125=\frac{250\pi}{3}$$

پاسخ ۳۸

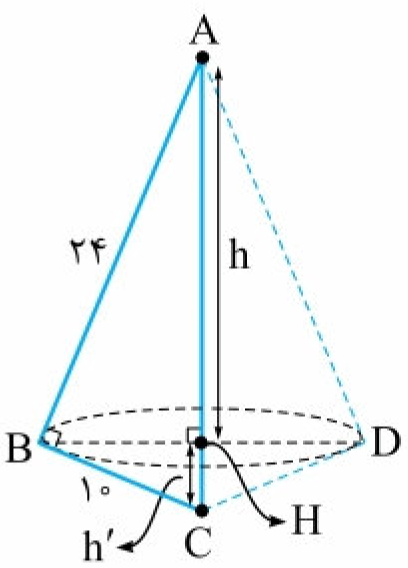


با توجه به شکل باید طول BH یا همان شعاع قاعدهٔ مخروط را به دست آوریم.

چون $26^2=24^2+10^2$، پس مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است، بنابراین ارتفاع وارد بر وتر یا همان BH به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{24\times 10}{2}=120 \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{26\times BH}{2}=13BH \end{array}\right\} \Rightarrow 13BH=120$$

$$\Rightarrow BH=\frac{120}{13}$$



حالا توجه کنید که حجم شکل داده‌شده برابر با مجموع حجم دو مخروط به شعاع قاعدهٔ $\frac{120}{13}$ و ارتفاع h و h′ است، پس داریم:

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{120}{13}\right)^2h+\frac{1}{3}\pi\left(\frac{120}{13}\right)^2h'=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{120}{13}\right)^2(h+h')$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{120}{13}\right)^2\times 26=\frac{1}{3}\pi\times\frac{120^2}{13}\times 2=\frac{28800\pi}{39}$$

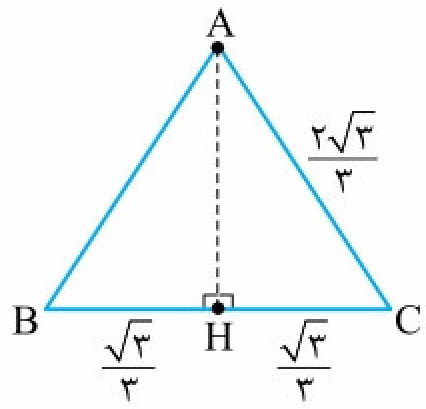
پاسخ ۳۹

ابتدا توجه کنید که طول ارتفاع وارد بر یک ضلع در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ برابر است با:

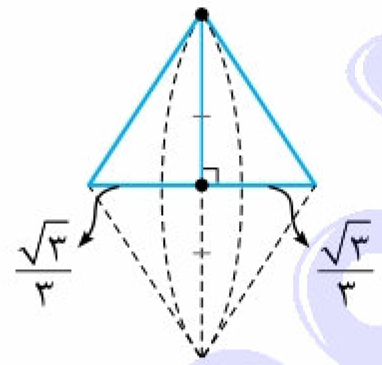
$$AC^2=AH^2+HC^2 \Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+AH^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}=\frac{1}{3}+AH^2 \Rightarrow AH^2=1 \Rightarrow AH=1$$

حالا با توجه به شکل می‌توان فهمید که از دوران یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و ارتفاع ۱، دو مخروط هم‌قاعده به شعاع ۱ و ارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{3}$ حاصل می‌شوند. پس حجم ایجادشده برابر است با:

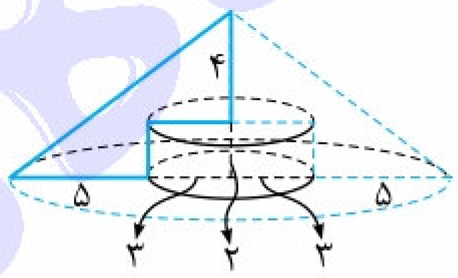


$$2\times\frac{1}{3}\times\pi\times(1)^2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$



پاسخ ۴۰

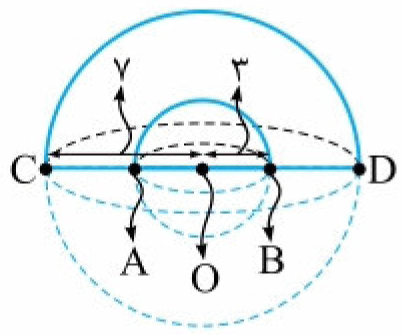
۱ مطابق شکل پس از دوران، یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۸ و ارتفاع ۶ واحد داریم که یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۲ واحد از دل آن خارج شده است، پس حجم حاصل برابر است با:



$$V_{\text{مخروط}}-V_{\text{استوانه}}=\frac{1}{\cancel{3}}\pi\times(8)^2\times\overset{2}{\cancel{6}}-\pi\times(3)^2\times2$$

$$=128\pi-18\pi=110\pi$$

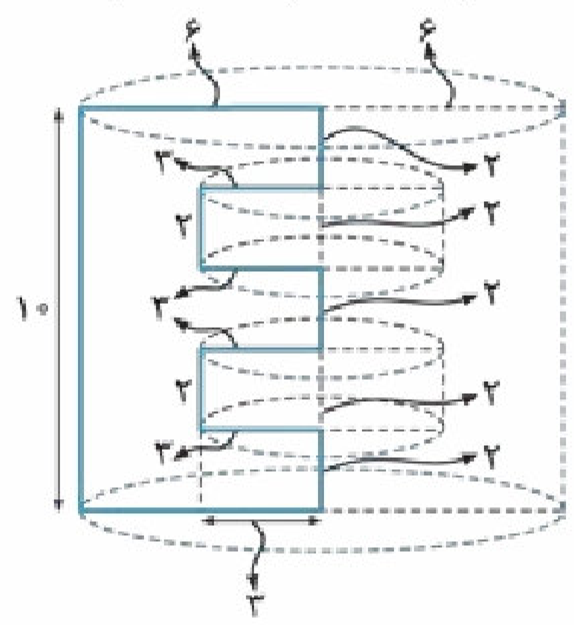
۲ پس از دوران، یک کره به شعاع ۷ حاصل می‌شود که یک کره به شعاع ۳ در دل آن، خالی شده است، پس حجم موردنظر برابر است با:



$$V_{\text{کرهٔ بزرگ}}-V_{\text{کرهٔ کوچک}}=\frac{4}{3}\pi\times7^3-\frac{4}{3}\pi\times3^3$$

$$=\frac{1372\pi}{3}-\frac{108\pi}{3}=\frac{1264\pi}{3}$$

۳ پس از دوران، یک استوانه به شعاع ۶ و ارتفاع ۱۰ تولید می‌شود که در دل آن دو استوانه به شعاع ۳ و ارتفاع ۲ خالی‌شده‌اند، پس حجم موردنظر برابر است با:



$$V_{\text{استوانهٔ بزرگ}}-2\times V_{\text{استوانهٔ کوچک}}=\pi(6)^2\times10-2\times\pi(3)^2\times2$$

$$=360\pi-36\pi=324\pi$$

پاسخ ۴۱

حجم برداشته‌شده و هم‌چنین سطح برداشته‌شده از کره به ترتیب $\frac{1}{8}$ حجم و سطح کره‌اند، بنابراین سطح باقی‌مانده روی کره $\frac{7}{8}$ سطح کرهٔ اولیه است، پس داریم:

$$\frac{7}{\underset{2}{\cancel{8}}}\times\cancel{4}\pi r^2=70\pi \Rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{2}r^2=\overset{10}{\cancel{70}} \Rightarrow \frac{r^2}{2}=10$$

$$\Rightarrow r^2=20 \Rightarrow r=\sqrt{20}$$

حالا چون $\frac{1}{8}$ حجم کره را برداشته‌ایم، پس با توجه به مقدار عددی شعاع، حجم برداشته‌شده برابر است با:

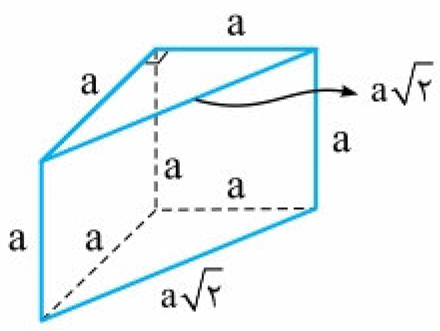
$$\frac{1}{\underset{2}{\cancel{8}}}\times\frac{\cancel{4}}{3}\pi(\sqrt{20})^3=\frac{\overset{10}{\cancel{20}}\sqrt{20}\pi}{\underset{3}{\cancel{6}}}=\frac{10\sqrt{20}\pi}{3}$$

پاسخ ۴۲

حجم باقی‌مانده، نصف حجم مکعب کامل است، پس حجم مکعب اولیه برابر $108\times2=216$ واحد است. بنابراین اگر فرض کنیم طول ضلع مکعب اولیه برابر a است، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$a^3=216 \Rightarrow a^3=6^3 \Rightarrow a=6$$

از طرفی پس از برش شکلی مانند شکل مقابل به وجود می‌آید که مساحت آن برابر است با:



$$S_{\text{کل}}=\underbrace{2\times\left(\frac{a\times a}{2}\right)}_{\text{مثلث‌ها}}+\underbrace{2\times(a\times a)}_{\text{مربع‌ها}}+\underbrace{(a\times a\sqrt{2})}_{\text{مستطیل}}$$

$$=a^2+2a^2+\sqrt{2}a^2=a^2(3+\sqrt{2})=36(3+\sqrt{2})$$

پاسخ ۴۳

به محاسبات زیر دقت کنید:

$$\frac{\text{حجم کره به شعاع } 3r}{\text{سطح کره به شعاع } 3r}=\frac{\frac{\cancel{4}}{3}\pi\cancel{(3r)^3}}{\cancel{4}\pi\cancel{(3r)^2}}=\frac{1}{\cancel{3}}\times\cancel{3}r=r \quad (I)$$

حالا دقت کنید که چون ارتفاع استوانه $\frac{2}{3}$ قطر کره است، پس ارتفاع استوانه برابر $\frac{2}{3}\times6r=4r$ می‌شود و در نتیجه با توجه به نسبت سطح به حجم این استوانه، به صورت زیر داریم:

$$\frac{\text{سطح}}{\text{حجم}}=\frac{2\cancel{\pi}\cancel{r}\cancel{h}}{\cancel{\pi}r^{\cancel{2}}\cancel{h}}=\frac{2}{r} \quad (II)$$

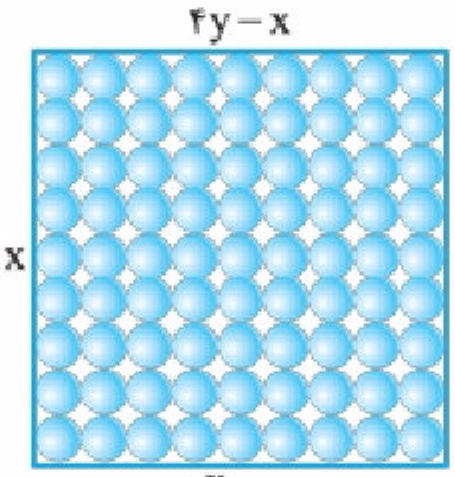
$$\Rightarrow (I)=(II) \Rightarrow r=\frac{2}{r} \Rightarrow r^2=2 \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{حجم کره}-\text{حجم استوانه}=\frac{4}{3}\pi(3r)^3-\pi r^2(4r)$$

$$=36\pi r^3-4\pi r^3=32\pi r^3=32\pi(\sqrt{2})^3=64\sqrt{2}\pi$$

پاسخ ۴۴

پس از برش، کف مکعب ایجادشده به صورت زیر می‌شود:



بنابراین با توجه به شکل، ۹ ردیف ۹تایی از کره‌هایی به شعاع $\frac{۲x}{۳}$ کف جعبه جای می‌گیرد، یعنی ۹ کره به قطر $\frac{۴x}{۳}$، پس ابعاد کف جعبه باید برابر $۹\times\frac{۴x}{۳}$ باشد و در نتیجه داریم:

$$۴y-x=\cancel{۹}^{۳}\times\frac{۴x}{\cancel{۳}} \Rightarrow ۴y-x=۱۲x \Rightarrow ۴y=۱۳x$$

پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱ گزینهٔ ۴ حجم کرهٔ کامل به شعاع R از رابطهٔ $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ به دست می‌آید، پس حجم نیم‌کرهٔ موردنظر برابر است با:

$$\frac{۱}{\cancel{۲}}\times\frac{\cancel{۴}^{۲}}{۳}\pi R^۳=\frac{۲}{۳}\pi R^۳$$

۲ گزینهٔ ۴ فرض کنید شعاع کره برابر r است. در این صورت داریم:

$$۴\cancel{\pi}r^۲=۱۰۰\cancel{\pi} \Rightarrow ۴r^۲=۱۰۰ \Rightarrow r^۲=۲۵$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} r=۵ \Rightarrow V_{کره}=\frac{۴}{۳}\pi r^۳=\frac{۴}{۳}\pi(۵)^۳$$

$$=\frac{۴\times۱۲۵}{۳}\pi=\frac{۵۰۰\pi}{۳}$$

۳ گزینهٔ ۲ مساحت کل یک نیم‌کره به شعاع r از رابطهٔ $۳\pi r^۲$ به دست می‌آید. پس اگر فرض کنیم شعاع نیم‌کرهٔ موردنظر برابر r است، داریم:

$$\cancel{۳}\pi r^۲=\cancel{۲۷}^{۹}\pi \Rightarrow r^۲=۹ \Rightarrow r=۳$$

$$\Rightarrow V_{نیم‌کره}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi r^۳=\frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}}\times\frac{\cancel{۴}^{۲}}{\cancel{۳}}\pi(\cancel{۳})^۳=۲\times۹\pi=۱۸\pi$$

۴ گزینهٔ ۳ مساحت کل نیم‌کره برابر $۳\pi R^۲$ و مساحت کل کره برابر $۴\pi R^۲$ است، پس نسبت موردنظر برابر است با:

$$\frac{\text{سطح نیم‌کره}}{\text{سطح کره}}=\frac{۳\cancel{\pi R^۲}}{۴\cancel{\pi R^۲}}=\frac{۳}{۴}$$

۵ گزینهٔ ۳ در هر گزینه نسبت حجم به سطح را محاسبه کرده و با هم مقایسه می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): $\frac{V}{S}=\frac{\cancel{a^۳}^{a}}{۶\cancel{a^۲}}=\frac{a}{۶}$

گزینهٔ (۲): $\frac{V}{S}=\frac{\frac{\cancel{۴}}{۳}\pi\cancel{a^۳}^{a}}{\cancel{۴}\pi\cancel{a^۲}}=\frac{a}{۳}$

گزینهٔ (۳): $\frac{V}{S}=\frac{\pi\cancel{a^۲\times a}^{a}}{۲\pi a\times a}=\frac{a}{۲}$

گزینهٔ (۴): $\frac{V}{S}=\frac{\frac{a}{۲}}{۶}=\frac{a}{۱۲}$ (مشابه گزینهٔ (۲))

بنابراین با مقایسهٔ گزینه‌ها، می‌فهمیم که گزینهٔ (۳) بزرگ‌ترین مقدار را دارد.

۶ گزینهٔ ۱ چون قطر کره برابر ۳a است، پس شعاع کره برابر $\frac{۳a}{۲}$ می‌شود، بنابراین داریم:

$$\frac{V_{کره}}{S_{کره}}=\frac{\frac{\cancel{۴}}{۳}\pi(\frac{۳a}{۲})^{\cancel{۳}}}{\cancel{۴}\pi\cancel{(\frac{۳a}{۲})^۲}}=\frac{۱}{\cancel{۳}}(\frac{\cancel{۳}a}{۲})=\frac{a}{۲}$$

۷ گزینهٔ ۴ چون حجم کره برابر V است، پس شعاع کره برحسب V به صورت زیر محاسبه می‌شود: $V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$

$$\Rightarrow ۳V=۴\pi r^۳ \Rightarrow \frac{۳V}{۴\pi}=r^۳ \xrightarrow{(\sqrt[۳]{\ })} \sqrt[۳]{\frac{۳V}{۴\pi}}=r$$

$$\Rightarrow S_{کره}=۴\pi r^۲=۴\pi(\sqrt[۳]{\frac{۳V}{۴\pi}})^۲=۴\pi(\sqrt[۳]{(\frac{۳V}{۴\pi})^۲})$$

$$=۴\pi\sqrt[۳]{\frac{۹V^۲}{۱۶\pi^۲}}=۴\pi\times\frac{۱}{۲}\times\sqrt[۳]{\frac{۹V^۲}{۲\pi^۲}}=\frac{\cancel{۴}^{۲}\times۳}{\cancel{۲}_{۱}}\sqrt[۳]{\frac{\cancel{۹}V^۲}{۲\times\cancel{۹}}}=۶\sqrt[۳]{\frac{V^۲}{۲}}$$

۸ گزینهٔ ۴ فرض کنید شعاع قاعدهٔ استوانه برابر r است، در این صورت شعاع کره برابر ۲r است. حالا چون حجم کره ۴ برابر حجم استوانه است، اگر فرض کنیم ارتفاع استوانه برابر h است، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$\frac{V_{کره}}{V_{استوانه}}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi(۲r)^۳}{\pi r^۲h}=۴ \Rightarrow \frac{\frac{۴}{۳}\times۸\cancel{r^۳}^{r}}{\cancel{r^۲}h}=۴$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{۳۲}}{۳}r=\cancel{۴}h \Rightarrow \frac{۸}{۳}r=h \Rightarrow \frac{۲}{۳}\underbrace{(۴r)}_{قطر کره}=h$$

پس ارتفاع استوانه باید $\frac{۲}{۳}$ قطر کره باشد.

۹ گزینهٔ ۴ فرض کنید شعاع قاعدهٔ کره برابر r و در نتیجه قطر آن برابر ۲r باشد، در این صورت شعاع قاعدهٔ استوانه برابر $۲\times r=۲r$ و ارتفاع استوانه برابر $۱/۵\times۲r=۳r$ است، پس اختلاف سطح کره و استوانه برابر است با:

$$\text{سطح استوانه}-\text{سطح کره}=۲\pi r'h-۴\pi r^۲$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف}=۲\pi(۲r)(۳r)-۴\pi r^۲=۱۲\pi r^۲-۴\pi r^۲=۸\pi r^۲$$

$$=۲\times۴\pi r^۲=۲\times\pi(۲r)^۲=۲\times\text{مساحت قاعدهٔ استوانه}$$

۱۰ گزینهٔ •• وقتی شعاع کره a برابر می‌شود، به حجم آن، ۲۶ برابر حجم اولیه اضافه می‌شود، یعنی اگر فرض کنیم حجم کرهٔ اولیه برابر V بوده، حجم کرهٔ جدید برابر $V+26V=27V$ می‌شود، پس اگر فرض کنیم شعاع کرهٔ اولیه برابر r بوده باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{V_{\text{جدید}}}{V_{\text{قدیم}}}=27 \Rightarrow \frac{\cancel{\frac{4}{3}}\pi(ar)^3}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi r^3}=27 \Rightarrow \left(\frac{a\cancel{r}}{\cancel{r}}\right)^3=27$$

$$\Rightarrow a^3=3^3 \Rightarrow a=3$$

۱۱ گزینهٔ ••• ابتدا شعاع کره را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید این شعاع برابر r باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{4}{3}\cancel{\pi}r^3=4/5\cancel{\pi} \Rightarrow \frac{4}{3}r^3=\frac{9}{2} \Rightarrow r^3=\frac{27}{8}$$

$$\Rightarrow r^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow r=\frac{3}{2}$$

حالا با توجه به شعاع اولیهٔ کره، سطح آن را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{\text{سطح کره}}=4\pi r^2=4\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=\cancel{4}\pi\times\frac{9}{\cancel{4}}=9\pi$$

حالا چون بعد از تغییر شعاع 55π واحد به سطح کره اضافه می‌شود، پس سطح کرهٔ جدید باید برابر $9\pi+55\pi=64\pi$ واحد شود، بنابراین اگر فرض کنیم شعاع کرهٔ جدید برابر r' است، باید داشته باشیم:

$$\cancel{4}\pi(r')^2=\cancel{64}\pi \Rightarrow (r')^2=16 \Rightarrow r'=4$$

پس باید ۲/۵ = ۱/۵ − ۴ واحد به شعاع کرهٔ اولیه اضافه کنیم.

۱۲ گزینهٔ •• فرض کنید شعاع کره و در نتیجه طول یال مکعب برابر a باشد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$\frac{\text{سطح کره}}{\text{حجم مکعب}}=\frac{4\pi a^2}{a^3}=4 \Rightarrow \frac{\cancel{4}\times 3}{a}=\cancel{4} \Rightarrow \frac{3}{a}=1$$

$$\Rightarrow a=3$$

حالا توجه کنید که حجم کرهٔ اولیه برابر است با:

$$\frac{4}{\cancel{3}}\pi(3)^3=4\times27=108$$

پس حجم کرهٔ جدید باید برابر ۲۰۴۸ = ۱۰۸ + ۱۹۴۰ واحد باشد، بنابراین اگر فرض کنیم شعاع کرهٔ جدید برابر r' است، باید داشته باشیم:

$$\frac{4}{\cancel{3}}\pi(r')^3=2048 \Rightarrow 4(r')^3=2048 \Rightarrow (r')^3=512$$

$$\Rightarrow (r')^3=2^9 \Rightarrow r'=2^3 \Rightarrow r'=8$$

پس شعاع کره باید $\frac{8}{3}$ برابر شعاع کرهٔ اولیه شود.

۱۳ گزینهٔ • فرض کنید شعاع بادکنک برابر r است. در این صورت باید داشته باشیم:

$$V=S \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3=\cancel{4}\cancel{\pi}r^2 \Rightarrow \frac{r^{\cancel{3}}}{3}=\cancel{r^2} \Rightarrow \frac{r}{3}=1 \Rightarrow r=3$$

بنابراین حجم بادکنک در حال حاضر برابر $\frac{4}{3}\pi(3)^3=36\pi$ است و در نتیجه بعد از خالی‌شدن $\frac{76\pi}{3}$ هوا از داخل آن حجمش برابر می‌شود با:

$$36\pi-\frac{76}{3}\pi=\frac{108-76}{3}\pi=\frac{32\pi}{3}$$

بنابراین اگر فرض کنیم بعد از خالی‌شدن هوا، شعاع بادکنک برابر r' است، باید داشته باشیم:

$$\frac{4}{\cancel{3}}\pi(r')^3=\frac{32\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \Rightarrow (r')^3=8 \Rightarrow r'=2$$

پس بعد از خالی‌شدن هوا، مساحت بادکنک برابر است با:

$$4\pi(r')^2=4\pi\times2^2=16\pi$$

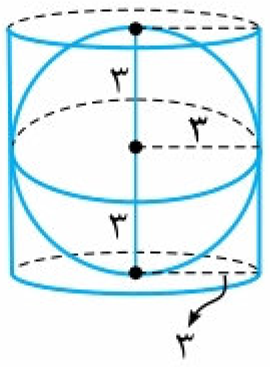
یعنی به اندازهٔ $36\pi-16\pi=20\pi$ سانتی‌متر مربع مساحت کل بادکنک کاهش یافته است.

۱۴ گزینهٔ •• اگر فرض کنیم شعاع قاعدهٔ استوانه برابر r است. آن‌گاه حجم استوانه به شعاع r و ارتفاع ۸ سانتی‌متر باید با حجم کره‌ای به شعاع ۶ سانتی‌متر برابر باشد، پس داریم:

$$\frac{4}{3}\pi(6)^3=\pi(r^2)\times8 \Rightarrow \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cancel{\pi}\times\overset{2}{\cancel{6}}\times6\times6=\cancel{\pi}\times r^2\times\cancel{8}$$

$$\Rightarrow 36=r^2 \Rightarrow r=6$$

۱۵ گزینهٔ ••• چون ارتفاع استوانه برابر قطر کره است، پس قطر کره برابر ۶ سانتی‌متر و در نتیجه شعاع آن برابر ۳ cm است. بنابراین شعاع قاعدهٔ استوانه هم برابر ۳ cm است و در نتیجه حجم فضای بین کره و استوانه برابر می‌شود با:



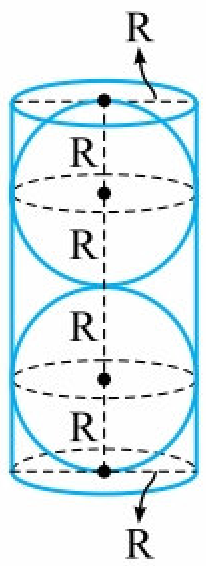
$$V_{\text{استوانه}}-V_{\text{کره}}=\pi\times(3)^2\times6-\frac{4}{3}\pi(3)^3=54\pi-36\pi=18\pi$$

۱۶ گزینهٔ • اگر فرض کنیم شعاع کره برابر r است، آن‌گاه شعاع قاعدهٔ استوانه نیز برابر r و ارتفاع آن برابر 2r است. پس حجم فضای محصور برابر می‌شود با:

$$V_{\text{استوانه}}-V_{\text{کره}}=\pi r^2(2r)-\frac{4}{3}\pi r^3=2\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{\text{حجم فضای محصور}}{\text{حجم کره}}=\frac{\frac{2}{3}\cancel{\pi r^3}}{\frac{4}{3}\cancel{\pi r^3}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

۱۷ گزینهٔ ••• مطابق شکل شعاع قاعدهٔ استوانه برابر R و ارتفاع آن برابر 4R است، پس حجم فضای خالی برابر است با:



$$V_{\text{استوانه}}-2\times V_{\text{یک کره}}=\pi r^2h-2\times\frac{4}{3}\pi r^3$$

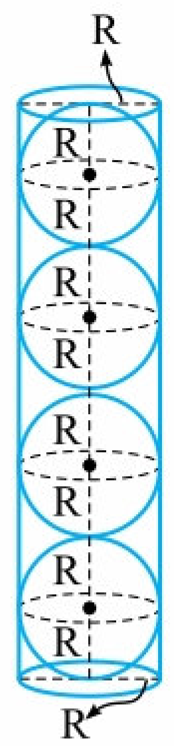
$$=\pi R^2(4R)-2\times\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$=4\pi R^3-\frac{8}{3}\pi R^3=\frac{12-8}{3}\pi R^3$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3=2\times\frac{4}{3}\pi R^3=2\times\text{حجم یک کره}$$

پس حجم فضای خالی مساوی حجم هر کره است.

۱۸ گزینهٔ «۴» با توجه به شکل اگر شعاع هر توپ برابر R باشد، آن‌گاه شعاع استوانه برابر R و ارتفاع آن برابر $8R$ است. پس حجم فضای خالی بین توپ‌ها و استوانه برابر است با: $V_{\text{استوانه}} - 4\times V_{\text{توپ تنیس}}$

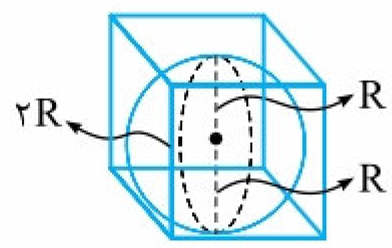


$$= \pi R^2(8R) - 4\times\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$= 8\pi R^3 - \frac{16}{3}\pi R^3 = \frac{24-16}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi R^3$$

$$= 2\times(\frac{4}{3}\pi R^3) = 2\times V_{\text{توپ}}$$

۱۹ گزینهٔ «۲» اگر شعاع کره برابر R باشد، آن‌گاه طول یال مکعب برابر $2R$ است. حالا چون حجم کره برابر 36π است، پس داریم:



$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R^3 = \frac{36\times 3}{4}$$

$$\Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow \text{ضلع مکعب} = 2R = 2\times 3 = 6$$

۲۰ گزینهٔ «۳» اگر شعاع کره برابر r باشد، آن‌گاه طول یال مکعب برابر $2r$ است، پس داریم:

$$\frac{S_{\text{کره}}}{S_{\text{کل مکعب}}} = \frac{4\pi r^2}{6(2r)(2r)} = \frac{4\pi \cancel{r^2}}{24\cancel{r^2}} = \frac{\pi}{6}$$

۲۱ گزینهٔ «۲» شعاع کره باید برابر $\frac{a}{2}$ باشد، بنابراین چون فضای محصور بین کره و مکعب ۴ برابر مساحت یک وجه مکعب است، باید داشته باشیم:

$$V_{\text{مکعب}} - V_{\text{کره}} = 4\times S_{\text{وجه}} \Rightarrow a^3 - \frac{4}{3}\pi(\frac{a}{2})^3 = 4a^2$$

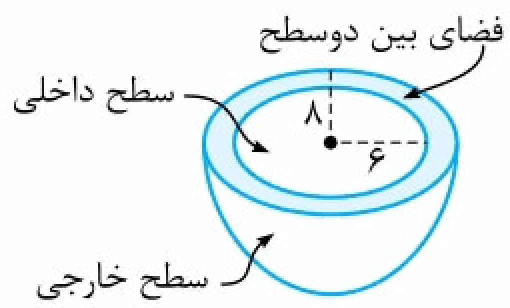
$$\Rightarrow a^3 - \frac{\pi}{6}a^3 = 4a^2 \Rightarrow a^3 - \frac{3}{6}a^3 = 4a^2 \Rightarrow \frac{1}{2}a^3 = 4a^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a = 4 \Rightarrow a = 8$$

پس شعاع کره برابر $\frac{8}{2} = 4$ و در نتیجه سطح آن برابر است با:

$$4\pi(\frac{a}{2})^2 = 4\pi(4)^2 = 64\pi = 64\times 3 = 192$$

۲۲ گزینهٔ «۴» مطابق شکل، سطح موردنظر برابر مجموع سطوح داخلی، خارجی و رنگ‌شده در شکل مقابل است، پس سطح موردنظر برابر است با:



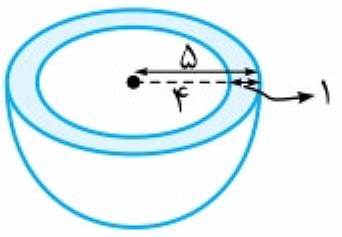
$$\text{سطح رنگی} = \underset{\text{به‌شعاع ۸}}{\text{سطح جانبی نیم‌کره}} + \underset{\text{به‌شعاع ۶}}{\text{سطح جانبی نیم‌کره}}$$

$$+(\underset{\text{به‌شعاع ۸}}{\text{سطح دایره}} - \underset{\text{به‌شعاع ۶}}{\text{سطح دایره}})$$

$$\Rightarrow \text{سطح رنگی} = 2\pi(8)^2 + 2\pi(6)^2 + (\pi\times 8^2 - \pi\times 6^2)$$

$$= 128\pi + 72\pi + 64\pi - 36\pi = 228\pi$$

۲۳ گزینهٔ «؟» چون شعاع خارجی برابر ۵ و ضخامت ظرف برابر ۱ است، پس شعاع داخلی برابر ۴ و در نتیجه سطح رنگ‌شده همانند سؤال قبل به صورت زیر قابل محاسبه است:



$$\text{سطح رنگی} = \text{سطح بیرونی} + \text{سطح درونی} + \text{سطح روی ضخامت}$$

$$\text{سطح رنگی} = 2\pi(5)^2 + 2\pi(4)^2 + \pi(5)^2 - \pi(4)^2$$

$$50\pi + 32\pi + 25\pi - 16\pi = 91\pi = 91\times 3 = 273\ cm^2$$

$$= \frac{273}{10^4} m^2 \Rightarrow \text{مقدار رنگ مورد نیاز} = \frac{273}{10^4}\times 100 = \frac{273}{100}$$

$$= 2/73\ g$$

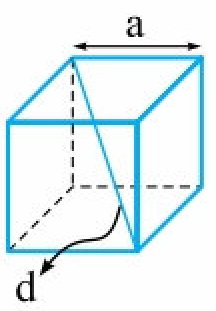
در گزینه‌ها نیست!

۲۴ گزینهٔ «۴» می‌دانیم قطر هر مکعب برابر است با $\sqrt{3}$ برابر ضلع آن مکعب؛ به عبارت دیگر $d = \sqrt{3}a$. بنابراین:

$$\sqrt{3}\times a = \sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{3}a = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

پس ضلع مکعب ۲ واحد است.

حالا با توجه به این‌که مکعب درون استوانه محاط است، پس ارتفاع استوانه با ضلع مکعب برابر است، یعنی $h = 2$.

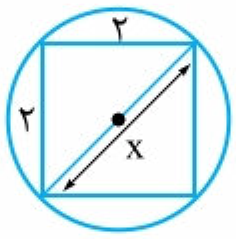


از طرفی در قاعدهٔ استوانه داریم:

$$\text{قطر مربع}: x^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

بنابراین شعاع قاعدهٔ استوانه برابر است با $\sqrt{2}$.

اکنون می‌توانیم حجم استوانه را محاسبه نماییم.



$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi(\sqrt{2})^2\times 2 = \pi\times 2\times 2 = 4\pi$$

۲۵ گزینهٔ «۱» می‌دانیم حجم منشور با مساحت قاعدهٔ S و ارتفاع h برابر است با Sh. حالا اگر از نقطه‌ای روی سقف به ۶ رأس کف اتاق وصل کنیم هرمی به وجود می‌آید که اولاً مساحت قاعدهٔ آن هم‌چنان برابر S و ارتفاعش نیز برابر h است، پس نسبت حجم این هرم به حجم اتاق برابر می‌شود با:

$$\frac{V_{\text{هرم}}}{V_{\text{منشور}}} = \frac{\frac{1}{3}\cancel{Sh}}{\cancel{Sh}} = \frac{1}{3}$$

۲۶ گزینهٔ «۴» ابتدا توجه کنید که اگر فرض کنیم S مساحت قاعدهٔ این هرم است، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$V_{\text{هرم}} = 360 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{3}}\times S\times \overset{10}{\cancel{30}} = 360 \Rightarrow S = 36$$

حالا اگر فرض کنیم عرض مستطیل قاعده برابر a و طول آن برابر $2a$ است، آن‌گاه داریم:

$$S = 36 \Rightarrow 2a\times a = 36 \Rightarrow 2a^2 = 36 \Rightarrow a^2 = 18$$

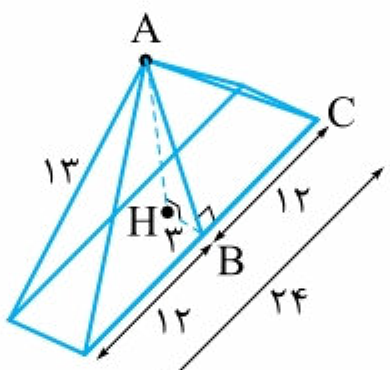
$$\xrightarrow{(\sqrt{\ })} a = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{محیط قاعده} = 2(3\sqrt{2} + 6\sqrt{2})$$

$$= 2(9\sqrt{2}) = 18\sqrt{2}$$

۲۷ گزینهٔ ۴ می‌دانیم مساحت یک شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع a از رابطه $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$ به دست می‌آید، پس مساحت قاعدهٔ این هرم برابر است با: $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times ۴^{۲} = ۲۴\sqrt{۳}$

حالا چون ارتفاع هرم برابر $۱۰\sqrt{۳}$ است، پس حجم هرم برابر می‌شود با: $V_{هرم} = \frac{۱}{\cancel{۳}}(۲۴\cancel{\sqrt{۳}})(۱۰\cancel{\sqrt{۳}}) = ۲۴۰$

۲۸ گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل، طول AB را محاسبه کرده و سپس طول AH را به دست می‌آوریم.



$$\overset{\Delta}{ABC}: AB^{۲} + BC^{۲} = AC^{۲}$$
$$\Rightarrow AB^{۲} = AC^{۲} - BC^{۲}$$
$$\Rightarrow AB^{۲} = ۱۳^{۲} - ۱۲^{۲} \Rightarrow AB^{۲} = ۲۵ \Rightarrow AB = ۵$$

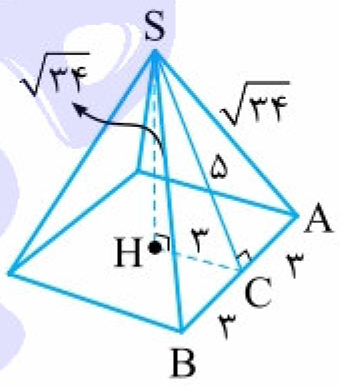
حالا دقت کنید که در مثلث AHB داریم: $AH^{۲} + HB^{۲} = AB^{۲}$

$$\Rightarrow AH^{۲} + ۳^{۲} = ۵^{۲} \Rightarrow AH^{۲} = ۱۶ \Rightarrow AH = ۴$$

پس ارتفاع هرم برابر ۴ و در نتیجه حجم آن برابر است با:

$$V = \frac{۱}{\cancel{۳}}(\overset{۲}{\cancel{۶}}\times ۲۴)\times ۴ = ۱۹۲$$

۲۹ گزینهٔ ۴ ابتدا در مثلث SAC طول AC را محاسبه می‌کنیم:



$$AS^{۲} = CS^{۲} + AC^{۲}$$
$$\Rightarrow (\sqrt{۳۴})^{۲} = ۵^{۲} + AC^{۲}$$
$$\Rightarrow ۳۴ = ۲۵ + AC^{۲} \Rightarrow AC^{۲} = ۹ \xrightarrow{(\sqrt{\ })} AC = ۳$$

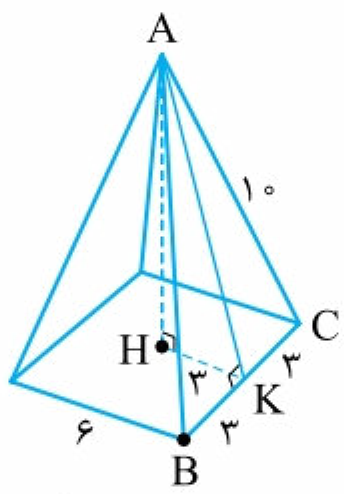
حالا چون $AC = ۳$، پس طول ضلع مربع قاعده برابر $۶ = ۲\times ۳$ واحد می‌شود، پس طول HC نیز برابر ۳ واحد است و در نتیجه در مثلث SHC داریم: $(SC)^{۲} = HC^{۲} + SH^{۲}$

$$\Rightarrow ۵^{۲} = ۳^{۲} + SH^{۲} \Rightarrow ۱۶ = SH^{۲} \Rightarrow SH = ۴$$

پس ارتفاع هرم برابر ۴ واحد بوده و در نتیجه حجم آن برابر است با:

$$\frac{\overset{}{۱}}{\underset{۱}{\cancel{۳}}}(\overset{۲}{\cancel{۶}}\times ۶)\times ۴ = ۱۲\times ۴ = ۴۸$$

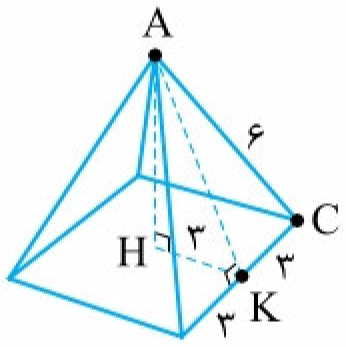
۳۰ گزینهٔ ۳ با توجه به شکل، ابتدا طول AK را محاسبه کرده و سپس با به دست آوردن طول AH (ارتفاع هرم) حجم هرم را محاسبه می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{AKC}: AK^{۲} + KC^{۲} = AC^{۲} \Rightarrow AK^{۲} + ۹ = ۱۰۰$$
$$\Rightarrow AK^{۲} = ۹۱ \Rightarrow AK = \sqrt{۹۱}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{AHK}: AH^{۲} + HK^{۲} = AK^{۲} \Rightarrow AH^{۲} + ۹ = ۹۱$$
$$\Rightarrow AH^{۲} = ۸۲ \Rightarrow AH = \sqrt{۸۲}$$
$$\Rightarrow V_{هرم} = \frac{۱}{\cancel{۳}}\times(\overset{۲}{\cancel{۶}}\times ۶)\times\sqrt{۸۲} = ۱۲\sqrt{۸۲} \text{ یا } \frac{۳۶\sqrt{۸۲}}{۳}$$

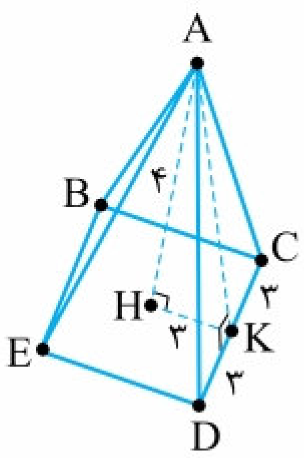
۳۱ گزینهٔ ۳ با توجه به شکل ابتدا طول AK، سپس طول AH و نهایتاً حجم هرم را محاسبه می‌کنیم. پس داریم:



$$\overset{\Delta}{AKC}: AC^{۲} = AK^{۲} + KC^{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AKC}: AC^{۲} = AK^{۲} + KC^{۲} \Rightarrow ۶^{۲} = AK^{۲} + ۳^{۲}$$
$$\Rightarrow ۲۷ = AK^{۲} \Rightarrow AK = ۳\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{AHK}: AH^{۲} + HK^{۲} = AK^{۲} \Rightarrow AH^{۲} + ۳^{۲} = (۳\sqrt{۳})^{۲}$$
$$\Rightarrow AH^{۲} + ۹ = ۲۷ \Rightarrow AH^{۲} = ۱۸ \Rightarrow AH = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow V_{هرم} = \frac{۱}{\cancel{۳}}\times(\overset{۲}{\cancel{۶}}\times ۶)\times ۳\sqrt{۲} = ۳۶\sqrt{۲}$$

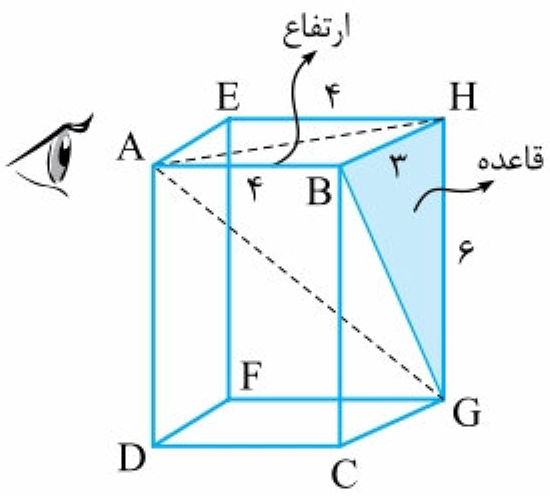
۳۲ گزینهٔ ۳ چون هرم منتظم است، پس قاعدهٔ آن مربع است، حالا چون مساحت قاعده برابر ۳۶ است، پس طول هر ضلع قاعده برابر $\sqrt{۳۶} = ۶$ واحد می‌شود و در نتیجه با توجه به شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{AHK}: AH^{۲} + HK^{۲} = AK^{۲} \Rightarrow ۴^{۲} + ۳^{۲} = AK^{۲}$$
$$\Rightarrow AK^{۲} = ۲۵ \Rightarrow AK = ۵$$

پس ارتفاع مثلث ACD برابر ۵ و قاعدهٔ آن نیز برابر ۶ است و نتیجه آن‌که مساحت مثلث ACD برابر $\frac{۶\times ۵}{۲} = ۱۵$ واحد است. حالا دقت کنید که مساحت جانبی هرم، ۴ برابر مساحت مثلث ACD است، پس پاسخ مسئله برابر $۴\times ۱۵ = ۶۰$ سانتی‌متر مربع می‌باشد.

۳۳ گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که در هرم ABGH طول ارتفاع برابر ۴ و مساحت قاعده برابر نصف مساحت مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۶ یعنی $\frac{۳\times ۶}{۲} = ۹$ واحد است، پس حجم این هرم برابر است با:



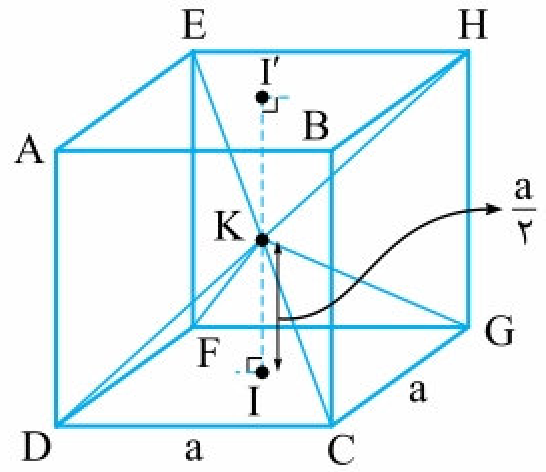
$$V_{هرم} = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳}\times ۹\times ۴ = ۱۲$$

از طرف دیگر حجم مکعب‌مستطیل برابر است با: $۴\times ۳\times ۶ = ۷۲$

پس نسبت حجم هرم ABGH به حجم کل مکعب مستطیل برابر می‌شود با $\frac{۱۲}{۷۲} = \frac{۱}{۶}$، یعنی حجم هرم $\frac{۱}{۶}$ برابر حجم مکعب مستطیل است.

۳۴ گزینهٔ ۳ دقت کنید که دو قطر DH و CE یکدیگر را دقیقاً در وسط (مرکز) مکعب قطع می‌کنند، یعنی فاصلهٔ این نقطه تا همهٔ وجوه مکعب برابر عددی ثابت است، یعنی با توجه به شکل داریم $IK = I'K$.

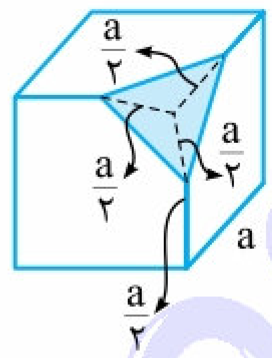
از طرفی این فاصله نصف طول یال مکعب است، پس اگر فرض کنیم طول یال مکعب برابر a است، آن‌گاه ارتفاع هرم KCDFG برابر $\frac{a}{۲}$ بوده و در نتیجه داریم:



$$V_{هرم} = \frac{۱}{۳}(a \times a) \times \frac{a}{۲} = ۳۶ \Rightarrow \frac{a^۳}{۶} = ۳۶ \Rightarrow a^۳ = ۲۱۶$$

$$\Rightarrow a = ۶ \Rightarrow S_{کل مکعب} = ۶ \times \underbrace{(۶ \times ۶)}_{S_{یک وجه}} = ۲۱۶$$

۳۵ گزینهٔ ۴



حجم مکعب به طول یال a = حجم چندوجهی باقی‌مانده

$-۸ \times$ (حجم هرم با قاعدهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به طول $\frac{a}{۲}$ و ارتفاع $\frac{a}{۲}$)

پس پاسخ مسئله برابر است با:

$$V_{باقی‌مانده} = a \times a \times a - \frac{۸}{۳} \times (\frac{۱}{۲} \times \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲}) \times \frac{a}{۲}$$

$$= a^۳ - \frac{۸}{۴۸} a^۳ = a^۳ - \frac{a^۳}{۶} = \frac{۵}{۶} a^۳ = \frac{۵}{۶} V$$

۳۶ گزینهٔ ۱ مخروطی به شعاع قاعده و ارتفاع $\frac{۱}{\sqrt[۳]{\pi}}$ در نظر بگیرید، در این صورت حجم مخروط عبارت است از:

$$\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi \times (\frac{۱}{\sqrt[۳]{\pi}})^۲ \times (\frac{۱}{\sqrt[۳]{\pi}}) = \frac{۱}{۳}\cancel{\pi} \times \frac{۱}{\cancel{\pi}} = \frac{۱}{۳}$$

۳۷ گزینهٔ ۴ فرض کنید شعاع قاعده برابر r باشد، در این صورت ارتفاع مخروط برابر است با ۳r و در نتیجه داریم:

$$V_{مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{\cancel{۳}}\pi r^۲(\cancel{۳}r) = ۲۱۶\pi$$

$$\Rightarrow \cancel{\pi} r^۳ = ۲۱۶\cancel{\pi} \Rightarrow r^۳ = ۲۱۶ \Rightarrow r = ۶$$

$$\Rightarrow ارتفاع مخروط = ۳r = ۳ \times ۶ = ۱۸$$

۳۸ گزینهٔ ۱ حجم کره و مخروط را محاسبه کرده و نسبت آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} V_{کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \\ V_{مخروط} = \frac{۱}{\cancel{۳}}\pi R^۲(\cancel{۳}R) = \pi R^۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_{کره}}{V_{مخروط}} = \frac{\frac{۴}{۳}\cancel{\pi R^۳}}{\cancel{\pi R^۳}} = \frac{۴}{۳}$$

۳۹ گزینهٔ ۲ فرض کنید شعاع قاعدهٔ مخروط و استوانه برابر r باشد. حالا اگر فرض کنیم ارتفاع استوانه برابر h است، آن‌گاه ارتفاع مخروط برابر ۲h بوده و در نتیجه داریم:

$$\frac{حجم استوانه}{حجم مخروط} = \frac{\cancel{\pi r^۲ h}}{\frac{۱}{۳}\cancel{\pi r^۲}(۲\cancel{h})} = \frac{۱}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

۴۰ گزینهٔ ۲ دقت کنید که چون قطر قاعدهٔ مخروط برابر ۸a است، پس شعاع قاعدهٔ آن برابر ۴a می‌باشد. حالا اگر فرض کنیم ارتفاع مخروط برابر h است، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$V_{کره} = V_{مخروط} \Rightarrow \frac{۴}{\cancel{۳}}\pi(۲a)^۳ = \frac{۱}{\cancel{۳}}\pi(۴a)^۲ h$$

$$\Rightarrow ۴\cancel{\pi} \times ۸a^۳ = ۱۶a^۲ \times \cancel{\pi} h \Rightarrow \cancel{۳۲}\, a^{\cancel{۳}} = \cancel{۱۶}\, \cancel{a^۲}\, h$$

$$\Rightarrow ۲a = h \Rightarrow \frac{h}{۲a} = ۱ \xrightarrow{\times \frac{۱}{۲}} \frac{h}{۴a} = \frac{۱}{۲}$$

پس نسبت موردنظر برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۴۱ گزینهٔ ۳ ۴۰۰٪ حجم مخروط معادل $\frac{۴۰۰}{۱۰۰}$ یا ۴ برابر حجم مخروط است، پس وقتی شعاع ۳ برابر و ارتفاع k برابر می‌شود حجم مخروط از V به $V + ۴V = ۵V$ تبدیل می‌شود، یعنی حجم مخروط جدید ۵ برابر حجم مخروط اولیه است، پس داریم:

$$\frac{V_{مخروط جدید}}{V_{مخروط اولیه}} = ۵ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{\cancel{۳}}\pi(۳r)^۲(hk)}{\frac{۱}{\cancel{۳}}\pi r^۲ h} = ۵$$

$$\Rightarrow \frac{۹r^۲hk}{r^۲h} = ۵ \Rightarrow ۹k = ۵ \Rightarrow k = \frac{۵}{۹}$$

۴۲ گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که شعاع قاعدهٔ استوانه برابر ۴ است، بنابراین وقتی آب تا ارتفاع ۶ سانتی‌متر در این استوانه بالا می‌آید، حجم آب برابر می‌شود با: $V_{استوانه} = V_{آب} = \pi(۴)^۲ \times ۶ = ۹۶\pi$

حالا توجه کنید که ۹۶π برابر حجم مخروط اولیه نیز است، پس اگر فرض کنیم شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r است، آن‌گاه داریم:

$$V_{مخروط} = ۹۶\pi \Rightarrow \frac{۱}{۳}\cancel{\pi} r^۲ \times \cancel{۱۲}^{۱} = \cancel{۹۶}^{۸}\, \cancel{\pi} \Rightarrow \frac{r^۲}{۳} = ۸$$

$$\Rightarrow r^۲ = ۲۴ \Rightarrow r = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow قطر قاعده = ۲r = ۲ \times ۲\sqrt{۶} = ۴\sqrt{۶}$$

۴۳ گزینهٔ ۴ چون وقتی آب درون استوانه را در نیم‌کره و مخروط خالی می‌کنیم، هیچ آبی باقی نمی‌ماند پس حجم استوانه برابر مجموع حجم نیم‌کره و مخروط است، بنابراین باید داشته باشیم:

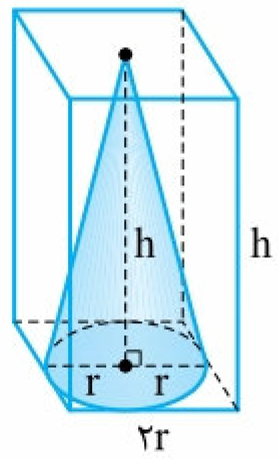
$$V_{استوانه} = V_{نیم‌کره} + V_{مخروط}$$

$$\Rightarrow \pi R^۲ h = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳ + \frac{۱}{۳}\pi R^۲(۲h)$$

$$\Rightarrow (\pi R^۲ h = \frac{۲}{۳}\pi R^۳ + \frac{۲}{۳}\pi R^۲ h) \div (\pi R^۲)$$

$$h = \frac{۲}{۳}R + \frac{۲}{۳}h \Rightarrow h - \frac{۲}{۳}h = \frac{۲}{۳}R \Rightarrow \frac{۱}{\cancel{۳}}h = \frac{۲}{\cancel{۳}}R$$

$$\Rightarrow h = ۲R$$



۴۴ گزینهٔ ۳ با توجه به شکل، قاعدهٔ مکعب‌مستطیل، مربعی به طول ضلع ۲r و ارتفاع آن برابر h است، پس حجم فضای بین مخروط و مکعب مستطیل برابر است با:

$$V_{\text{مکعب مستطیل}} - V_{\text{مخروط}} = ۲r \times ۲r \times h - \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

$$= ۴r^۲h - \frac{۱}{\cancel{۳}} \times \cancel{۳} r^۲ h = ۴r^۲h - r^۲h = ۳r^۲h$$

۴۵ گزینهٔ ۱ مانند سؤال قبل اگر فرض کنیم طول یال مکعب برابر a است، آن‌گاه شعاع قاعدهٔ مخروط برابر $\frac{a}{۲}$ و ارتفاع آن نیز برابر a است. پس باید داشته باشیم:

$$V_{\text{مکعب}} - V_{\text{مخروط}} = ۱۶ \Rightarrow a^۳ - \frac{۱}{\cancel{۳}}\pi(\frac{a}{۲})^۲ a = ۴۸$$

$$\Rightarrow a^۳ - \frac{a^۳}{۴} = ۴۸ \Rightarrow \frac{\cancel{۳}a^۳}{۴} = \cancel{۴۸} \Rightarrow \frac{a^۳}{۴} = ۱۶$$

$$\Rightarrow a^۳ = ۶۴ \Rightarrow a = ۲$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{مساحت قاعدهٔ مخروط} = \pi(\frac{a}{۲})^۲ = ۳ \times (\frac{۲}{۲})^۲ = ۳ \times ۱^۲ = ۳ \\ \text{سطح جانبی مکعب} = ۴ \times (۲ \times ۲) = ۱۶ \end{array}\right\}$$

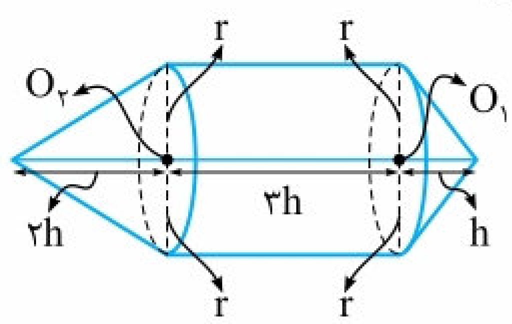
$$\Rightarrow \text{اختلاف} = ۱۶ - ۳ = ۱۳$$

۴۶ گزینهٔ ۳ ابتدا دقت کنید که اگر فرض کنیم ارتفاع مخروط سمت راست برابر h است، آن‌گاه ارتفاع مخروط سمت چپ برابر ۲h و $O_۱O_۲$ نیز برابر ۳h است. حالا برای رسیدن به پاسخ مسئله کافی است نسبت مجموع حجم دو مخروط به حجم استوانه را محاسبه کنیم، که این نسبت نیز به صورت زیر قابل محاسبه است:

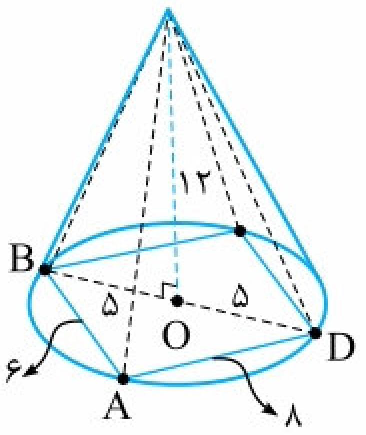
$$\frac{\text{مجموع حجم مخروط‌ها}}{\text{حجم استوانه}} = \frac{\frac{۱}{۳}\pi(r)^۲(۲h) + \frac{۱}{۳}\pi(r)^۲(h)}{\pi r^۲(۳h)}$$

$$= \frac{\cancel{\pi r^۲ h}}{۳\cancel{\pi r^۲ h}} = \frac{۱}{۳}$$

حالا چون نسبت موردنظر برابر $\frac{۱}{۳}$ است، پس وقتی آب داخل مخروط‌ها درون استوانه ریخته می‌شود، $\frac{۱}{۳}$ حجم استوانه خیس می‌شود و این یعنی $\frac{۲}{۳}$ حجم استوانه خیس نمی‌شود.



۴۷ گزینهٔ ۲ ابتدا دقت کنید که ارتفاع هرم و مخروط با هم برابر است، پس ارتفاع مخروط هم برابر ۱۲ سانتی‌متر است. از طرف دیگر قطر قاعدهٔ هرم برابر با قطر قاعدهٔ مخروط است، یعنی قطر قاعدهٔ مخروط برابر است با:



$$\overset{\Delta}{ABD}: BD^۲ = AB^۲ + AD^۲$$

$$\Rightarrow BD^۲ = ۶^۲ + ۸^۲$$

$$\Rightarrow BD^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow BD = ۱۰$$

پس شعاع قاعدهٔ مخروط برابر ۵ سانتی‌متر بوده و در نتیجه حجم مخروط برابر می‌شود با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{\cancel{۳}}\pi(۵)^۲ \times \overset{۴}{\cancel{۱۲}} = ۱۰۰\pi = ۱۰۰ \times ۳ = ۳۰۰$$

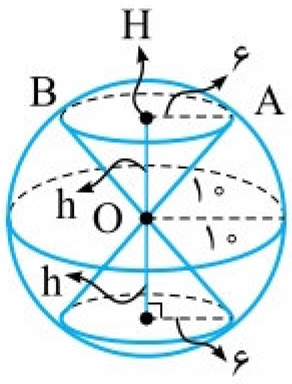
حجم هرم محاط در مخروط نیز برابر است با:

$$\frac{۱}{۳} \times (۶ \times ۸) \times ۱۲ = ۴ \times ۶ \times ۸ = ۱۹۲$$

و در نتیجه حجم فضای بین مخروط و هرم برابر است با:

$$۳۰۰ - ۱۹۲ = ۱۰۸$$

۴۸ گزینهٔ ۳ ابتدا با توجه به شکل، ارتفاع هر مخروط را به دست می‌آوریم:



$$\overset{\Delta}{OHA}: OH^۲ + AH^۲ = OA^۲$$

$$\Rightarrow h^۲ + ۶^۲ = ۱۰^۲$$

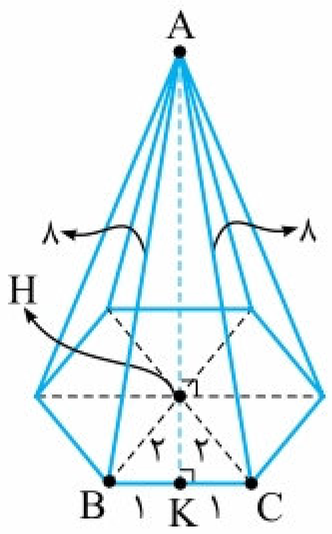
$$\Rightarrow h^۲ = ۶۴ \Rightarrow h = ۸$$

حالا برای به دست آوردن حجم فضای بین کره و مخروط‌ها کافی است ابتدا حجم کره را حساب کرده و سپس دو برابر حجم یک مخروط را از آن کم کنیم، پس حجم موردنظر برابر است با:

$$V_{\text{کره}} - ۲ \times V_{\text{مخروط}} = \frac{۴}{۳}\pi(۱۰)^۳ - ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi(۶)^۲ \times ۸$$

$$= \frac{۴۰۰۰}{۳}\pi - ۱۹۲\pi = \frac{۴۰۰۰}{\cancel{۳}} \times \cancel{۳} - ۱۹۲ \times ۳ = ۴۰۰۰ - ۵۷۶ = ۳۴۲۴$$

۴۹ گزینهٔ ۱ با توجه به شکل ابتدا طول ارتفاع AK را محاسبه می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{AKC}: AC^۲ = AK^۲ + KC^۲$$

$$\Rightarrow ۸^۲ = AK^۲ + ۱^۲$$

$$\Rightarrow AK^۲ = ۶۳ \Rightarrow AK = \sqrt{۶۳}$$

حالا توجه کنید که چون مثلث BHC متساوی‌الاضلاع است، پس داریم:

$$BH^۲ = BK^۲ + HK^۲ \Rightarrow ۲^۲ = ۱^۲ + HK^۲ \Rightarrow HK = \sqrt{۳}$$

حالا برای به دست آوردن طول ارتفاع هرم کافی است رابطهٔ فیثاغورس $AK^۲ = AH^۲ + HK^۲$ در مثلث AHK را بنویسیم، پس داریم:

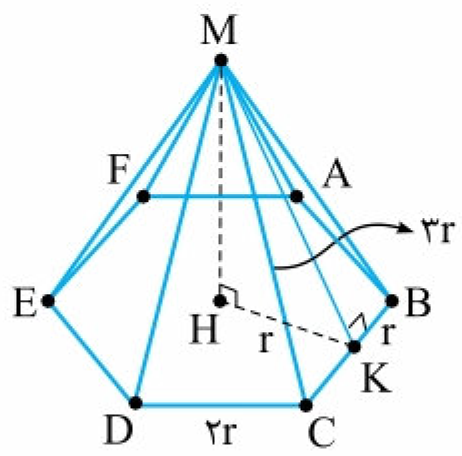
$$\Rightarrow (\sqrt{۶۳})^۲ = AH^۲ + (\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow AH^۲ = ۶۰ \Rightarrow AH = \sqrt{۶۰}$$

نهایتاً با توجه به این‌که مساحت قاعدهٔ هرم برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(۲)^۲ = ۶\sqrt{۳}$ است، پس حجم هرم برابر می‌شود با:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{\cancel{۳}} \times \cancel{۶}\sqrt{۳} \times \sqrt{۶۰} = ۲\sqrt{۱۸۰} = ۲ \times ۳\sqrt{۲۰}$$

$$= ۶\sqrt{۲۰}$$

۵۰ گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم طول هر ضلع قاعده برابر $2r$ است، آن‌گاه طول هر ساق برابر $\frac{3}{2}\times 2r = 3r$ و طول قطر بزرگ برابر $4r = 2\times 2r$ می‌شود، پس با توجه به شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{MKC}: MK^2+CK^2=MC^2 \Rightarrow MK^2+r^2=(3r)^2$$

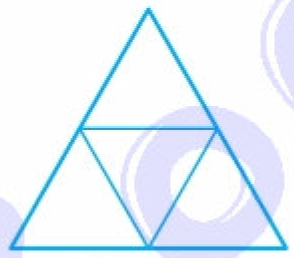
$$\Rightarrow MK^2=8r^2 \Rightarrow MK=\sqrt{8}r$$

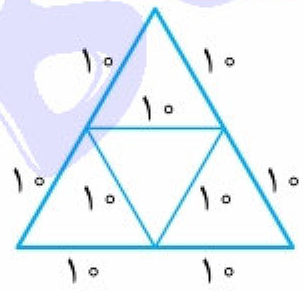
حالا به کمک رابطهٔ فیثاغورس در مثلث MHK طول ارتفاع هرم را به دست آورده و پاسخ مسئله را می‌یابیم.

$$\overset{\Delta}{MHK}: MK^2=MH^2+HK^2 \Rightarrow (\sqrt{8}r)^2=MH^2+r^2$$

$$\Rightarrow MH^2=7r^2 \Rightarrow MH=\sqrt{7}r \Rightarrow \frac{\text{طول ارتفاع}}{\text{طول قطر بزرگ}}=\frac{\sqrt{7}r}{4r}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

۵۱ گزینهٔ ۴ با توجه به شکل مساحت جانبی برابر مجموع مساحت سه مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱۰ سانتی‌متر است که برابر است با:





$$3\times((10)^2\frac{\sqrt{3}}{4})=3\times\cancel{100}^{25}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}=75\sqrt{3}$$

۵۲ گزینهٔ ۳ هرم موردنظر از ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۴ سانتی‌متر تشکیل می‌شود، پس مساحت کل آن برابر است با:

$$4\times((4)^2\frac{\sqrt{3}}{4})=4\times4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$$

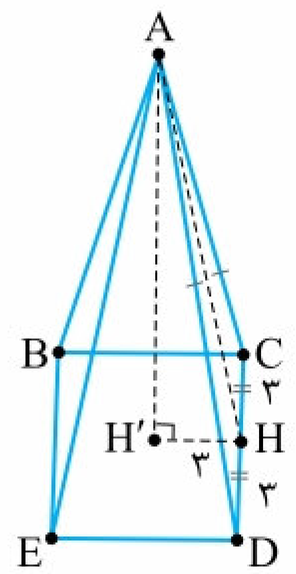
۵۳ گزینهٔ ۲ مساحت هر وجه چهاروجهی برابر است با:

$$(3a)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}a^2}{4}$$

پس داریم:

$$\frac{V_{\text{کره}}}{\text{سطح چهاروجهی}}=\frac{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3}a)^3}{\cancel{4}\times\frac{9\sqrt{3}}{\cancel{4}}a^2}=\frac{\frac{4}{\cancel{3}}\pi\times\cancel{3}\cancel{\sqrt{3}}\cancel{a^3}^{a}}{9\cancel{\sqrt{3}}\cancel{a^2}}=\frac{4\pi a}{9}$$

۵۴ گزینهٔ ۲ با توجه به شکل چون مساحت قاعده برابر ۳۶ واحد است، پس سطح جانبی هرم برابر $96-36=60$ واحد است. از طرفی مساحت جانبی هرم چهار برابر S_{ACD} است، یعنی $S_{ACD}=\frac{60}{4}=15$ و در نتیجه داریم:



$$S_{ACD}=\frac{AH\times CD}{2}=15 \Rightarrow AH\times6=30 \Rightarrow AH=5$$

در نتیجه با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ AH'H داریم:

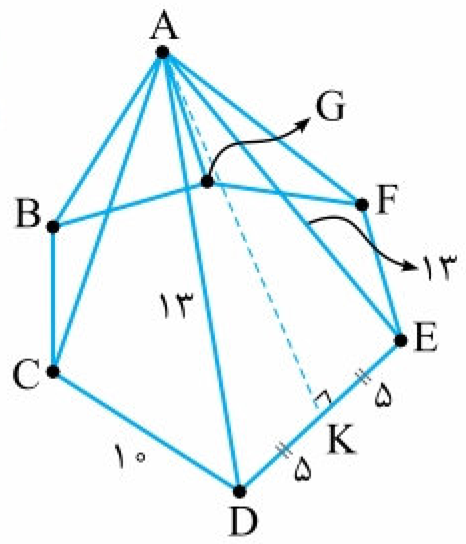
$$(AH')^2+(HH')^2=AH^2 \Rightarrow (AH')^2+3^2=5^2$$

$$\Rightarrow (AH')^2=16 \Rightarrow AH'=4$$

۵۵ گزینهٔ ۳ دقیقاً مثل مسئلهٔ قبل ارتفاع هرم برابر ۴ واحد می‌شود، پس حجم هرم برابر است با:

$$\frac{1}{3}\times S_{\text{قاعده}}\times\text{ارتفاع}=\frac{1}{3}\times(6\times6)\times4=12\times4=48$$

۵۶ گزینهٔ ۳ ابتدا با توجه به شکل، طول ارتفاع AK را محاسبه می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{AKE}: AE^2=AK^2+KE^2$$

$$\Rightarrow 13^2=AK^2+5^2$$

$$\Rightarrow AK^2=144 \Rightarrow AK=12$$

بنابراین با توجه به طول ارتفاع، مساحت مثلث ADE برابر می‌شود با: $\frac{12\times10}{2}=60$

و چون مساحت جانبی ۶ برابر مساحت این مثلث است، پس پاسخ مسئله برابر می‌شود با: $6\times60=360$

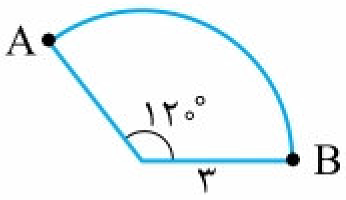
۵۷ گزینهٔ ۳ فرض کنید شعاع دایرهٔ داده‌شده برابر r باشد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$\pi r^2=400\pi \Rightarrow r^2=400 \Rightarrow r=20$$

پس طول کمان ACB برابر می‌شود با:

$$\frac{315}{360}\times\underbrace{(2\pi\times20)}_{\text{محیط دایره}}=\frac{7}{8}\times40\pi=35\pi$$

۵۸ گزینهٔ ۴ با توجه به شکل، طول کمان AB برابر است با:



$$\frac{120}{360}\times(2\pi\times3)=\frac{1}{3}\times6\pi=2\pi$$

پس محیط قاعدهٔ مخروط ایجادشده برابر 2π است و اگر فرض کنیم شعاع قاعده برابر r' است، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$\cancel{2\pi}r'=\cancel{2\pi} \Rightarrow r'=1$$

بنابراین مساحت کل مخروط برابر است با مساحت قطاع دایرهٔ اولیه به علاوهٔ مساحت قاعدهٔ مخروط که می‌شود: $S_{\text{کل}}=S_{\text{قاعده}}+S_{\text{قطاع}}$

$$\Rightarrow S_{\text{کل}}=\pi(1)^2+\frac{120}{360}\times\pi(3)^2=\pi+\frac{1}{\cancel{3}}\times\cancel{9\pi}^{3\pi}=4\pi$$

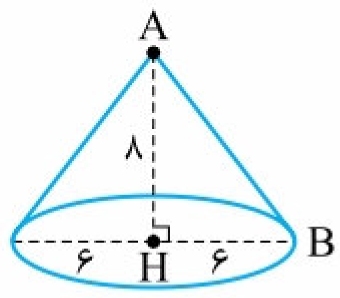
۵۹ گزینهٔ ۱ حجم مخروط برابر ۲۸۸ و ارتفاع آن برابر ۸ است، پس اگر فرض کنیم شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r است، باید داشته باشیم:

$$V_{\text{مخروط}}=288 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2\times8=288 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{3}}\times\cancel{3}\times r^2=36$$

$$\Rightarrow r^2=36 \Rightarrow r=6$$

حالا دقت کنید که طول کمان AMB برابر همان محیط قاعدهٔ مخروط است که می‌شود: $۲\pi r = ۲\pi \times ۶ = ۱۲\pi = ۱۲ \times ۳ = ۳۶$

از طرف دیگر می‌دانیم طول مولد مخروط برابر شعاع قطاع دایره‌ای است که از آن ساخته شده است، پس با توجه به شکل، شعاع دایرهٔ اولیه به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\Rightarrow AB^۲ = AH^۲ + HB^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۸^۲ + ۶^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow AB = ۱۰$$

پس شعاع دایرهٔ اولیه برابر ۱۰ و در نتیجه محیط آن برابر $۲\pi \times ۱۰ = ۲۰\pi = ۶۰$ واحد است. حالا اگر فرض کنیم زاویهٔ موردنظر برابر α است، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$\frac{\alpha}{۳۶۰} = \frac{۳۶}{۶۰} \Rightarrow \alpha = \frac{\cancel{۳۶۰}^{۶} \times ۳۶}{\cancel{۶۰}} \Rightarrow \alpha = ۲۱۶^\circ$$

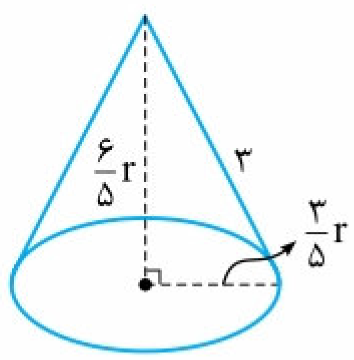
۶۰ گزینهٔ ابتدا سطح کل نیم‌کره را به دست می‌آوریم:

$$\text{سطح کل نیم‌کره} = ۳\pi r^۲ = ۳\pi(۶)^۲ = ۱۰۸\pi$$

حالا توجه کنید که سطح جانبی مخروط برابر همان سطح قسمتی از دایره است که مخروط توسط آن درست شده، بنابراین باید قسمتی از دایره به شعاع ۱۲ سانتی‌متر را پیدا کنیم که مساحت آن برابر ۱۰۸π واحد باشد. برای این کار کافی است ۱۰۸π را بر مساحت کل دایره تقسیم کنیم، پس داریم:

$$\text{کسر مربوط به قطاع} = \frac{۱۰۸\pi}{\pi(۱۲)^۲} = \frac{\cancel{۱۰۸}^{۳}\,\cancel{\pi}}{\cancel{۱۴۴}_{۴}\,\cancel{\pi}} = \frac{۳}{۴}$$

۶۱ گزینهٔ فرض می‌کنیم شعاع دایرهٔ اولیه برابر r و شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r' باشد، در این صورت باید داشته باشیم:



$$\text{محیط قاعدهٔ مخروط} = \frac{۳}{۵} \times \text{محیط دایرهٔ اولیه}$$

$$\Rightarrow \cancel{۲\pi} r' = \frac{۳}{۵}\cancel{۲\pi} r \Rightarrow r' = \frac{۳}{۵} r$$

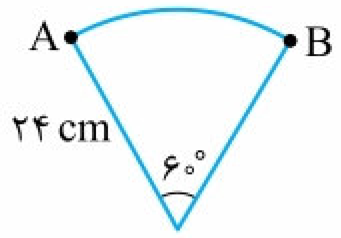
حالا چون ارتفاع مخروط دو برابر شعاع قاعدهٔ آن است، پس ارتفاع برابر $۲ \times \frac{۳}{۵} r = \frac{۶}{۵} r$ می‌شود. پس چون طول یال مخروط برابر ۳ واحد است، با توجه به شکل داریم: $(\frac{۶}{۵}r)^۲ + (\frac{۳}{۵}r)^۲ = ۳^۲$

$$\Rightarrow \frac{۳۶}{۲۵} r^۲ + \frac{۹}{۲۵} r^۲ = ۹ \Rightarrow ۳۶r^۲ + ۹r^۲ = ۹ \times ۲۵$$

$$\Rightarrow ۴۵r^۲ = ۹ \times ۲۵ \Rightarrow r^۲ = \frac{۹ \times ۲۵}{۴۵} \Rightarrow r^۲ = ۵ \Rightarrow r = \sqrt{۵}$$

پس شعاع دایرهٔ اولیه برابر $\sqrt{۵}$ و در نتیجه مساحت آن برابر $\pi \times \sqrt{۵} \times \sqrt{۵} = ۵\pi$ است.

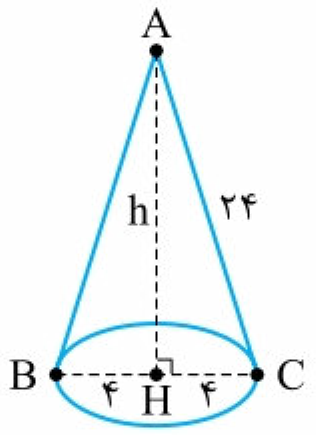
۶۲ گزینهٔ ابتدا توجه کنید که طول کمان AB برابر محیط قاعدهٔ مخروط ایجادشده است. پس محیط قاعدهٔ مخروط برابر است با:



$$\frac{۶۰}{۳۶۰} \times (۲\pi \times ۲۴) = \frac{۱}{۶} \times ۴۸\pi = ۸\pi$$

بنابراین اگر فرض کنیم شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r است، آن‌گاه باید داشته باشیم: $۲\pi r = ۸\pi \Rightarrow r = ۴$

حالا با توجه به شکل و این‌که طول مولد مخروط برابر شعاع دایرهٔ اولیه است، ارتفاع مخروط را محاسبه کرده و نهایتاً حجم مخروط را به دست می‌آوریم:



$$\overset{\Delta}{AHC}: AC^۲ = AH^۲ + HC^۲ \Rightarrow ۲۴^۲ = ۴^۲ + h^۲$$

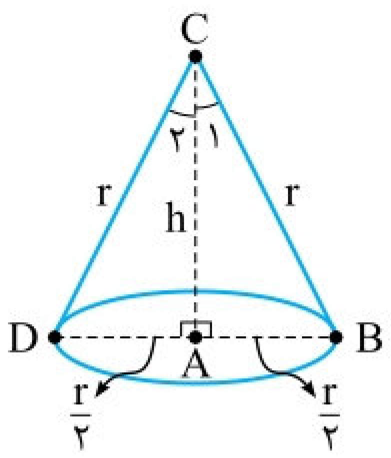
$$\Rightarrow ۵۶۰ = h^۲ \Rightarrow h = ۴\sqrt{۳۵} \Rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

$$= \frac{۱}{\cancel{۳}}\pi \times ۴^۲ \times ۴\sqrt{۳۵} = ۶۴\sqrt{۳۵}$$

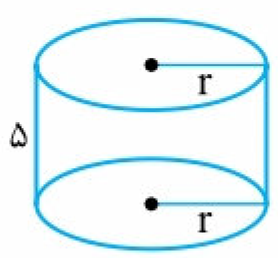
۶۳ گزینهٔ فرض کنید شعاع نیم‌دایره برابر r و شعاع قاعدهٔ مخروط r' باشد، در این صورت چون طول کمان نیم‌دایره برابر محیط قاعدهٔ مخروط است، پس باید داشته باشیم:

$$\underbrace{\frac{۱}{۲} \times \cancel{۲}\pi r}_{\text{طول کمان نیم‌دایره}} = \cancel{۲}\pi r' \Rightarrow \frac{r}{۲} = r'$$

پس مخروط موردنظر به شکل زیر به دست می‌آید. حالا توجه داشته باشید که در **هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف طول ضلع وتر است**، پس با توجه به این‌که طول مولد مخروط برابر شعاع نیم‌دایرهٔ اولیه یعنی r است و با توجه به شکل نتیجه می‌گیریم $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ = ۳۰^\circ$ چون AD و AB به ترتیب نصف وترهای CD و BC در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ACD و ABC هستند؛ بنابراین زاویهٔ رأس مخروط برابر $۳۰ + ۳۰ = ۶۰^\circ$ است.



۶۴ گزینهٔ دقت کنید که با لوله‌کردن مستطیل یک استوانه تولید می‌شود که محیط قاعدهٔ آن برابر a است، پس اگر فرض کنیم، شعاع قاعده برابر r است، آن‌گاه باید داشته باشیم:



$$۲\pi r = a \Rightarrow r = \frac{a}{۲\pi}$$

حالا چون حجم این استوانه برابر ۳۲۰π است، پس داریم:

$$V_{\text{استوانه}} = ۳۲۰\pi \Rightarrow \pi(r^۲) \times \cancel{۵} = \cancel{۳۲۰}\pi$$

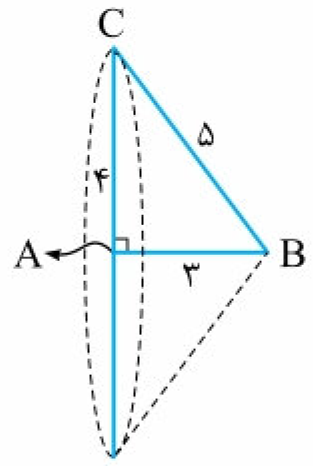
$$\Rightarrow \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 = 64\cancel{\pi}$$

$$\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 = 8^2 \Rightarrow \frac{a}{2\pi} = 8 \Rightarrow a = 16\pi$$

نهایتاً چون مساحت جانبی استوانهٔ تولیدشده برابر همان مساحت مستطیل اولیه است، پس داریم:

$$S_{\text{جانبی}} = a \times 5 = 16\pi \times 5 = 80\pi$$

۶۵ گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که در مثلث ABC داریم:



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

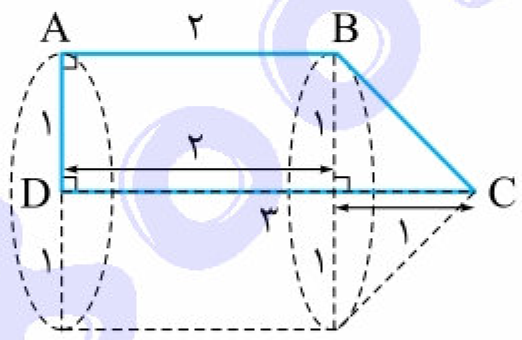
$$\Rightarrow AB^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow AB^2 = 9$$

$$\Rightarrow AB = 3$$

بنابراین از دوران شکل حول AB یک مخروط به ارتفاع ۳ و شعاع قاعدهٔ ۴ تولید می‌شود، که حجم آن برابر است با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{\cancel{3}}\pi(4)^2 \times \cancel{3} = 16\pi$$

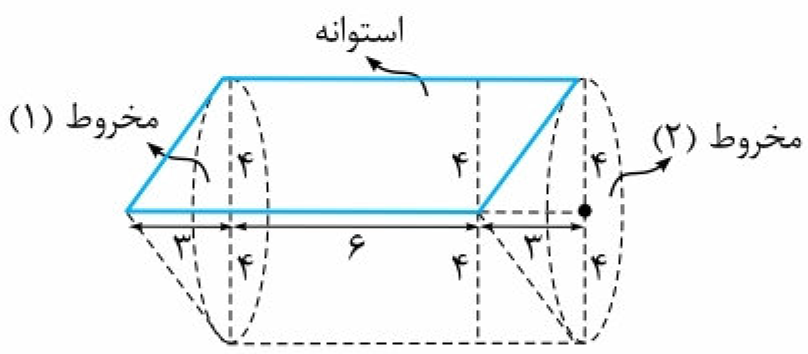
۶۶ گزینهٔ ۲ مطابق شکل مقابل پس از دوران شکلی متشکل از یک مخروط و یک استوانه تولید می‌شود، پس حجم موردنظر برابر است با:



$$V_{\text{کل}} = V_{\text{مخروط}} + V_{\text{استوانه}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{کل}} = \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 1 + \pi \times (1)^2 \times 2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

۶۷ گزینهٔ ۳ با توجه به شکل، حجم ایجادشده برابر است با:



$$V_{\text{کل}} = V_{\text{مخروط ۱}} + (V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط ۲}})$$

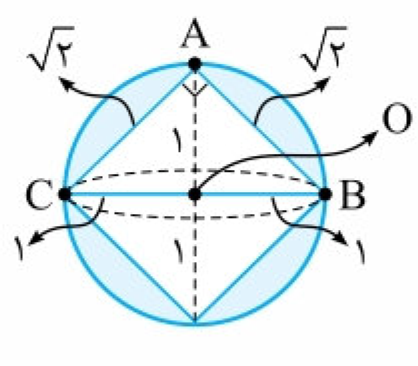
اما توجه کنید حجم مخروط‌های ۱ و ۲ با هم برابر است، پس داریم:

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}}$$

بنابراین چون شعاع قاعدهٔ استوانه ۴ واحد و ارتفاع آن ۹ واحد است، داریم:

$$V_{\text{کل}} = \pi(4)^2 \times 9 = \pi \times 16 \times 9 = 144\pi$$

۶۸ گزینهٔ ۳ بعد از دوران شکل یک کره تولید می‌شود که در دل آن دو مخروط موجودند. حالا توجه کنید که قطر قاعدهٔ مخروط‌ها و هم‌چنین قطر کره برابر است با:



$$\overset{\Delta}{ABC}: BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$$

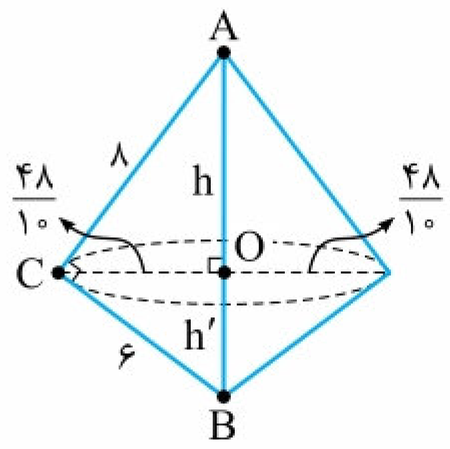
$$\Rightarrow BC^2 = 4 \Rightarrow BC = 2$$

پس شعاع قاعدهٔ مخروط‌ها و شعاع کره برابر $1 = \frac{2}{2}$ واحد است و در نتیجه حجم موردنظر برابر می‌شود با:

$$V_{\text{کره}} - 2 \times V_{\text{مخروط}} = \frac{4}{3}\pi(1)^3 - 2 \times \frac{1}{3}\pi(1)^2(1)$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

۶۹ گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 6^2 + 8^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 100 \Rightarrow AB = 10$$

ضمناً اگر ارتفاع وارد از C بر AB در این مثلث را رسم کنیم، طول این ارتفاع از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{CO \times AB}{2} = \frac{AC \times BC}{2} \Rightarrow \frac{10 \times CO}{2} = \frac{8 \times 6}{2}$$

$$\Rightarrow 10CO = 48 \Rightarrow CO = \frac{48}{10}$$

حالا همان‌طور که در شکل می‌بینید پس از دوران **دو مخروط هم‌قاعده** به وجود می‌آیند که حجم آن‌ها نیز برابر است با:

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{مخروط بالایی}} + V_{\text{مخروط پایینی}}$$

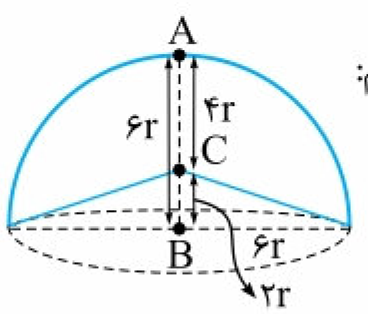
$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{48}{10}\right)^2 \times h + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{48}{10}\right)^2 \times h' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{48}{10}\right)^2(h + h')$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{1}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\pi \times \frac{\overset{\overset{8}{\cancel{16}}}{\cancel{48}}}{\cancel{10}} \times \frac{48}{\underset{5}{\cancel{10}}} \times \cancel{10} = \frac{8 \times 48}{5}\pi = \frac{384\pi}{5}$$

۷۰ گزینهٔ ۲ هر ۹۰ درجه دوران یک ربع دایره حول شعاع، باعث ایجاد $\frac{1}{8}$ کرهٔ کامل با همان شعاع می‌شود، پس چون $270^\circ = 3 \times 90^\circ$، پس 270° دوران ربع دایره باعث ایجاد $\frac{3}{8}$ یک کرهٔ کامل می‌شود، پس حجم موردنظر برابر است با:

$$\frac{3}{8} \times \frac{4}{3}\pi(4)^3 = \frac{\cancel{3}}{\underset{1}{\cancel{8}}} \times \frac{4}{\cancel{3}} \times \overset{8}{\cancel{64}} \times \pi = 32\pi$$

۷۱ گزینهٔ ۱ چون $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$، پس داریم:



$$\frac{AC}{6r} = \frac{2}{3} \Rightarrow AC = \frac{12r}{3} \Rightarrow AC = 4r$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} AB = AC + BC \Rightarrow 6r = 4r + BC \Rightarrow BC = 2r$$

بنابراین حجم ایجادشده همان‌طور که در شکل می‌بینید برابر می‌شود با حجم نیم‌کره‌ای به شعاع 6r منهای حجم مخروطی به

شعاع قاعدهٔ ۶r و ارتفاع ۲r، پس داریم:

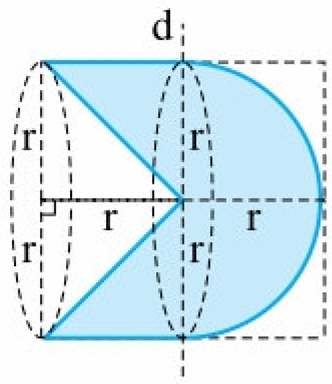
$$V=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi(6r)^3-\frac{1}{3}\pi(6r)^2(2r)$$

$$\Rightarrow V=\frac{2}{\cancel{3}_{1}}\times\pi\times\overset{72}{\cancel{216}}r^3-\frac{1}{\cancel{3}}\times\pi\times\cancel{72}r^3$$

$$\Rightarrow V=144\pi r^3-24\pi r^3 \Rightarrow V=120\pi r^3$$

$$\Rightarrow \frac{V}{120\pi}=r^3 \xrightarrow{(\sqrt[3]{\ })} \sqrt[3]{\frac{V}{120\pi}}=r$$

۷۲ گزینهٔ ۴ با توجه به شکل، پس از دوران در سمت راست خط d یک نیم‌کره و در سمت چپ آن یک استوانه که یک مخروط از دل آن خارج شده است، تولید می‌شود، بنابراین حجم موردنظر برابر است با:



$$V_{\text{نیم‌کره}}+V_{\text{استوانه}}-V_{\text{مخروط}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2\times r-\frac{1}{3}\pi r^2\times r$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^3-\frac{1}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$ حجم کره به شعاع r:

پس قطر کرهٔ موردنظر برابر ۲r است.

۷۳ گزینهٔ ۳ قسمت برداشته‌شده معادل $\frac{1}{8}$ حجم کل کره است، پس داریم:

$$\frac{1}{\cancel{8}_{2}}\times\frac{\cancel{4}}{3}\pi r^3=36\pi$$

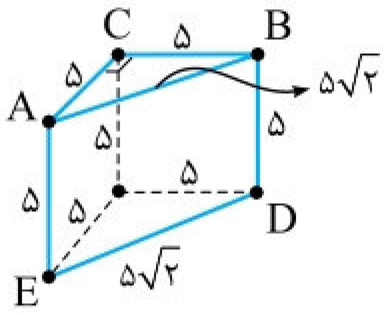
$$\Rightarrow \frac{1}{6}\cancel{\pi}r^3=36\cancel{\pi} \Rightarrow r^3=216 \Rightarrow r=6$$

سطح کل باقی‌مانده نیز برابر است با $\frac{7}{8}$ سطح یک کرهٔ کامل به شعاع ۶ به علاوهٔ سطح ۳تا ربع دایره به شعاع ۶، پس پاسخ مسئله برابر است با:

$$S_{\text{کل}}=\frac{7}{\cancel{8}_{2}}\times\cancel{4}\pi(6)^2+3\times\frac{1}{4}\pi(6)^2=7\times18\pi+3\times9\times\pi$$

$$=126\pi+27\pi=153\pi$$

۷۴ گزینهٔ ۳ ابتدا دقت کنید که با توجه به شکل داریم:



$$AB^2=BC^2+AC^2$$

$$\Rightarrow AB^2=25+25 \Rightarrow AB^2=50$$

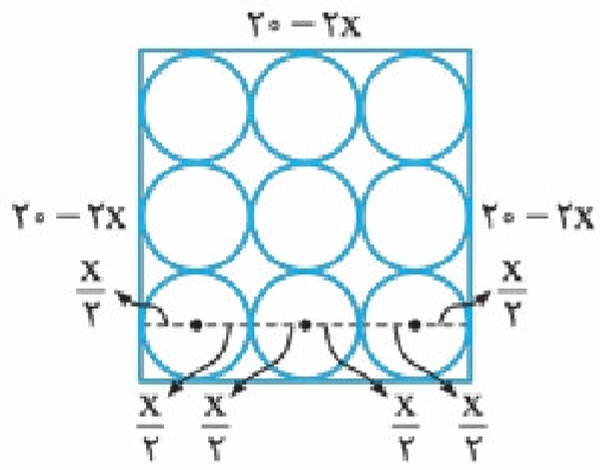
$$\Rightarrow AB=5\sqrt{2}$$

بنابراین سطح شکل ایجادشده برابر است با مجموع مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه به طول ضلع‌های قاعدهٔ ۵ و دو مربع به طول ضلع ۵ و یک مستطیل به طول اضلاع ۵ و $5\sqrt{2}$ که می‌شود:

$$S_{\text{کل}}=\cancel{2}\times\frac{5\times5}{\cancel{2}}+2\times5\times5+5\sqrt{2}\times5=25+50+25\sqrt{2}$$

$$=25(1+2+\sqrt{2})=25(3+\sqrt{2})$$

۷۵ گزینهٔ ۱ اگر از بالا به جعبه نگاه کنیم شکلی مانند شکل زیر می‌بینیم، پس با توجه به اندازهٔ ضلع‌ها و شعاع کره‌ها باید داشته باشیم:



$$20-2x=6\times\frac{x}{2} \Rightarrow 20-2x=3x \Rightarrow 5x=20$$

$$\Rightarrow x=4$$

پس شعاع هر کره برابر $\frac{x}{2}=\frac{4}{2}=2$ واحد بوده و در نتیجه نسبت حجم به سطح هر کره برابر می‌شود با:

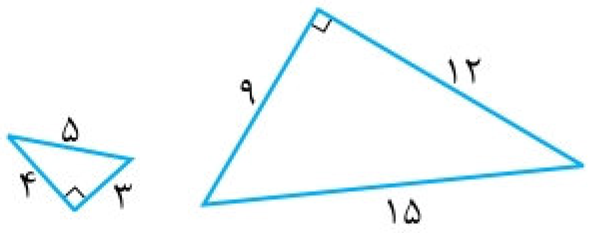
$$\frac{V}{S}=\frac{\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}(2)^3}{\cancel{4}\cancel{\pi}(2)^2}=\frac{\frac{8}{3}}{4}=\frac{2}{3}$$

مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	آزمون نیمسال دوم	ریاضی نهم

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (۱)

	درست	نادرست
الف) اگر $a^{۲}b < ۰$ باشد، آن‌گاه b منفی است.	○	○
ب) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد.	○	○
پ) عدد $(-\frac{۱}{۳})^{-۲}$ از عدد $۹^{-۱}$ کوچک‌تر است.	○	○
ت) عبارت «عددهای اول بین ۱۴ و ۱۶» مجموعهٔ تهی را مشخص می‌کند.	○	○

۲ جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید. (۱)



الف) نسبت تشابه در دو مثلث روبه‌رو، برابر .... است.

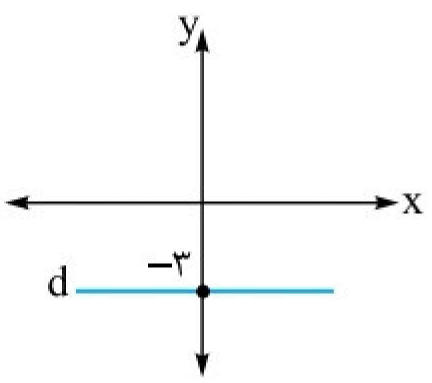
ب) تعداد وجه‌های جانبی هرمی با قاعدهٔ مستطیل، برابر .... است.

پ) حاصل عبارت $۵^{-۲} \times (\frac{۱}{۵})^{۶}$ به صورت عددی توان‌دار برابر .... است.

ت) به دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم‌کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است، .... گوییم.

۳ گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (۱)

الف) معادلهٔ خط d کدام گزینه است؟



۱) $y = ۳x$

۲) $x = -۳$

۳) $y = -۳$

۴) $x + y = -۳$

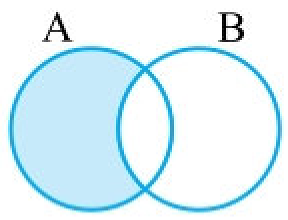
ب) نماد علمی ۰/۰۰۰۲۹ کدام است؟

۱) $۲/۹ \times ۱۰^{-۴}$ ۲) ۲۹×۱۰^{-۴} ۳) $۲/۹ \times ۱۰^{۴}$ ۴) ۲۹×۱۰^{۴}

پ) کدام‌یک از اعداد زیر، نمایش اعشاری مختوم دارد؟

۱) $\frac{۷}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱}{۵۵}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۷}$

ت) کدام گزینه، قسمت رنگی را نشان می‌دهد؟



۱) $B - A$ ۲) $A - B$

۳) $(A \cup B) - A$ ۴) $(A - B) \cup (B - A)$

۴ اگر خانواده‌ای دو فرزند داشته باشد، چه‌قدر احتمال دارد که این خانواده یک فرزند دختر و یک فرزند پسر داشته باشد؟ (۰/۵)

۵ اگر $A = \{x^{۲} + ۲ | x \in \mathbb{N}, x \le ۳\}$ و $B = \{۴, ۵, ۶\}$ باشد: (۱)

الف) مجموعهٔ A را با اعضایش نمایش دهید.

ب) مجموعهٔ $A \cap B$ را مشخص کنید.

۶ الف) حاصل عبارت مقابل را به صورت ساده‌شده بنویسید. $\sqrt{(۳ - \sqrt{۱۰})^{۲}} - \sqrt{۱۰} =$ (۰/۷۵)

ب) داخل $\square$ علامت $(\in, \notin, \subseteq$ یا $\not\subseteq)$ قرار دهید. (۰/۵)

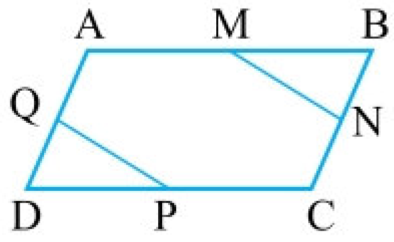
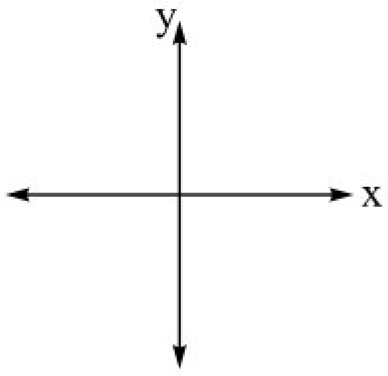
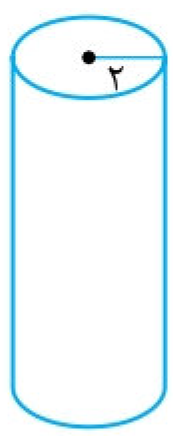
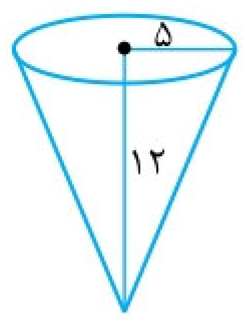
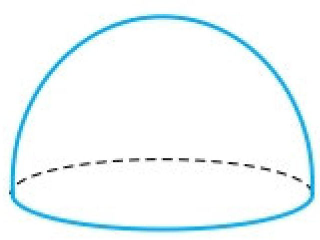
۱) $۳/۷ \square \mathbb{Q}$ ۲) $\mathbb{R} \square \mathbb{Z}$

۷ آیا استدلال مسئلهٔ زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. (۰/۵)

مسئله: نشان دهید مجموع زوایای خارجی هر مثلث، ۳۶۰ درجه است.

اثبات: یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر می‌گیریم. چون زاویهٔ خارجی هر رأس آن ۱۲۰ درجه است، پس مجموع زوایای خارجی در سه رأس ۳۶۰ درجه می‌باشد؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم مجموع زوایای خارجی هر مثلث برابر ۳۶۰ درجه است.

مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	آزمون نیمسال دوم	ریاضی نهم

ردیف	سؤال	بارم
۸	در شکل زیر ABCD متوازی‌الاضلاع است و M،N،P و Q وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع می‌باشند. ثابت کنید $MN = PQ$.  	۱/۲۵
۹	الف) حاصل عبارت روبه‌رو را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. $\frac{\sqrt{20}+2\sqrt{45}}{\sqrt{5}}=$	۱
	ب) مخرج کسر روبه‌رو را گویا کنید. $\frac{2}{7\sqrt{3}}=$	۰/۵
۱۰	الف) حاصل عبارت مقابل را با استفاده از اتحاد به دست آورید. $(2x+3)(2x-4)=$	۰/۷۵
	ب) با استفاده از اتحاد، جای خالی را کامل کنید. $(\cdots\cdots+\sqrt{7})+(\cdots\cdots-\sqrt{7})=\frac{1}{4}x^2-\cdots\cdots$	۰/۷۵
	پ) مجموعه جواب نامعادلهٔ روبه‌رو را روی محور نشان دهید. $\frac{7x}{6}\leq\frac{x+1}{3}+\frac{x-1}{2}$	۱/۲۵
۱۱	دستگاه معادلات خطی روبه‌رو را حل کنید. $\begin{cases}3x+y=-2\\-2x+3y=5\end{cases}$	۱
۱۲	الف) خط $y=-\frac{3}{2}x+1$ را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید.  	۰/۷۵
	ب) مختصات نقطه‌ای از خط $y=-4x+1$ را به دست آورید که طول آن ۲ باشد.	۰/۵
	پ) معادلهٔ خطی را بنویسید که موازی خط $y=-5x$ بوده و از نقطهٔ $\begin{bmatrix}-1\\10\end{bmatrix}$ بگذرد.	۰/۷۵
۱۳	الف) عبارت مقابل به ازای چه مقداری از x تعریف‌نشده است؟ $\frac{8x-9}{x-7}$	۰/۲۵
	ب) دو عبارت گویا بنویسید که حاصل‌جمع آن‌ها $\frac{a+7}{a-5}$ باشد.	۰/۵
	پ) اگر مساحت مستطیلی x^2-25 و عرض آن $\frac{x^2-x-20}{x+4}$ باشد، طول مستطیل را برحسب x به دست آورید.	۱
۱۴	تقسیم مقابل را انجام دهید و خارج‌قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید. $8x^2-10x+9 \;\big\vert\; \underline{4x+3}$	۱
۱۵	در سؤالات زیر نوشتن دستور محاسبه (فرمول)، حجم و مساحت الزامی است. الف) ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانهٔ ۵ cm و به ارتفاع ۱۲ cm را از آب پر می‌کنیم و در ظرف استوانه‌ای‌شکل که شعاع قاعدهٔ آن ۲ cm است، خالی می‌کنیم. آب تا چه ارتفاعی (برحسب سانتی‌متر) در استوانه بالا می‌آید؟ $(\pi = 3)$   	۱/۵
	ب) مساحت یک کلاه (عرق‌چین) به شکل رویهٔ نیم‌کره به شعاع ۱۲ cm را پیدا کنید. $(\pi = 3)$ 	۱
	موفق باشید	۲۰

۱
الف) درست؛ چون $a^{۲}$ همواره مثبت است، پس b باید منفی باشد.
ب) درست (عددی مانند ۳ هم صحیح است و هم گویا).
پ) نادرست؛ $۹=(-۳)^{۲}=(-\frac{۱}{۳})^{-۲}$ است و این عدد از $\frac{۱}{۹}=۹^{-۱}$ بزرگ‌تر است.
ت) درست (بین ۱۴ و ۱۶ تنها عدد ۱۵ قرار دارد که آن هم اول نیست).

۲
الف) ۳ یا $\frac{۱}{۳}$
ب) ۴
پ) $۵^{-۲}\times(\frac{۱}{۵})^{۶}=۵^{-۲}\times۵^{-۶}=۵^{-۸}$ یا $۵^{-۲}\times(\frac{۱}{۵})^{۶}=(\frac{۱}{۵})^{۲}\times(\frac{۱}{۵})^{۶}=(\frac{۱}{۵})^{۸}$
ت) استدلال

۳
الف) گزینهٔ (۳) (عرض همهٔ نقطه‌ها ۳− است.)
ب) گزینهٔ (۱) $۰/۰۰۰۲۹=۲/۹\times۱۰^{-۴}$
پ) گزینهٔ (۳) (تنها در گزینهٔ (۳)، مخرج کسر فقط شامل عامل ۲ یا ۵ است. $\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲^{۳}}$)
ت) گزینهٔ (۲) ($A-B$، یعنی ناحیه‌ای که شامل A باشد، اما شامل B نباشد.)

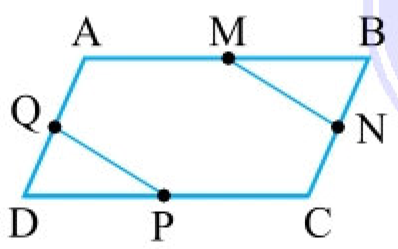
۴
ابتدا مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را می‌نویسیم: (حرف «پ» نشان‌دهندهٔ فرزند پسر و حرف «د» نشان‌دهندهٔ فرزند دختر است.)
$S=\{(پ,پ),(پ,د),(د,پ),(د,د)\}$
حالا مجموعهٔ حالت‌های مطلوب را مشخص می‌کنیم: $A=\{(پ,د),(د,پ)\}$
حالا می‌توانیم احتمال پیشامد موردنظرمان را مشخص کنیم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

۵
الف) $A=\{x^{۲}+۲\,|\,x\in\mathbb{N}, x\leq ۳\}\Rightarrow A=\{۳,۶,۱۱\}$
ب) $A\cap B=\{۶\}$

۶
الف) $\sqrt{(۳-\sqrt{۱۰})^{۲}}-\sqrt{۱۰}=|\underbrace{۳-\sqrt{۱۰}}_{<۰}|-\sqrt{۱۰}=\cancel{\sqrt{۱۰}}-۳-\cancel{\sqrt{۱۰}}=-۳$
ب) زیرا $۳/\overline{۷}$ نمایش اعشاری یک کسر گویا است. $۱)\ ۳/\overline{۷}\ \boxed{\in}\ \mathbb{Q}$
مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$ نیست. $۲)\ \mathbb{R}\ \boxed{\not\subseteq}\ \mathbb{Z}$

۷
معتبر نیست؛ چون استدلال ما فقط برای یک حالت خاص انجام شده است و این موضوع را برای همهٔ مثلث‌ها اثبات نکرده‌ایم.

۸
ابتدا فرض و حکم مسئله را مشخص می‌کنیم:



فرض	چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است و نقاط N، P، M و Q وسط اضلاع هستند.
حکم	$MN=PQ$

$$\left.\begin{array}{l} MB=AM=\frac{AB}{۲} \\ DP=PC=\frac{DC}{۲} \\ AB=DC\ \text{اضلاع روبه‌روی متوازی‌الاضلاع} \end{array}\right\}\Rightarrow MB=\frac{AB}{۲}=\frac{DC}{۲}=DP\Rightarrow MB=DP$$

به طور مشابه $QD=BN$ است:

$$\left.\begin{array}{l} MB=DP \\ QD=BN \\ \hat{B}=\hat{D} \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ضزض}}\overset{\Delta}{QDP}\cong\overset{\Delta}{MBN}\xrightarrow{\text{تساوی اجزا}}MN=PQ$$

۹
الف) $\frac{\sqrt{۲۰}+۲\sqrt{۴۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۴\times۵}+۲\sqrt{۹\times۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۴}\times\sqrt{۵}+۲\sqrt{۹}\times\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}+۲\times۳\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۸\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=۸$
ب) $\frac{۲}{۷\sqrt{۳}}=\frac{۲}{۷\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۷\times۳}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲۱}$

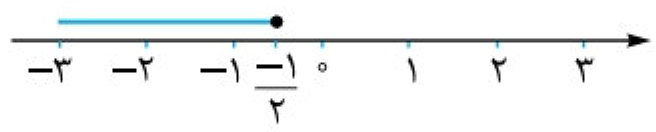
۱۰

الف) $(۲x+۳)(۲x-۴)=(۲x)^۲+۲x(۳+(-۴))+۳\times(-۴)=۴x^۲-۲x-۱۲$

ب) $(\frac{x}{۲}+\sqrt{۷})(\frac{x}{۲}-\sqrt{۷})=\frac{۱}{۴}x^۲-۷$

پ) $\frac{۷x}{۶}\le\frac{x+۱}{۳}+\frac{x-۱}{۲}\xrightarrow{\text{طرفین}\times۶}۷x\le۲(x+۱)+۳(x-۱)\Rightarrow ۷x\le۲x+۲+۳x-۳$

$\Rightarrow ۷x\le۵x-۱\Rightarrow ۲x\le-۱\Rightarrow x\le-\frac{۱}{۲}$



۱۱

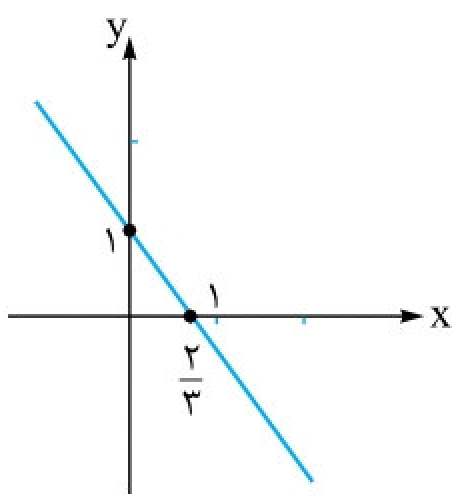
$\begin{cases}۳x+y=-۲\\-۲x+۳y=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-۳)\times(۳x+y)=-۲\\-۲x+۳y=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۹x\cancel{-۳y}=۶\\-۲x\cancel{+۳y}=۵\end{cases}\Rightarrow -۱۱x=۱۱\Rightarrow x=-۱$

$۳x+y=-۲\xrightarrow{x=-۱}-۳+y=-۲\Rightarrow y=۱$

۱۲

الف) $y=۰\Rightarrow ۰=-\frac{۳}{۲}x+۱\Rightarrow\frac{۳}{۲}x=۱\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$ ، $x=۰\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}(۰)+۱\Rightarrow y=۱$

دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳}\\۰\end{bmatrix}$ را روی شکل مشخص می‌کنیم و خط واصل‌ها را می‌کشیم و ادامه می‌دهیم.



ب) $y=-۴x+۱\xrightarrow{x=۲}y=-۴(۲)+۱=-۷\Rightarrow$ مختصات نقطه $=\begin{bmatrix}۲\\-۷\end{bmatrix}$

پ) از آن‌جایی که خط موردنظر موازی خط $y=-۵x$ است، پس شیب آن -۵ است.

$y=ax+b\xrightarrow{a=-۵}y=-۵x+b\xrightarrow{\begin{bmatrix}-۱\\۱۰\end{bmatrix}}$

$۱۰=-۵(-۱)+b\Rightarrow۱۰=۵+b\Rightarrow b=۵\Rightarrow y=-۵x+۵$

۱۳

الف) اگر مخرج کسر $\frac{۸x-۹}{x-۷}$ صفر شود، کسر تعریف نشده است: $x-۷=۰\Rightarrow x=۷$

ب) این مسئله جواب‌های گوناگونی می‌تواند داشته باشد، به عنوان مثال: $\frac{a}{a-۵}+\frac{۷}{a-۵}=\frac{a+۷}{a-۵}$

پ) $\text{عرض}=\frac{x^۲-x-۲۰}{x+۴}=\frac{(x+۴)(x-۵)}{x+۴}=x-۵$

$\text{طول}=\frac{\text{مساحت}}{\text{عرض}}=\frac{x^۲-۲۵}{x-۵}=\frac{(x+۵)(x-۵)}{x-۵}=x+۵\Rightarrow \text{طول}=x+۵$

۱۴

$$\begin{array}{l|l}
۸x^۲-۱۰x+۹ & ۴x+۳\\
\underline{-(۸x^۲+۶x)} & ۲x-۴ \leftarrow \text{خارج‌قسمت}\\
-۱۶x+۹ & \\
-\ \underline{(-۱۶x-۱۲)} & \\
۲۱ \leftarrow \text{باقی‌مانده} &
\end{array}$$

۱۵

الف) ابتدا حجم آب را مشخص می‌کنیم: $V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{۳}\times۳\times۵^۲\times۱۲=۳۰۰\,cm^۳$

حال این مقدار آب را درون استوانه می‌ریزیم تا ببینیم ارتفاع آن چه مقدار می‌شود:

$V_{\text{استوانه}}=\pi r^۲h=۳\times۲^۲\times h=۳۰۰\Rightarrow ۴h=۱۰۰\Rightarrow h=۲۵\,cm$

ب) $S_{\text{کره}}=۴\pi R^۲\Rightarrow S_{\text{نیم‌کره}}=\frac{۴\pi R^۲}{۲}=۲\pi R^۲=۲\times۳\times۱۲^۲=۸۶۴\,cm^۲$